EXERCICES sur les ESPACES PRÉHILBERTIENS et EUCLIDIENS
PSI2 2024-2025

Produit scalaire, norme associée, orthogonalité

1. Soient x et y deux vecteurs d'un espace préhilbertien E. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si
$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\qquad \|x+\lambda y\|\geq\|x\|\ .$$

- -

• Si x et y sont orthogonaux, alors x et λy le sont aussi, et la relation de Pythagore donne
$$\|x+\lambda y\|^2=\|x\|^2+\|\lambda y\|^2\geq\|x\|^2\ ,$$
donc $\|x+\lambda y\|\geq\|x\|$ pour tout λ réel.

• Si $\|x+\lambda y\|\geq\|x\|$ pour tout λ, en élevant au carré, en développant, puis en simplifiant, on a
$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\qquad 2\lambda\,(x|y)+\lambda^2\,\|y\|^2\geq 0\ .$$
La fonction $f\,:\,\lambda\mapsto 2\lambda\,(x|y)+\lambda^2\,\|y\|^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et elle admet un minimum (global) en 0, donc $f'(0)=0$, ce qui donne $2\,(x|y)=0$.

---

2. Soit E un espace préhilbertien réel. Soient f et g deux applications de E vers E telles que
$$\forall(x,y)\in E^2\qquad \big(x|f(y)\big)=\big(g(x)|y\big)\ .$$
Montrer que f et g sont des endomorphismes de E.

- -

Soient x_1, x_2, y des vecteurs de E, soient a et b des réels ; alors
$$\begin{aligned}\big(g(ax_1+bx_2)|y\big)&=\big(ax_1+bx_2|f(y)\big)=a\,\big(x_1|f(y)\big)+b\,\big(x_2|f(y)\big)\\&=a\,\big(g(x_1)|y\big)+b\,\big(g(x_2)|y\big)\\&=\big(a\,g(x_1)+b\,g(x_2)|y\big)\ .\end{aligned}$$
Ceci étant vrai pour tout vecteur y de E, on déduit $g(ax_1+bx_2)=a\,g(x_1)+b\,g(x_2)$, donc g est linéaire. On procède de même pour montrer la linéarité de f.

3*. Soit E un espace préhilbertien, soit $u:E\to E$ une application conservant le produit scalaire, i.e. telle que
$$\forall(x,y)\in E^2\qquad \big(u(x)|u(y)\big)=(x|y)\ .$$
Montrer que u est un endomorphisme de E.

- -

L'application u vérifie bien sûr $\forall x\in E\quad \big\|u(x)\big\|=\|x\|$ (conservation de la norme).

Il suffit de montrer la linéarité de u. Soient donc $x\in E$, $y\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned}\big\|u(\lambda x+y)-\lambda\,u(x)-u(y)\big\|^2&=\big\|u(\lambda x+y)\big\|^2+\lambda^2\,\|u(x)\|^2+\big\|u(y)\big\|^2-2\lambda\,\big(u(\lambda x+y)|u(x)\big)\\&\qquad-2\,\big(u(\lambda x+y)|u(y)\big)+2\lambda\,\big(u(x)|u(y)\big)\\&=\big\|\lambda x+y\big\|^2+\lambda^2\,\|x\|^2+\|y\|^2-2\lambda\,(\lambda x+y|x)-2\,(\lambda x+y|y)+2\lambda\,(x|y)\\&=\big\|(\lambda x+y)-\lambda x-y\big\|^2\ =\ 0\ .\end{aligned}$$
On en déduit que $u(\lambda x+y)=\lambda\,u(x)+u(y)$, c'est ce qu'il fallait démontrer.

---

4. Soit $E = \mathcal{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Pour $f \in E$ et $g \in E$, on pose
$$< f, g >= \int_0^1 f'(t)\, g'(t)\ \mathrm{d}t + f(1)\, g(0) + f(0)\, g(1)\ .$$
Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

- -

La bilinéarité et la symétrie sont évidentes. Pour le caractère défini positif, il faut penser à Mrs. Cauchy & Schwarz, qui nous disent notamment que $\left(\displaystyle\int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t\right)^2 \leq \displaystyle\int_0^1 f'(t)^2\ \mathrm{d}t$. Ainsi,
$$\begin{aligned} < f, f > &= \int_0^1 f'(t)^2\ \mathrm{d}t + 2\, f(0)\, f(1) \\ &\geq \left(\int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t\right)^2 + 2\, f(0)\, f(1) \ = \ \big(f(1) - f(0)\big)^2 + 2\, f(0)\, f(1) \\ &= f(0)^2 + f(1)^2 \ \geq \ 0\ . \end{aligned}$$
La forme est donc positive et, si $< f, f >= 0$, alors $f(0)^2 + f(1)^2 = 0$, donc $f(0) = f(1) = 0$, mais on a aussi dans ce cas $\displaystyle\int_0^1 f'(t)^2 \mathrm{d}t = 0$, d'où $f' = 0$ par le théorème de stricte positivité, puis $f = 0$ d'où le caractère défini.

---

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \|AX\| \leq \|X\|$, où $\|\cdot\|$ représente la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$.
Montrer que $\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \|A^\top X\| \leq \|X\|$.

- -

Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est donné par $(X|Y) = X^\top Y$. Soit alors $X \in \mathbb{R}^n$, on a
$$\|A^\top X\|^2 = (A^\top X | A^\top X) = (A^\top X)^\top (A^\top X) = X^\top A A^\top X = (X | AA^\top X)\ .$$
L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors $\ \|A^\top X\|^2 \leq \|X\|\ \|AA^\top X\|$ et, par hypothèse, $\|AA^\top X\| \leq \|A^\top X\|$. On obtient donc $\|A^\top X\|^2 \leq \|X\|\ \|A^\top X\|$.
Si $A^\top X \neq 0$, alors $\|A^\top X\| > 0$ et, en simplifiant, on obtient bien $\|A^\top X\| \leq \|X\|$.
Si $A^\top X = 0$, alors l'inégalité demandée est triviale.

---

6. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel constitué des suites réelles bornées. Si u et v sont deux suites appartenant à E, on pose $(u|v) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n v_n}{2^n}$.

a. Montrer que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur E.

b. On note F le sous-espace vectoriel de E constitué des suites “presque nulles”, c'est-à-dire dont les termes sont nuls à partir d'un certain rang. Déterminer l'orthogonal de F. Le sous-espace F admet-il un supplémentaire orthogonal ? Déterminer $(F^\perp)^\perp$.

- -

a. D'abord, pour $(u,v)\in E^2$, la série de terme général $\dfrac{u_n v_n}{2^n}$ converge : en effet, les suites u et v sont bornées, donc $|u_n|\leq M$ et $|v_n|\leq M'$ pour tout n, puis $\left|\dfrac{u_n v_n}{2^n}\right|\leq\dfrac{MM'}{2^n}$, d'où la convergence absolue de la série définissant $(u|v)$. Les vérifications des caractères bilinéaire, symétrique et défini positif, sont laissées à l'éventuel (et bienvenu) lecteur.

b. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, notons $e^{(k)}=(e_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $e_n^{(k)}=\delta_{k,n}$, autrement dit la suite dont le terme d'indice k vaut 1, et les autres valent 0. On a bien $e^{(k)}\in F$ pour tout k. *En fait, on a plus précisément* $F=\mathrm{Vect}\left\{e^{(k)}\ ;\ k\in\mathbb{N}\right\}$. Si $u\in F^\perp$, alors, pour tout entier naturel k, on a $(u|e^{(k)})=\dfrac{u_k}{2^k}=0$, donc $u=0$. On a ainsi prouvé que $F^\perp=\{0\}$. Comme $F\neq E$, on a $F\oplus F^\perp=F\oplus\{0\}=F\neq E$, donc l'orthogonal $F^\perp$ de F n'est pas un supplémentaire de F.

Enfin, $(F^\perp)^\perp=\{0\}^\perp=E$, et en particulier $(F^\perp)^\perp\neq F$.

Familles orthogonales ou orthonormales

7. Soit $E=\mathbb{R}[X]$. Pour $(P,Q)\in E^2$, on pose $(P|Q)=\displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur l'espace vectoriel E.

b. Calculer $(X^p|X^q)$ pour p et q entiers naturels.

c. Orthonormaliser la famille $(1,X,X^2)$ pour ce produit scalaire.

- -

a. Tout d'abord, l'intégrale ci-dessus converge: en effet, si le polynôme PQ est non nul, soit $a_d X^d$ son terme dominant avec $d\in\mathbb{N}$ et $a_d\in\mathbb{R}^*$, on a alors

$$t^2\,P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\underset{t\to+\infty}{\sim}a_d\,t^{d+2}\,e^{-t}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

par croissances comparées, donc $P(t)\,Q(t)\,e^{-t}=o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ lorsque $t\to+\infty$, ce qui garantit l'intégrabilité de cette fonction continue sur $[0,+\infty[$.

