DM de MATHÉMATIQUES numéro 9 COMMENTAIRES
PSI2 2024-2025

1. J'aurais aimé voir en toutes lettres le terme "**convergence normale**" puisque c'est ici l'argument qui permet de conclure à la continuité de φ_X. Bien sûr, presque toutes les copies mentionnent les majorations de module $\left|e^{int}\, P(X=n)\right| \le P(X=n)$ et le fait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1 < +\infty$, mais on attend de vous aussi que vous sachiez mettre un nom sur les notions que vous manipulez.

2. Une intégration terme à terme "**sur un segment**" (ceci aussi devrait figurer en toutes lettres sur la copie puisque c'est seulement sur un segment que la convergence normale ou uniforme permet d'intervertir série et intégrale).

5. Des interversions de sommes souvent maladroites et ne mentionnant jamais la sommabilité de la famille considérée indexée par des couples d'entiers naturels. Il était sans doute plus agréable ici de parler de "produit de Cauchy".

7. On procède par récurrence, mais il doit y avoir une seule fonction f_{n+1}, et non pas deux fonctions suivant que X_n est nul ou pas. En d'autres termes, le test "`if Xn==0:`" doit faire partie de la définition de la fonction f_{n+1}.

Il est faux de prétendre que $X_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k - (n-1)$, plus précisément ce n'est vrai que si tous les X_k, avec $1 \le k \le n-1$, sont non nuls. {#début baratin} Tiens, considérons le cas extrême où tous les A_k, avec $1 \le k \le n$, sont nuls: cela veut dire qu'il n'y a jamais de client qui arrive quand un autre passe en caisse, ce n'est pas un jour de grande affluence et chaque client arrive à la caisse alors que le client précédent est déjà sorti du magasin. Dans ce cas, tous les X_k sont nuls aussi et $0 = X_n \ne \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k - (n-1) = -(n-1)$, la formule est donc fausse! {#fin baratin}

8. Avant de se lancer dans le calcul de $\varphi_Y(t)$, il aurait été bien de décomposer un peu les choses, c'est-à-dire d'expliciter clairement les événements $\{Y=n\}$, en dissociant le cas $n=0$ et le cas $n>0$.

Attention: des disjonctions de cas mal organisées n'ont pas toujours de sens. Sur certaines copies, on a l'impression qu'il y a une fonction caractéristique φ_Y "lorsque X est nul" et qu'il y en a une autre "lorsque X est strictement positif". Non, il y a une seule fonction caractéristique φ_Y qui, d'une certaine façon, doit faire la synthèse de ces deux cas.

9. Question de synthèse faisant appel à **Q5.**, **Q7.** et **Q8.** Il est inutile de refaire des calculs, ils sont déjà faits dans les questions citées ci-dessus.

10. Utiliser **Q3.** qui montre que φ_A est de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui donne immédiatement son développement limité d'ordre un à l'origine. Ceux qui n'ont pas vu cela ont fait une affreuse tambouille qui ne leur rapportera aucun point en situation de concours (des sommes infinies de termes en $o(t)$, des espérances de $o(t)$, bouh que c'est laid!).

11. Un petit calcul asymptotique, bien traité dans la plupart des copies.

12. Gros calculs moches, j'avoue que je ne les ai même pas lus!

13.b. Une récurrence sur n (à partir du rang N) était très facile à rédiger. Les bidouillages "de proche en proche" sont nettement moins convaincants et parfois clairement faux!

13.c. Il faut revenir à la définition de la limite, pas toujours clairement comprise. Il ne s'agit pas de "faire tendre ε vers zéro", ni d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ (pourquoi diable $|u_n|$ admettrait-elle une limite???)

14. J'ai lu sur certaines copies que e^{-it} est plus petit que 1, non ce n'est pas possible j'ai dû rêver!

15. Bien sûr la question **2.**, affirmant que la fonction caractéristique détermine la loi, est ici utile. Mais il n'y a pas que ça, il y a aussi un passage à la limite "sous une intégrale", bref une histoire de convergence dominée puisqu'on n'a obtenu que la convergence simple (et pas uniforme) de la suite de fonctions (φ_{X_n}).