Ensuite, on a bien un produit scalaire: La bilinéarité et la symétrie sont évidentes, et on a $(P|P)=\displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t\geq 0$. Comme la fonction $t\mapsto P(t)^2\,e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, on déduit du théorème de stricte positivité que $(P|P)$ est nul si et seulement si $\forall t\in\mathbb{R}_+\quad P(t)^2\,e^{-t}=0$, ce qui entraîne que $\forall t\in\mathbb{R}_+\quad P(t)=0$, ce qui entraîne enfin que le polynôme P admet une infinité de racines, donc est le polynôme nul. On a obtenu le caractère défini positif.

b. Posons $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^n\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout n entier naturel. Un calcul classique, par une intégration par parties, donne $I_0=1$ puis $I_n=nI_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, donc $I_n=n!$ pour tout n entier naturel.

Ensuite, pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $(X^p|X^q)=I_{p+q}=(p+q)!$

c. Notons $\mathcal{E}=(E_0,E_1,E_2)$ l'orthonormalisée de la base canonique $(1,X,X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

• D'abord, $\|1\|^2 = (1|1) = I_0 = 1$, le polynôme constant est donc unitaire (dans le sens "de norme 1"). On pose donc $E_0 = 1$.

• Ensuite, $(E_0|X) = (1|X) = 1$, donc $V_1 = X - (E_0|X)\,E_0 = X - 1$, qu'il reste à "normer". On calcule

$$\|X-1\|^2 = (X-1|X-1) = (X|X) - 2\cdot(1|X) + (1|1) = 2 - 2 + 1 = 1\ ,$$

donc $E_1 = \dfrac{V_1}{\|V_1\|} = V_1 = X - 1$.

• Enfin, $(E_0|X^2) = (1|X^2) = 2$ et $(E_1|X^2) = (X|X^2) - (1|X^2) = 6 - 2 = 4$, donc

$$V_2 = X^2 - (E_0|X^2)\,E_0 - (E_1|X^2)\,E_1 = X^2 - 2 - 4(X-1) = X^2 - 4X + 2\ ,$$

puis $\|V_2\|^2 = 4$ (*y'a un petit calcul*), donc $E_2 = \dfrac{V_2}{\|V_2\|} = \dfrac{V_2}{2} = \dfrac{1}{2}(X^2 - 4X + 2)$.

---

8. L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ tel que

$$\forall (P,Q) \in E^2 \qquad (P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

a. Établir l'existence et l'unicité d'une famille orthogonale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que, pour tout n, le polynôme P_n soit unitaire (i.e. de coefficient dominant 1) de degré n.

b. Étudier la parité du polynôme P_n.

c. Pour $n \geq 2$, montrer que $P_{n+1} - XP_n \in \big(\mathbb{R}_{n-2}[X]\big)^{\perp}$.

d. En déduire l'existence, pour tout $n \geq 1$, d'un réel λ_n tel que $P_{n+1} = XP_n + \lambda_n\,P_{n-1}$.

- -

a. Notons (E_n) la famille orthonormalisée de la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors chaque polynôme E_n est de degré n: en effet, on a, par construction,

$$\mathrm{Vect}(E_1,\cdots,E_n) = \mathrm{Vect}(1,X,\cdots,X^n) = \mathbb{R}_n[X]\ ,$$

donc $E_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\deg(E_n) \leq n$. Et on ne peut avoir $\deg(E_n) < n$, sinon la famille $(E_0,\cdots,E_n)$ serait liée. Notons a_n le coefficient dominant du polynôme E_n. La famille de polynômes (P_n), avec $P_n = \dfrac{E_n}{a_n}$ convient.

Réciproquement, si une famille de polynômes (P_n) convient, en posant $U_n = \dfrac{P_n}{\|P_n\|}$, on a une famille orthonormale telle que $\deg(U_n) = n$ pour tout n, donc telle que $\mathrm{Vect}(U_0,\cdots,U_n) = \mathrm{Vect}(1,X,\cdots,X^n)$ pour tout n, c'est donc, aux signes près, l'orthonormalisée de la base canonique, i.e. il existe pour tout n un $\varepsilon_n \in \{-1,1\}$ tel que $U_n = \varepsilon_n E_n$. En considérant les coefficients dominants, on a $\dfrac{1}{\|P_n\|} = \varepsilon_n a_n$, ou $\|P_n\| = \dfrac{1}{\varepsilon_n a_n}$, d'où

$$P_n = \|P_n\|\,U_n = \|P_n\|\,\varepsilon_n E_n = \frac{E_n}{a_n}\ ,$$

ce qui prouve l'unicité.

b. Si, pour tout polynôme P, on note $\widehat{P}$ le polynôme défini par $\widehat{P}(X) = P(-X)$, on vérifie que $\big(\widehat{P}|\widehat{Q}\big) = (P|Q)$. Soit, pour tout n, le polynôme$Q_n = (-1)^n \widehat{P_n}$, i.e. $Q_n(X) = (-1)^n P_n(-X)$. Si $m \neq n$, alors $(Q_m|Q_n) = (-1)^{m+n}\big(\widehat{P_m} \mid \widehat{P_n}\big) = (-1)^{m+n}\,(P_m|P_n) = 0$. La famille (Q_n) est donc encore orthogonale, et il est clair que chaque polynôme Q_n est unitaire de degré n. Par la propriété d'unicité, on a $Q_n = P_n$, donc P_n est de la même parité que l'entier n.

c. Par construction, on a $P_n \in \big(\mathbb{R}_{n-1}[X]\big)^{\perp}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc $P_{n+1} \in \big(\mathbb{R}_n[X]\big)^{\perp}$ et, a fortiori, $P_{n+1} \in \big(\mathbb{R}_{n-2}[X]\big)^{\perp}$. Ensuite, si $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, alors $XQ \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $(XP_n|Q) = (P_n|XQ) = 0$, donc $XQ \in \big(\mathbb{R}_{n-2}[X]\big)^{\perp}$. Par bilinéarité du produit scalaire, on déduit $P_{n+1} - XP_n \in \big(\mathbb{R}_{n-2}[X]\big)^{\perp}$.

d. Comme P_{n+1} et XP_n sont unitaires de degré $n+1$, le polynôme $P_{n+1} - XP_n$ est de degré au plus n. De plus, $P_{n+1} - XP_n$ est de parité opposé à celle de l'entier n, donc il ne contient pas de terme en X^n et appartient finalement à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Pour $n = 1$, c'est fini. Pour $n \geq 2$, comme $(P_0, \cdots, P_{n-1})$ est une base (orthogonale) de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on peut écrire $P_{n+1} - XP_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k$ et, en faisant le produit scalaire avec P_j $(0 \leq j \leq n-2)$, on obtient $\alpha_j = 0$, il reste donc $P_{n+1} - XP_n = \alpha_{n-1} P_{n-1}$, ce qu'il fallait démontrer (à un changement de notation près).

9.a. Transformer en produit l'expression $\sin(n+1)x + \sin(n-1)x$. En déduire que, pour tout n entier naturel, il existe un unique polynôme U_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin x \cdot U_n(\cos x) = \sin(n+1)x\ .$$

b. Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, P(t) Q(t)\, \mathrm{d}t$. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et que la famille $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

- -

a. • $\sin(n+1)x + \sin(n-1)x = 2\,\cos x\,\sin(nx)$.

• Unicité : si, pour un n donné, il existait deux polynômes U et V tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin(n+1)x = \sin x \cdot U(\cos x) = \sin x \cdot V(\cos x)\ ,$$

alors on aurait $\forall x \in\,]0, \pi[\quad U(\cos x) = V(\cos x)$ puisque $\sin x$ n'est pas nul. Ensuite, la fonction cos réalise une bijection de $]0, \pi[$ vers $]-1, 1[$, donc $\forall t \in\,]-1, 1[\quad U(t) = V(t)$: le polynôme $U - V$ aurait une infinité de racines, d'où $U = V$.

• Existence par récurrence (double) sur n : Pour $n = 0$ et $n = 1$, les polynômes $U_0 = 1$ et $U_1 = 2X$ conviennent. Supposons l'existence de polynômes U_{n-2} et U_{n-1} pour un entier $n \geq 2$ donné, alors

$$\begin{aligned} \sin(n+1)x &= 2\,\cos x\,\sin(nx) - \sin(n-1)x \\ &= 2\,\cos x\,\sin x \cdot U_{n-1}(\cos x) - \sin x \cdot U_{n-2}(\cos x) \\ &= \sin x \cdot U_n(\cos x)\ , \end{aligned}$$

où U_n est le polynôme défini par $U_n = 2\,X\,U_{n-1} - U_{n-2}$.

b. On vérifie rapidement que $(\cdot|\cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}[X]$. De plus, $(P|P) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,P(t)^2\,\mathrm{d}t \geq 0$ et, si $(P|P) = 0$, alors la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t^2}\,P(t)^2$ est nulle sur $[-1,1]$ (fonction **continue** positive d'intégrale nulle), donc $\forall t \in]-1,1[\quad P(t) = 0$: le polynôme P a une infinité de racines, donc $P = 0$, on a prouvé le caractère défini positif.

Si p et q sont deux entiers naturels distincts, on a

$$\begin{aligned}
(U_p|U_q) &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,U_p(t)\,U_q(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2 x}\,U_p(\cos x)\,U_q(\cos x)\,(-\sin x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \big(\sin x \cdot U_p(\cos x)\big)\,\big(\sin x \cdot U_q(\cos x)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \sin(p+1)x \cdot \sin(q+1)x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \Big[\cos(p-q)x - \cos(p+q+2)x\Big]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(p-q)x}{p-q}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(p+q+2)x}{p+q+2}\right]_0^{\pi} \\
&= 0\ :
\end{aligned}$$

la famille $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

---

10. Soient $x_1, \cdots, x_n$ des vecteurs d'un espace préhilbertien réel E. On note $G = (g_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $g_{ij} = (x_i|x_j)$.

a. Montrer qu'il existe une matrice (rectangulaire) M telle que $G = M^\top M$. *On pourra pour cela introduire une base orthonormale du s.e.v.* $F = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$.

b. En déduire que le rang de la matrice G est égal au rang de la famille de vecteurs $(x_1, \cdots, x_n)$.

- -

a. Soit r le rang de la famille de vecteurs $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$, le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$ de E est de dimension r, et admet une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_r)$. Notons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{X}$ relativement à la base $\mathcal{B}$: si $M = (a_{k,l})_{1\leq k\leq r, 1\leq l\leq n}$, alors pour tout $l \in [\![1,n]\!]$, on a $x_l = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} a_{k,l}e_k$ (le l-ème vecteur est disposé sur la l-ème colonne). On vérifie alors que, si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $g_{i,j} = (x_i|x_j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} a_{k,i}a_{k,j} = (M^\top M)_{i,j}$, donc $G = M^\top M$.

b. Montrons d'abord le résultat suivant : si $M \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ est une matrice rectangulaire quelconque, alors $\mathrm{Ker}(M^\top M) = \mathrm{Ker}\,M$. En effet, soit $X \in \mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

- si $MX = 0_r$, alors $M^\top MX = 0_n$ (donc $\operatorname{Ker} M \subset \operatorname{Ker}(M^\top M)$) ;
- si $M^\top MX = 0_n$, alors $X^\top M^\top MX = 0$, soit $(MX)^\top (MX) = 0$, donc $\|MX\|^2 = 0$ (norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^r$), donc $MX = 0_r$ (et cela prouve l'inclusion inverse).

Les matrices M et $G = M^\top M$ ayant le même nombre de colonnes n (dimension de l'espace de départ de l'application linéaire canoniquement associée), le théorème du rang permet d'écrire

$$\begin{aligned} rg(G) &= \operatorname{rg}(M^\top M) \quad = \quad n - \dim \operatorname{Ker}(M^\top M) \\ &= n - \dim(\operatorname{Ker} M) \\ &= \operatorname{rg}(M) \quad = \quad \operatorname{rg}\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})\right) \quad = \quad \operatorname{rg}(\mathcal{X}) \ . \end{aligned}$$

c. Remarque : Montrons directement le résultat du **b.** Pour cela, notons $C_1, \cdots, C_n$ les vecteurs-colonnes de la matrice G qui sont des éléments de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

- Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0_E$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j g_{i,j} = \sum_{j=1}^n \lambda_j (x_i|x_j) = \Big(x_i \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\Big) = (x_i|0_E) = 0 \ ,$$

on en déduit la relation $\displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0_n$ dans $\mathbb{R}^n$.

- Inversement, si des réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ vérifient $\displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0_n$, alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

on a $\displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j g_{i,j} = \Big(x_i \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\Big) = 0$, d'où

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \Big(x_i \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\Big) = \Big\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \Big\|^2 = 0$$

et $\displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0_E$.

- On a donc prouvé l'équivalence

$$\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0_n \iff \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0_E \ :$$

les relations de dépendance linéaire entre les colonnes de la matrice G sont exactement les mêmes que les relations entre les vecteurs x_j eux-mêmes. Autrement dit, les applications linéaires

$$\left\{ \begin{array}{lccc} \varphi : & \mathbb{R}^n & \to & E \\ & (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lccc} \psi : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j \end{array} \right.$$

ont le même noyau ; comme elles ont le même espace de départ (de dimension finie), on déduit qu'elles ont le même rang, soit

$$\mathrm{rg}(x_1, \cdots, x_n) = \mathrm{rg}\,\varphi = \mathrm{rg}\,\psi = \mathrm{rg}(C_1, \cdots, C_n) = \mathrm{rg}(G) \ .$$

---

11. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire :

$$(P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \ .$$

Déterminer la base de E obtenue par orthonormalisation de Schmidt de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, X^3)$.

- -

• On commence par justifier que $(\cdot|\cdot)$ est bien un produit scalaire sur E (*laissé au lecteur*).

• Posons $e_i = X^i$ $(0 \le i \le 3)$, et notons (u_0, u_1, u_2, u_3) la base orthonormalisée. D'abord, $u_0 = \dfrac{e_0}{\|e_0\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ puisque $\|e_0\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t = 2$. On constate ensuite que les vecteurs e_0 et e_1 sont orthogonaux puisque $(e_0|e_1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t = 0$, il suffit donc de normer le vecteur e_1, et $u_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,X$ puisque $\|e_1\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$.

On pose ensuite $v_2 = e_2 - (u_0|e_2)\,u_0 - (u_1|e_2)\,u_1 = e_2 - \dfrac{\sqrt{2}}{3}\,u_0 = X^2 - \dfrac{1}{3}$, on norme ensuite ce vecteur, et

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \sqrt{\frac{45}{8}}\,v_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}\,(3X^2 - 1) \ .$$

Enfin, on pose $v_3 = e_3 - (u_0|e_3)\,u_0 - (u_1|e_3)\,u_1 - (u_2|e_3)\,u_2 = e_3 - \dfrac{\sqrt{6}}{5}\,u_1 = X^3 - \dfrac{3}{5}\,X$, et on le norme :

$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\,v_3 = \frac{\sqrt{14}}{4}\,(5X^3 - 3X) \ .$$

12*. Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme de E, de trace nulle.

a. Montrer qu'il existe un vecteur x non nul de E tel que $\big(u(x)|x\big) = 0$.

b. Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls. *On pourra raisonner par récurrence sur la dimension de E.*

- -

a. Soit $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E, on a alors $\mathrm{tr}(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(u(\varepsilon_i)|\varepsilon_i\big) = 0$.

Si tous les termes de cette somme sont nuls, alors $x = \varepsilon_i$ convient, pour n'importe quel $i \in [\![1, n]\!]$.

Sinon, comme la somme est nulle, il existe deux indices i et j distincts tels que $\big(u(\varepsilon_i)|\varepsilon_i\big) > 0$ et $\big(u(\varepsilon_j)|\varepsilon_j\big) < 0$. L'application $f : t \mapsto \Big(u\big((1-t)\varepsilon_i + t\varepsilon_j\ \big)\big|(1-t)\varepsilon_i + t\varepsilon_j\Big)$ est continue sur $[0,1]$, cela résulte notamment de la continuité des applications linéaires (l'endomorphisme u) et bilinéaires (le produit scalaire) en dimension finie. Comme $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que $f(t_0) = 0$. Le vecteur $x = (1-t_0)\varepsilon_i + t_0\varepsilon_j$ convient alors (il est non nul cas ε_i et ε_j ne sont pas colinéaires).

b. Initialisation évidente: si $n = \dim(E) = 1$, si $\mathrm{tr}(u) = 0$, alors u est l'endomorphisme nul.

Soit $n \geq 2$, supposons la propriété vraie dans tout espace euclidien de dimension $n-1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E euclidien de dimension n. La question **a.** permet d'obtenir un vecteur unitaire e_1 de E tel que $\big(u(e_1)|e_1\big) = 0$. Soit $D = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $H = D^{\perp}$. Si $\mathcal{C} = (e_2, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de H, alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(u) = 0$. Notons v l'endomorphisme de H tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(v) = A$, on a alors $\mathrm{tr}(v) = \mathrm{tr}(A) = 0$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe alors une base orthonormale $\mathcal{C}' = (e'_2, \cdots, e'_n)$ de H telle que les coefficients diagonaux de la matrice $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(v)$ soient tous nuls. La famille $\mathcal{B}' = (e_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ est alors une base orthonormale de E, et la matrice M' de u dans cette base a tous ses coefficients diagonaux nuls. En effet, soit $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ dans E. Comme le premier vecteur e_1 est inchangé et que $\mathrm{Vect}(e'_2, \cdots, e'_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n) = H$, cette matrice est de la forme $P = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q \end{pmatrix}$ avec $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$. Un calcul par blocs montre que

$$M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & LQ \\ Q^{-1}C & A' \end{pmatrix} .$$

Les coefficients diagonaux de M', qui sont 0 et les coefficients diagonaux de A', sont donc nuls.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

13. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{\pi} (a\sin x + b\cos x - x)^2\,\mathrm{d}x$. Déterminer le minimum de $I(a,b)$ lorsque (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$.

- -

Soit $E = \mathcal{C}\big([0,\pi], \mathbb{R}\big)$, muni du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_{[0,\pi]} fg$. Soient les fonctions

$$e : x \mapsto x \quad ; \quad s : x \mapsto \sin x \quad ; \quad c : x \mapsto \cos x\ .$$

Alors $I(a,b) = \|e - (a\,s + b\,c)\|^2$ et, si l'on note P le plan vectoriel $P = \mathrm{Vect}(s,c)$, alors

$$m := \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} I(a,b) = d(e,P)^2 = \|e\|^2 - \|p_P(e)\|^2\ ,$$

en notant p_P le projecteur orthogonal sur le plan P. D'autre part, si $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base orthonormale du plan P, on a

$$p_P(e) = (\varepsilon_1|e)\,\varepsilon_1 + (\varepsilon_2|e)\,\varepsilon_2 \qquad \text{et} \qquad \|p_P(e)\|^2 = (\varepsilon_1|e)^2 + (\varepsilon_2|e)^2\ .$$

La famille (s,c) est orthogonale puisque $(s|c) = \displaystyle\int_0^\pi \sin x\ \cos x\ \mathrm{d}x = 0$, il suffit donc de normer ces "vecteurs" pour avoir une base orthonormale du plan P. Or, $\|s\|^2 = \|c\|^2 = \displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\ \mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos^2 x\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, on posera donc $\varepsilon_1 = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\ s$ et $\varepsilon_2 = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\ c$. On achève l'exercice par quelques calculs d'intégrales :

$$(\varepsilon_1|e) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi} \quad ; \quad (\varepsilon_2|e) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi x\cos x\mathrm{d}x = -2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad ; \quad \|e\|^2 = \int_0^\pi x^2\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{3}\ ;$$

enfin,

$$m = \|e\|^2 - (\varepsilon_1|e)^2 - (\varepsilon_2|e)^2 = \frac{\pi^3}{3} - 2\pi - \frac{8}{\pi}\ .$$

---

14. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $I(a,b) = \displaystyle\int_0^1 (ax + b - \ln x)^2\ \mathrm{d}x$. Déterminer le minimum de $I(a,b)$ lorsque (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$.

- -

Soit $E = L^2(]0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues et de carré intégrable sur l'intervalle $]0,1]$, à valeurs réelles. On munit cet espace vectoriel du produit scalaire défini par $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\ g(x)\ \mathrm{d}x$, c'est ainsi un espace préhilbertien. Soient les fonctions $u : x \mapsto x$, $v : x \mapsto 1$ et $f : x \mapsto \ln(x)$ sur $]0,1]$, elles appartiennent à E: c'est évident pour les deux premières qui sont prolongeables en des fonctions continues sur le segment $[0,1]$. Par croissances comparées, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\,(\ln x)^2 = 0$, donc $(\ln x)^2 = o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big)$ lorsque x tend vers 0^+, ce qui garantit que la fonction $f = \ln$ est de carré intégrable sur $]0,1]$.

On a alors $I(a,b) = \|au + bv - f\|^2$, et rechercher le minimum de cette expression revient à rechercher la distance minimale du "vecteur" f à un "vecteur" de la forme $au + bv$, c'est-à-dire décrivant le plan vectoriel $P = \mathrm{Vect}(u,v)$. Finalement,

$$m = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} I(a,b) = d(f,P)^2 = \|f - p_P(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|p_P(f)\|^2$$

selon des formules du cours (c'est essentiellement la relation de Pythagore). Si l'on dispose d'une base orthonormale (e_0,e_1) du plan P, on aura alors $p_P(f) = (e_0|f)e_0 + (e_1|f)e_1$, puis

$$\textbf{(*)} \quad : \quad \|p_P(f)\|^2 = (e_0|f)^2 + (e_1|f)^2\ .$$

Passons aux calculs: il s'agit donc d'orthonormaliser la base (v,u) du plan P et de calculer quelques produits scalaires, autrement dit des intégrales.

C'est parti pour le schmidtage: on a $\|v\|^2 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t = 1$, donc $e_0 = v$, c'est-à-dire $e_0(x) = 1$.

Puis $(e_0|u) = (v|u) = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, donc on va poser $\varepsilon_1 = u - p_v(u) = u - (v|u)v = u - \dfrac{1}{2}v$, soit la fonction $x \mapsto x - \dfrac{1}{2}$. On a $\|\varepsilon_1\|^2 = \displaystyle\int_0^1 \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}$, puis $e_1 = \dfrac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|} = 2\sqrt{3}\,\varepsilon_1$, donc $e_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$.

De **(*)** ci-dessus, on déduit

$$\|p_P(f)\|^2 = \Big(\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x\Big)^2 + 3\,\Big(\int_0^1 (2x-1)\,\ln x\,\mathrm{d}x\Big)^2 = 1 + 3\times\frac{1}{4} = \frac{7}{4}\,,$$

puis $m = \min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} I(a,b) = \|f\|^2 - \|p_P(f)\|^2 = \displaystyle\int_0^1 (\ln x)^2\,\mathrm{d}x - \frac{7}{4} = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$.

---

15. L'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire $(A|B) = \mathrm{tr}(A^\top B)$. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan constitué des matrices de trace nulle. Déterminer la distance $d(J,\mathcal{H})$.

- -

L'hyperplan $\mathcal{H}$ est constitué des matrices M telles que $\mathrm{tr}(I_n^\top M) = 0$, autrement dit telles que $(I_n|M) = 0$. L'orthogonal de l'hyperplan $\mathcal{H}$ est donc la droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(I_n)$ constituée des “matrices scalaires”. Autrement dit, un “vecteur” unitaire normal à cet hyperplan $\mathcal{H}$ est la matrice $N = \dfrac{I_n}{\|I_n\|} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,I_n$. On en déduit, d'après le cours, que

$$d(J,\mathcal{H}) = \big\|p_D(J)\big\| = \big\|(N|J)\,N\big\| = \big|(N|J)\big| = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{tr}(J) = \sqrt{n}\,.$$

Projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien

16. On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$, muni du produit scalaire défini par $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k b_k$ si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^n b_k X^k$. Déterminer le projeté orthogonal du polynôme constant $P_0 = 1$ sur l'hyperplan $H = \big\{P \in E \mid P(1) = 0\big\}$.

- -

On a $H = \Big\{P = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X] \;\Big|\; a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0\Big\}$, donc un “vecteur” normal à l'hyperplan H est le polynôme $N = 1 + X + \cdots + X^n$. Pour avoir un vecteur normal unitaire (i.e. de norme 1), on considère le polynôme $U = \dfrac{N}{\|N\|} = \dfrac{N}{\sqrt{n+1}}$. Alors $H^\perp = D = \mathrm{Vect}(U)$ dans l'espace euclidien E. Le projeté orthogonal de $P_0 = 1$ sur D est donné par la formule bien connue

$$p_D(P_0) = (U|P_0)\,U = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,\frac{N}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{n+1}(1 + X + \cdots + X^n)\,.$$

Enfin, P et H étant supplémentaires orthogonaux dans E, on a

$$p_H(P_0) = P_0 - p_D(P_0) = 1 - \frac{1}{n+1}N = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} X^k \ .$$

---

17. Soit p un projecteur dans un espace euclidien E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leq \|x\|$.

- -

Posons $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \operatorname{Ker} p$. On a alors $E = F \oplus G$, et p est le projecteur sur F parallèlement à G. Dire que p est un projecteur orthogonal signifie que $G = F^\perp$.

• Si p est un projecteur orthogonal, on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout x de E, c'est du cours, c'est l'**inégalité de Bessel**. Sa preuve est simple: on écrit $x = p(x) + \big(x - p(x)\big)$, avec $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in G = F^\perp$, ces deux vecteurs sont donc orthogonaux et la relation de Pythagore donne $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$.

• Si p vérifie la relation $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout x, choisissons x appartenant à $G^\perp$. Comme $p(x) - x \in G = \operatorname{Ker} p$, ces deux vecteurs sont orthogonaux et de nouveau Pythagore nous donne

$$\|p(x)\|^2 = \big\|x + \big(p(x) - x\big)\big\|^2 = \|x\|^2 + \|p(x) - x\|^2 \ .$$

L'hypothèse $\|p(x)\| \leq \|x\|$ entraîne alors que $\|p(x) - x\|^2 \leq 0$, ce qui n'est possible que si $p(x) - x = 0_E$, c'est-à-dire si $x \in F$. On a ainsi prouvé l'inclusion $G^\perp \subset F$. Comme $G^\perp$ et F sont tous deux des supplémentaires de G, on a d'autre part égalité des dimensions, donc $G^\perp = F$, puis $(G^\perp)^\perp = F^\perp$, soit $G = F^\perp$, ce qu'il fallait démontrer.

18.a. Soit p un projecteur orthogonal dans un espace euclidien E. Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$ et $\big(p(x)|x\big) \geq 0$. Dans quel cas a-t-on $\big(p(x)|x\big) = 0$?

b. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E. Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme $f = p \circ q$ appartiennent à $[0,1]$.

- -

a. • Si p est le projecteur orthogonal sur le sous-espace F, alors $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$, donc ces deux vecteurs sont orthogonaux et la relation de Pythagore s'applique :

$$\|x\|^2 = \big\|p(x) + \big(x - p(x)\big)\big\|^2 = \big\|p(x)\big\|^2 + \big\|x - p(x)\big\|^2 \geq \big\|p(x)\big\|^2 \ ;$$

on a donc $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout x.

• On a $\big(p(x)|x\big) = \big(p(x)|p(x)\big) + \big(p(x)|x - p(x)\big) = \|p(x)\|^2 \geq 0$, puisque les vecteurs $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux. De plus, $\big(p(x)|x\big) = 0 \iff p(x) = 0 \iff x \in F^\perp$.

b. Soit λ une valeur propre de $f = p \circ q$, soit x un vecteur propre associé : $f(x) = \lambda x$ et $x \neq 0$.

• On a $\|f(x)\| = \big\|p\big(q(x)\big)\big\| \leq \big\|q(x)\big\| \leq \|x\|$ d'après **a.**, donc $|\lambda|\ \|x\| \leq \|x\|$, et $|\lambda| \leq 1$, autrement dit $\lambda \in [-1,1]$.

• On a aussi $\big(f(x)|q(x)\big) = \big(p\big(q(x)\big)|q(x)\big) = \big\|p\big(q(x)\big)\big\|^2 = \|f(x)\|^2 \geq 0$, mais

$$\big(f(x)|q(x)\big) = \big(\lambda\, x|q(x)\big) = \lambda\,\big(x|q(x)\big) = \lambda\,\|q(x)\|^2 \ .$$

Donc $\lambda\,\|q(x)\|^2 \geq 0$; si $q(x)=0$, alors $f(x)=p\big(q(x)\big)=0$ donc $\lambda=0$; sinon, $\|q(x)\|^2>0$ donc $\lambda \geq 0$. Dans tous les cas, on déduit $\lambda \in [0,1]$.

---

19. Soit H un hyperplan d'un espace euclidien E, soit u un vecteur de E n'appartenant pas à H, soit n un vecteur normal à H. On note p le projecteur sur H parallèlement à $D=\mathrm{Vect}(u)$. Pour tout $x \in E$, exprimer $p(x)$ à l'aide des vecteurs x, n et u.

- -

Comme u est un vecteur de E n'appartenant pas à l'hyperplan H, on sait que la droite $D=\mathrm{Vect}(u)$ est un supplémentaire de H dans E. Tout vecteur x de E admet donc une unique décomposition en $x=h+\lambda u$ avec $h \in H$ et λ réel, et on a alors $p(x)=h$.

Il suffit de faire le produit scalaire avec n. Comme $(n|u)=0$, cela donne

$$(n|x)=(n|h+\lambda u)=(n|h)+\lambda\,(n|u)=\lambda\,(n|u)$$

donc $\lambda=\dfrac{(n|x)}{(n|u)}$. *En effet,* $(n|u)$ *est non nul puisque* $u \notin H$. Finalement,

$$p(x)=h=x-\frac{(n|x)}{(n|u)}\,u\ .$$

Remarque. J'ai supprimé les hypothèses que u et n sont unitaires, qui ne servent à rien!

Isométries. Matrices orthogonales.

20. Montrer que les endomorphismes orthogonaux d'un espace euclidien E qui sont diagonalisables sont les symétries orthogonales.

- -

• Soit $u \in \mathrm{O}(E)$, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1,1\}$. Si u est diagonalisable, l'endomorphisme u admet alors comme polynôme annulateur $(X-1)(X+1)$, donc $u^2-\mathrm{id}_E=0$ et u est une symétrie. Enfin, si une symétrie u est une isométrie vectorielle, alors c'est une symétrie orthogonale: en effet, soient $F=\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E)$ et $G=\mathrm{Ker}(u+\mathrm{id}_E)$, on a alors $E=F\oplus G$ et u est la symétrie "par rapport à F et parallèlement à G". Si on prend $y \in F$ et $z \in G$, on a $(y|z)=\big(u(y)|-u(z)\big)=-\big(u(y)|u(z)\big)=-(y|z)$ par conservation du produit scalaire, donc $(y|z)=0$. Ainsi, $G \subset F^\perp$ et, par des arguments de dimensions, $G=F^\perp$, ce qui prouve que u est une "symétrie orthogonale".

• Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie orthogonale, alors u est une isométrie vectorielle (un automorphisme orthogonal): en effet, si u est la symétrie orthogonale par rapport à F, si $x \in E$, on a $x=y+z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$, puis $u(x)=y-z$, et enfin, les vecteurs y et z étant orthogonaux, de Pythagore, on déduit que $\|x\|^2=\big\|u(x)\big\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2$, ainsi u conserve la norme. De plus, u vérifie $u^2=\mathrm{id}_E$, donc admet pour polynôme annulateur $(X-1)(X+1)$, qui est scindé à racines simples, donc u est diagonalisable.

21*. Déterminer les matrices orthogonales de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

- -

Soit $A=(a_{i,j})$ une telle matrice.

Si j et k sont deux indices distincts dans $[\![1,n]\!]$, alors les colonnes C_j et C_k sont orthogonales, i.e. $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,k} = 0$. Mais les termes de cette somme étant tous positifs, ils sont donc tous nuls. On a donc obtenu

$$\textbf{(*)} \qquad \forall (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3 \qquad j \neq k \Longrightarrow a_{i,j}a_{i,k} = 0\ .$$

On en déduit que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la i-ème ligne comporte exactement un coefficient non nul. En effet, elle en comporte au moins sinon la matrice A ne serait pas inversible. Si $j_0 \in [\![1,n]\!]$ est tel que $a_{i,j_0} \neq 0$, alors la relation **(*)** entraîne que tous les autres coefficients de la ligne i sont nuls. Ce coefficient a_{i,j_0} vaut nécessairement 1 puisqu'il doit être positif et que chaque ligne est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$.

On peut maintenant définir une application $\sigma : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telle que, pour tout i, le seul coefficient non nul de la i-ème ligne soit $a_{i,\sigma(i)}$. Cette application est injective puisque, si l'on avait $\sigma(i) = \sigma(i')$ avec $i \neq i'$, alors la colonne numéro $\sigma(i)$ comporterait deux coefficients non nuls, ce qui est aussi impossible (même raisonnement que celui fait sur les lignes). Elle est donc bijective, et c'est une permutation de l'ensemble $[\![1,n]\!]$.

Les matrices ainsi obtenues sont appelées **matrices de permutation** et elles sont bien sûr au nombre de $n!$. Réciproquement, il est immédiat que ces matrices conviennent.

---

22. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathrm{O}(n)$. Montrer que $\sum_{i,j} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$ et $\left|\sum_{i,j} a_{ij}\right| \leq n$. *On pourra utiliser le vecteur* $U = (1,1,\cdots,1)$ *de* $\mathbb{R}^n$.

- -

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique : si $X = (x_1,\cdots,x_n)$ et $Y = (y_1,\cdots,y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a alors $|(X|Y)| \leq \|X\|\ \|Y\|$, ou encore $\left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$. En particulier, si on prend pour Y le vecteur $U = (1,\cdots,1)$, on obtient $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$. Et si l'on remplace le vecteur X par le vecteur $X' = (|x_1|,\cdots,|x_n|)$, on obtient $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$, ou encore $\|X\|_1 \leq \sqrt{n}\ \|X\|_2$ (*normes usuelles sur* $\mathbb{R}^n$).

Notons C_1, $\cdots$, C_n les vecteurs-colonnes de la matrice A, ainsi $C_j = (a_{1j},\cdots,a_{nj}) \in \mathbb{R}^n$; la matrice A étant orthogonale, on sait que la somme des carrés des coefficients de chaque colonne vaut 1, autrement dit $\|C_j\|_2 = 1$ pour tout j, donc par Cauchy-Schwarz, on a $\|C_j\|_1 \leq \sqrt{n}$, d'où

$$\sum_{i,j} |a_{i,j}| = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|\right) = \sum_{j=1}^{n} \|C_j\|_1 \leq n\sqrt{n}\ .$$

D'autre part, posons $V = (v_1,\cdots,v_n) = AU$, on vérifie que $v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$: la i-ième coordonnée du vecteur V est la somme des coefficients de la i-ième ligne de la matrice A. On a, toujours par Cauchy-Schwarz,

$$\Big|\sum_{i,j} a_{i,j}\Big| = \Big|\sum_{i=1}^{n} w_i\Big| \leq \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{1/2} = \sqrt{n}\,\|V\|_2\ .$$

Or, $\|V\|_2 = \|AU\|_2 = \|U\|_2 = \sqrt{n}$: en effet, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A est orthogonal, donc conserve la norme (euclidienne) des vecteurs, ou encore, plus formellement,

$$\|V\|_2^2 = V^\top V = (AU)^\top\,(AU) = U^\top A^\top AU = U^\top U = \|U\|_2^2$$

puisque $A^\top A = I_n$. On en déduit la deuxième inégalité demandée.

---

23. Soient M et N deux matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'égalité $M^\top M = N^\top N$ a lieu si et seulement s'il existe une matrice orthogonale U telle que $M = UN$.

- -

• Si $M = UN$ avec U orthogonale, alors $M^\top M = (UN)^\top UN = N^\top U^\top UN = N^\top N$, puisque $U^\top U = I_n$.

• Réciproquement, si $M^\top M = N^\top N$, posons $U = MN^{-1}$, alors

$$U^\top = (N^{-1})^\top M^\top = (N^\top)^{-1}M^\top\ ,$$

on a alors

$$U^\top U = (N^\top)^{-1}M^\top MN^{-1} = (N^\top)^{-1}N^\top NN^{-1} = I_n\ ,$$

donc U est orthogonale et $M = UN$, ce qu'il fallait démontrer.

24*. Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.

a. Montrer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs, dont les blocs diagonaux sont de la forme suivante:

$$(1) \qquad \text{ou} \qquad (-1) \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\ ,\ \text{avec } \theta \in \mathbb{R}\ .$$

b. En déduire que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, et que ses valeurs propres sont des nombres complexes de module 1.

- -

a. On va commencer par montrer un résultat qui est une traduction en termes d'endomorphismes de cet énoncé. **Soit u une isométrie vectorielle dans un espace euclidien E. Alors on peut décomposer E en une somme directe orthogonale de droites et de plans stables par u.** En effet, montrons tout d'abord un "lemme":

Lemme. **Si u est une isométrie vectorielle dans un espace euclidien E, alors il existe une droite ou un plan stable par u.**

Preuve du lemme. Comme $\chi_u \in \mathbb{R}[X]$, on peut le décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, qui sont de degré 1 ou 2, soit $\chi_u = \prod_{i=1}^{k} P_i$ avec $P_i \in \mathbb{R}[X]$ irréductible. Alors:

- si l'un des facteurs P_i est de degré 1, soit $P_{i_0} = X - \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λ est valeur propre de u, et la droite engendrée par un vecteur propre associé est stable par u ;

- sinon, tous les facteurs P_i sont de degré deux et le théorème de Cayley-Hamilton nous dit que $\chi_u(u) = \prod_{i=1}^{k} P_i(u) = 0$ (endomorphisme nul), ce qui entraîne que l'un au moins des endomorphismes $P_{i_0}(u)$ est non bijectif. Soit alors $x \in \operatorname{Ker}\big(P_{i_0}(u)\big)$ non nul, le plan $P = \operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big)$ est alors stable par u puisque $\deg(P_{i_0}) = 2$ (vérification laissée au lecteur).

On peut remarquer que cette démonstration s'applique en fait à tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

On montre maintenant que E est somme directe orthogonale de droites et de plans stables par u, par récurrence forte sur $n = \dim(E)$.

- pour $n = 1$ ou $n = 2$ c'est évident ;

- soit $n \geq 3$, supposons la propriété vraie dans tout espace euclidien de dimension strictement inférieure à n, soit u une isométrie vectorielle dans un espace euclidien de dimension n, soit F un s.e.v. de dimension 1 ou 2 stable par u (il en existe d'après le lemme), on sait que $F^\perp$ est aussi stable par u, notons v l'endomorphisme induit. Comme v est une isométrie vectorielle de $F^\perp$ avec $\dim(F^\perp) < n$, l'hypothèse de récurrence permet de décomposer $F^\perp$ en une somme directe orthogonale de droites et de plans stables par v, donc aussi par u: $F^\perp = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{1 \leq i \leq m}} F_i$. On a donc enfin $E = F^\perp \overset{\perp}{\bigoplus} F = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{1 \leq i \leq m+1}} F_i$ en posant $F_{m+1} = F$, ce qui achève la récurrence.

Soit maintenant $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Si u est l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ canoniquement associé, alors u est une isométrie vectorielle pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$, on peut donc décomposer $E = \mathbb{R}^n$ en une somme directe orthogonale de droites et de plans stables par u, soit $E = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{1 \leq i \leq m}} F_i$. Notons $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E adaptée à cette décomposition, i.e. obtenue par concaténation de bases orthonormales $\mathcal{B}_i$, $1 \leq i \leq m$, dans chaque sous-espace F_i. Soit u_i l'endomorphisme induit par u sur F_i. Si $\dim(F_i) = 1$, alors $u_i = \pm \operatorname{id}_{F_i}$ est représenté par la matrice $(\pm 1) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Si $\dim(F_i) = 2$, deux cas se présentent:

- si u_i est une isométrie vectorielle indirecte de F_i (une réflexion), c'est une symétrie orthogonale, elle est donc orthogonalement diagonalisable et est représentée par la matrice $\operatorname{diag}(1, -1)$ dans une certaine base orthonormale du plan F_i ;

- si u_i est une isométrie vectorielle directe de F_i (une rotation), elle est représentée dans toute base orthonormale de F_i par une matrice de la forme $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Ceci achève la preuve.

b. La matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ étant diagonalisable sur $\mathbb{C}$ avec $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ pour valeurs propres, le résultat annoncé en découle immédiatement.

25.a. Soit $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale telle que $M + M^\top = 2I_n$. Montrer que $M = I_n$.

b. Soient A et B deux matrices orthogonales distinctes dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$[A, B] \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A, B\} .$$

- -

a. Posons $M = (a_{i,j})$. La relation $M + M^\top = 2I_n$ donne en particulier $2a_{j,j} = 2$ pour tout j, les coefficients diagonaux $a_{j,j}$ de la matrice M sont donc tous égaux à 1. Comme, pour tout j, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = \|C_j\|^2 = 1$ (la somme des carrés des coefficients de la j-ème colonne vaut 1), on en déduit que les autres coefficients (non diagonaux) de cette colonne sont nuls. Donc $A = I_n$.

b. Soient A et B deux matrices orthogonales. Soit $M \in [A, B]$, alors $M = (1-\lambda)A + \lambda B$ avec $\lambda \in [0, 1]$. Si on suppose M orthogonale, alors $M^\top M = I_n$, soit

$$\Big((1-\lambda)A + \lambda B\Big)^\top \Big((1-\lambda)A + \lambda B\Big) = I_n \ ,$$

$$\text{i.e.} \qquad (1-\lambda)^2\, A^\top A + \lambda(1-\lambda)\,(A^\top B + B^\top A) + \lambda^2\, B^\top B = I_n \ ,$$

$$\text{i.e.} \qquad (1-\lambda)\lambda\,(A^\top B + B^\top A) = 2\,\lambda(1-\lambda)\, I_n \ ,$$

$$\text{i.e.} \qquad (1-\lambda)\lambda\,\big[(A^\top B + B^\top A) - 2\, I_n\big] = 0 \ .$$

On en déduit que:

- soit $\lambda = 0$, auquel cas $M = A$;

- soit $\lambda = 1$, auquel cas $M = B$;

- soit $\lambda \in]0, 1[$, auquel cas $A^\top B + B^\top A = 2I_n$, i.e. $(A^\top B) + (A^\top B)^\top = 2I_n$ et, comme la matrice $A^\top B = A^{-1}B$ est orthogonale, on déduit du **a.** que $A^\top B = A^{-1}B = I_n$, soit $A = B$.

L'improbable (mais toujours bienvenu) lecteur conclura.

26*. Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille de n vecteurs dans un espace euclidien orienté de dimension n. Montrer que

$$\big|[x_1, \cdots, x_n]\big| \le \prod_{k=1}^{n} \|x_k\| \ .$$

Si la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre, on pourra introduire son orthonormalisée.

- -

Si la famille $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ est liée, alors le produit mixte $[x_1, \cdots, x_n]$ est nul, et l'inégalité à démontrer est triviale.

Sinon, $\mathcal{X}$ est une base de E, notons $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ son orthonormalisée. Rappelons qu'il résulte du procédé de Gram-Schmidt que la matrice de passage $P_{\mathcal{E},\mathcal{X}}$ de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{X}$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. Ces coefficients diagonaux sont par ailleurs les produits scalaires $(e_i|x_i)$, $1 \le i \le n$. Ensuite,

$$\left|[x_1,\cdots,x_n]\right| = \left|\det_{\mathcal{E}}(\mathcal{X})\right| = \left|\det\left(P_{\mathcal{E},\mathcal{X}}\right)\right| = \prod_{i=1}^{n}\left|(e_i|x_i)\right| \leq \prod_{i=1}^{n}\|x_i\|\ ,$$

la dernière égalité résultant de Cauchy-Schwarz, les vecteurs e_i étant unitaires.

Étude du plan et de l'espace euclidiens

27. Reconnaître les endomorphismes de l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$ représentés par les matrices suivantes:

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

- -

On s'assure d'abord que chacune de ces trois matrices est orthogonale (sur chaque colonne la somme des carrés des coefficients vaut 1, sur deux colonnes distinctes la somme des produits deux à deux des coefficients est nulle). Toutes les trois représentent donc des isométries vectorielles (ou "automorphismes orthogonaux"). Les détails de calcul seront omis, afin de ne pas heurter les plus sensibles de nos lecteurs.

• On vérifie que $\det(A) = +1$, ainsi A est une matrice de rotation (autre que l'identité). L'axe de cette rotation r est $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}(u)$, avec $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Son angle θ est déterminé, au signe près, par la relation $1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}(A) = 0$, donc $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$, puis $\theta = \pm\dfrac{2\pi}{3}$ modulo 2π. Le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est orthogonal à l'axe de la rotation et on calcule le produit mixte

$$\left[e_1, r(e_1), u\right] = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 1 \\ 0 & -\sqrt{6} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{2} > 0\ ,$$

donc l'angle de la rotation est $+\dfrac{2\pi}{3}$ si l'axe de la rotation est orienté par le vecteur u.

• On vérifie que $\det(B) = -1$, ainsi B représente une isométrie indirecte. Par ailleurs, on remarque que la matrice B est symétrique ($B^\top = B$) ; comme elle est aussi orthogonale ($B^\top B = I_3$), on a donc $B^2 = I_3$, donc B représente une symétrie, et donc une réflexion s puisque c'est une isométrie indirecte autre que $-\mathrm{id}_E$. Il ne reste donc plus qu'à déterminer le plan de la réflexion, i.e. le s.e.v. des vecteurs invariants, soit encore $E_1(B) = \mathrm{Ker}(B - I_3)$, il est facile de voir que c'est le plan P d'équation cartésienne $3x - 2y + z = 0$. La matrice B représente donc canoniquement la réflexion par rapport à ce plan.

• On vérifie que $\det(C) = -1$, ainsi C représente une isométrie indirecte. La matrice C n'est pas symétrique, donc ne vérifie pas $C^2 = I_3$, ce n'est donc pas une matrice de symétrie (réflexion), il s'agit alors d'une "antirotation" (ou encore composée d'une réflexion

s et d'une rotation r dont on peut choisir l'axe orthogonal au plan de la réflexion). On vérifie que l'ensemble des vecteurs anti-invariants (i.e. transformés en leurs opposés), soit $\mathrm{Ker}(C+I_3)$, est la droite $D=\mathrm{Vect}(u)$, avec $u=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Cette droite D est alors l'axe de la rotation r. Son angle θ est déterminé, au signe près, par la relation $2\cos\theta-1=\mathrm{tr}(C)$, donc $\cos\theta=-\dfrac{7}{9}$ et $\theta=\pm\,\mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{7}{9}\right)$. Le vecteur $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est orthogonal à l'axe D, donc appartient au plan P de la réflexion, et

$$[e_1,Ce_1,u]=\frac{1}{9}\begin{vmatrix}1&-7&0\\0&4&1\\0&-4&1\end{vmatrix}=\frac{8}{9}>0\ ,$$

donc $\theta=+\,\mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{7}{9}\right)$ si l'axe D est orienté par le choix du vecteur directeur u.

---

28. Soit u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$, soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall x\in\mathbb{R}^3\qquad f(x)=x+(x|u)\,u+\sqrt{3}\,x\wedge u\ .$$

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

b. Est-il orthogonal ?

c. Interprétation géométrique de f.

- -

a. Pure formalité! (résulte essentiellement de la linéarité à gauche du produit scalaire et du produit vectoriel).

b. On peut observer que $f(u)=2u$, donc $2=\|f(u)\|\neq\|u\|=1$ et f ne conserve pas la norme, $f\notin\mathrm{O}(E)$. Mais on peut aussi approfondir un peu la question en notant que, pour tout $x\in E$, on a

$$\begin{aligned}\|f(x)\|^2&=\Big(x+(x|u)\,u+\sqrt{3}\,x\wedge u\ \Big|\ x+(x|u)\,u+\sqrt{3}\,x\wedge u\Big)\\&=\|x\|^2+(x|u)^2\|u\|^2+3\,\|x\wedge u\|^2+2(x|u)(x|u)+2\sqrt{3}\big(x|x\wedge u\big)+2\sqrt{3}(x|u)\big(u|x\wedge u\big)\\&=\|x\|^2+3\,(x|u)^2+3\,\|x\wedge u\|^2\\&=4\,\|x\|^2\end{aligned}$$

en utilisant le fait que le vecteur $x\wedge u$ est orthogonal à u et à x, et la relation de Laplace $\|x\wedge u\|^2=\|x\|^2\|u\|^2-(x|u)^2$. On a donc $\|f(x)\|=2\|x\|$ pour tout vecteur x de E. En posant $r=\dfrac{1}{2}f=\left(\dfrac{1}{2}\,\mathrm{id}_E\right)\circ f$, on a alors $\|r(x)\|=\|x\|$ pour tout x, donc r est une isométrie. On a ainsi $f=2r=\big(2\,\mathrm{id}_E\big)\circ r=r\circ\big(2\,\mathrm{id}_E\big)$: l'endomorphisme f est la composée commutative d'une isométrie et de l'homothétie de rapport 2.

c. Construisons une base orthonormale directe (BOND) adaptée au problème. Le vecteur u est unitaire ; en choisissant un vecteur v unitaire et orthogonal à u, puis en posant $w=u\wedge v$,

alors $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une BOND. Les images des vecteurs de cette base se calculent sans opposer de résistance, ce qui permet de construire la matrice, on a donc $f(u) = 2u$, $f(v) = v - \sqrt{3}w$ et $f(w) = w + \sqrt{3}v$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. On observe que $\dfrac{1}{2}M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \\ 0 & \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) & \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$.
Donc $f = h \circ r = r \circ h$ est la composée de l'homothétie $h = 2\,\mathrm{id}_E$ de rapport 2 et de la rotation r d'axe $D = \mathrm{Vect}(u)$ (orienté par u) et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

---

29. Soit E un espace euclidien, soit v un vecteur de E non nul, soit λ un réel non nul. On considère l'endomorphisme f de E défini par

$$\forall x \in E \qquad f(x) = x + \lambda\,(x|v)\,v\ .$$

a. À quelle condition sur λ et v a-t-on $f \in \mathrm{O}(E)$?

b. Si cette condition est réalisée, déterminer les éléments propres de f et interpréter géométriquement.

- -

a. L'endomorphisme f est orthogonal si et seulement s'il conserve la norme. Or,

$$\|f(x)\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\,(x|v)^2 + \lambda^2\,\|v\|^2\,(x|v)^2\ .$$

Donc

$$f \in \mathrm{O}(E) \iff \forall x \in E \quad \lambda\,(x|v)^2\left(2 + \lambda\,\|v\|^2\right) = 0 \iff \lambda = -\frac{2}{\|v\|^2}\ .$$

b. On a $f(x) = x - 2\,\dfrac{(v|x)}{\|v\|^2}\,v$. En posant $\omega = \dfrac{v}{\|v\|}$, on a $f(x) = x - 2\,(\omega|x)\,\omega$: on reconnaît l'expression de la réflexion d'hyperplan $H = (\mathbb{R}\,v)^{\perp}$. Alors f admet pour valeurs propres 1 et -1, avec pour sous-espaces propres respectivement l'hyperplan H et la droite $D = \mathbb{R}\,v = H^{\perp}$.

---

30. Soit E un espace euclidien orienté de dimension trois, soit f un endomorphisme de E, non nul, tel que

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)\ .$$

Montrer que f est une rotation. *On essaiera de montrer que l'image d'une base orthonormale directe en est une aussi.*

- -

Il suffit de montrer que f transforme une base orthonormale directe (b.o.n.d.) de E en une b.o.n.d. Soit donc $\mathcal{B} = (i, j, k)$ une b.o.n.d. de E, on a alors $k = i \wedge j$, donc $f(k) = f(i) \wedge f(j)$. De même, $f(i) = f(j) \wedge f(k)$ et $f(j) = f(k) \wedge f(i)$. Le produit vectoriel de deux vecteurs étant orthogonal à chacun de ces deux vecteurs, on en déduit déjà que la famille $f(\mathcal{B}) = \big(f(i), f(j), f(k)\big)$ est orthogonale. De plus, aucun de ces trois vecteurs n'est nul (en effet, si l'un était nul, tous seraient nuls d'après les relations écrites ci-dessus, et de $f(i) = f(j) = f(k) = 0$, on déduirait $f = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse), donc la famille $f(\mathcal{B})$ est libre (*famille orthogonale de vecteurs non nuls*), c'est donc déjà une base orthogonale de E.

On sait aussi que, lorsque deux vecteurs u et v sont orthogonaux, alors $\|u \wedge v\| = \|u\|\,\|v\|$. Des relations obtenues ci-dessus, on tire alors

$$\|f(i)\| = \|f(j)\|\,\|f(k)\| \qquad ; \qquad \|f(k)\| = \|f(i)\|\,\|f(j)\| \qquad ; \qquad \|f(j)\| = \|f(k)\|\,\|f(i)\|\ ;$$

en substituant la deuxième égalité dans la première, on obtient $\|f(i)\| = \|f(i)\|\,\|f(k)\|^2$ et, comme $f(i) \neq 0$, on tire $\|f(k)\| = 1$. On obtient de même $\|f(i)\| = \|f(j)\| = 1$: la base $f(\mathcal{B})$ est orthonormale.

Enfin, la relation $f(k) = f(i) \wedge f(j)$ montre que cette base est directe.

Ainsi, f transforme une b.o.n. en une b.o.n., c'est donc un automorphisme orthogonal (*caractérisation, cf. cours*) ; il est direct (rotation) puisqu'il envoie une base directe sur une base directe.

---

31. Soient u et v deux vecteurs non nuls d'un espace E euclidien orienté de dimension trois. Étudier l'endomorphisme $f : x \mapsto u\wedge(v\wedge x)$ (noyau, image, éléments propres, diagonalisation éventuelle).

\- -

La formule de Gibbs, dite aussi "du double produit vectoriel", permet de transformer l'expression :

$$f(x) = (u|x)\,v - (u|v)\,x\ , \tag{1}$$

et cela permet d'organiser la discussion de la façon suivante :

• **Premier cas :** si $(u|v) = 0$

Dans ce cas, on a $f(x) = (u|x)\,v$, donc $f(x)$ est toujours colinéaire à v, ce qui donne déjà $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}\,v$. Par ailleurs, $f(u) = \|u\|^2\,v \neq 0$, donc $f \neq 0$, d'où $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}\,v$. Enfin, $f(x) = 0 \iff (u|x) = 0$, donc $\operatorname{Ker} f = (\mathbb{R}\,u)^{\perp}$.

Toujours dans ce premier cas, comme v est orthogonal à u, on a $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$, donc $f^2 = 0$ (l'endomorphisme f est nilpotent d'indice 2), le polynôme X^2 est annulateur de f donc la seule valeur propre possible de f est 0 ; enfin, $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 2 et c'est le seul sous-espace propre de f, donc f n'est pas diagonalisable ($\dim E = 3$).

• **Deuxième cas :** si $(u|v) \neq 0$

On a alors $f(x) = 0 \iff x = \dfrac{(u|x)}{(u|v)}\,v$, d'où l'on déduit l'inclusion $\operatorname{Ker} f \subset \mathbb{R}\,v$; par ailleurs, $f(v) = u \wedge (v \wedge v) = 0$, donc $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}v$.

Du théorème du rang, on déduit alors que $\operatorname{Im} f$ est de dimension deux, mais la relation $f(x) = u \wedge (v \wedge x)$ montre que $\operatorname{Im} f \subset (\mathbb{R}\,u)^{\perp}$, finalement $\operatorname{Im} f = (\mathbb{R}\,u)^{\perp}$ par égalité des dimensions.

On a déjà $0 \in \operatorname{Sp} f$, et le sous-espace propre $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1.

Par ailleurs, si $x \in \operatorname{Im} f = (\mathbb{R}\, u)^{\perp}$, alors $f(x) = -(u|v)\, x$, donc le réel $-(u|v)$ est valeur propre de f, et le sous-espace propre associé est $\operatorname{Im} f$, de dimension deux. *En toute rigueur, on a prouvé que ce sous-espace propre contient* $\operatorname{Im} f$*, mais comme la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut dépasser trois....*

L'endomorphisme f est donc, dans ce cas, diagonalisable. On peut noter que l'on a alors $f = -(u|v)\, p$, où p est le projecteur sur le plan $(\mathbb{R}\, u)^{\perp}$ parallèlement à la droite $\mathbb{R}\, v$.

---

32. Soit E un espace euclidien orienté de dimension trois, soit a un vecteur non nul de E.

a. Montrer que l'application $f : x \mapsto a \wedge x$ est un endomorphisme de E. Préciser son noyau et son image.

b. Soit $b \in E$. Calculer $a \wedge (a \wedge b)$. Préciser à quelles conditions sur b l'équation $a \wedge x = b$ admet des solutions, et résoudre alors complètement cette équation.

- -

a. La linéarité de f résulte de la linéarité à droite du produit vectoriel. On sait que le produit vectoriel de deux vecteurs est nul lorsque les deux vecteurs sont colinéaires, on en déduit que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(a)$. Par le théorème du rang, on déduit alors que $\operatorname{Im} f$ est de dimension 2. Mais on sait aussi que le produit vectoriel de deux vecteurs est orthogonal à chacun des deux vecteurs, d'où $\operatorname{Im} f \subset \big(\operatorname{Vect}(a)\big)^{\perp}$. Comme les sous-espaces $\operatorname{Im} f$ et $\big(\operatorname{Vect}(a)\big)^{\perp}$ ont la même dimension, ils sont donc égaux.

b. On a $a \wedge (a \wedge b) = (a|b)\, a - \|a\|^2\, b$ par la formule du double produit vectoriel.

L'équation **(E)**: $a \wedge x = b$ s'écrit $f(x) = b$, elle admet des solutions (elle est “compatible”) si et seulement si $b \in \operatorname{Im} f$, autrement dit **si et seulement si** les vecteurs a et b sont orthogonaux d'après l'étude faite en **a.**

Par ailleurs, **(E)** est une équation linéaire (puisque f est linéaire) ; si elle admet des solutions, on obtient donc ses solutions en ajoutant une solution particulière x_0 à la solution générale de l'équation homogène associée **(E0)**. Les solutions de **(E0)**: $f(x) = 0_E$ sont les vecteurs de $\operatorname{Ker} f$ toujours d'après **a.**, et le calcul de double produit vectoriel fait ci-dessus montre que le vecteur $x_0 = -\dfrac{a \wedge b}{\|a\|^2}$ est une solution particulière de **(E)** lorsque a et b sont orthogonaux.

Bilan. L'équation **(E)**: $a \wedge x = b$ admet des solutions si et seulement si les vecteurs a et b sont orthogonaux, et dans ce cas les solutions de **(E)** sont les vecteurs de la forme $x = -\dfrac{a \wedge b}{\|a\|^2} + \lambda a$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Matrices et endomorphismes symétriques. Théorème spectral.

33. Plusieurs petites questions indépendantes:

a. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^{\top}A = I_n$. Montrer que $A = I_n$.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $A + A^{\top}$ est nilpotente. Montrer que A est antisymétrique.

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose que A est "normale" ($AA^\top = A^\top A$) et nilpotente. Montrer que $A = 0$.

- -

a. En transposant la relation $AA^\top A = I_n$, on a $A^\top AA^\top = (I_n)^\top = I_n$, puis

$$A = A\,I_n = A\,(A^\top AA^\top) = (AA^\top A)\,A^\top = I_n\,A^\top = A^\top \ :$$

la matrice A est donc symétrique réelle. On a donc en fait $A^3 = I_n$. Mais, par le théorème spectral, A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, et comme elle admet pour polynôme annulateur $X^3 - 1$, sa seule valeur propre réelle possible est 1. Finalement, A est semblable à la matrice-identité I_n, puis $A = I_n$.

b. La matrice $B = A + A^\top$ est symétrique réelle (évident), elle est donc diagonalisable, et comme elle est nilpotente, sa seule valeur propre est 0. Donc $B = 0$ et $A^\top = -A$.

c. La matrice $B = AA^\top = A^\top A$ est symétrique réelle (*calculer sa transposée!*), donc diagonalisable, et elle est nilpotente: en effet, A est nilpotente donc on a $A^p = 0$ pour un certain entier naturel p, puis $B^p = (AA^\top)^p = A^p\,(A^\top)^p$ puisque A et $A^\top$ commutent, donc $B^p = 0$. On conclut comme en **b.** que $B = 0$. On a donc $A^\top A = 0$, puis $\|A\|^2 = \mathrm{tr}(A^\top A) = 0$, donc A est la matrice nulle. *On a utilisé ici la norme sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *associée au produit scalaire "canonique" défini par* $< M, N >= \mathrm{tr}(M^\top N)$.

---

34. Que dire d'une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 2A^2 + 3A = 0$?

- -

Par le théorème spectral, une telle matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais ses valeurs propres doivent être racines du polynôme annulateur

$$P = X^3 - 2X^2 + 3X = X(X^2 - 2X + 3) = X\left[(X-1)^2 + 2\right] .$$

La seule racine réelle de P est 0, donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$, puis A est semblable à la matrice nulle, puis $A = 0$.

---

35. Diagonaliser, à l'aide d'une matrice de passage orthogonale, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- -

Oui, bon, c'est un exo peu intéressant! On constate que A est symétrique réelle, donc il existe effectivement $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, telles que $A = PDP^{-1} = PDP^\top$. Rechercher P revient à construire une base orthonormale de vecteurs propres. Je me borne à donner les résultats, on trouve trois valeurs propres distinctes, donc il y a trois sous-espaces propres qui sont des droites vectorielles, je signale toutefois que le fait de savoir A symétrique réelle permet, lorsqu'on dispose de deux vecteurs propres unitaires et orthogonaux, de calculer le troisième en faisant le produit vectoriel des deux premiers. On trouve

$$A = PDP^{-1} = PDP^{\top}\ , \qquad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} .$$

---

36. Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $< P, Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

a. Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

b. Soit $\varphi : P \mapsto Q = XP'' + (1 - X)P'$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, symétrique pour ce produit scalaire.

- -

a. D'abord l'intégrale converge: si P et Q sont deux polynômes, par les croissances comparées usuelles, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2\, P(t)\, Q(t)\, e^{-t} = 0$, ce qui garantit l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $t \mapsto P(t)\, Q(t)\, e^{-t}$ et l'existence de $< P, Q >$.

Bilinéarité et symétrie sont de pures formalités.

Pour le caractère défini positif, on a $< P, P >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)^2\, e^{-t}\, \mathrm{d}t \geq 0$ par positivité de l'intégrale. Et, si $< P, P >= 0$, alors la fonction **continue** et positive $t \mapsto P(t)^2\, e^{-t}$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$, ce qui entraîne que le polynôme P a une infinité de racines, donc $P = 0$. On a bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b. La linéarité de φ résulte de la linéarité de la dérivation, donc $\varphi \in \mathcal{L}\big(\mathbb{R}[X]\big)$.

Il faut ensuite vérifier l'égalité $\big\langle \varphi(P), Q \big\rangle = \big\langle P, \varphi(Q) \big\rangle$ pour $(P, Q) \in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2$. Zou, c'est parti!

$$\begin{aligned} \big\langle \varphi(P), Q \big\rangle &= \int_0^{+\infty} \Big(\big(t\, P''(t) + (1-t)\, P'(t) \big)\, e^{-t} \Big) \Big(Q(t) \Big)\, \mathrm{d}t & \text{i.p.p.} \\ &= \Big[\Big(t\, P'(t)\, e^{-t} \Big) \Big(Q(t) \Big) \Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \Big(t\, P'(t)\, e^{-t} \Big) \Big(Q'(t) \Big)\, \mathrm{d}t & \\ &= -\int_0^{+\infty} t\, P'(t)\, Q'(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t\ . & \end{aligned}$$

Commentaires: on a fait une intégration par parties que le lecteur pourra retrouver facilement en s'aidant du parenthésage de ce corrigé ; cette i.p.p. sur $[0, +\infty[$ *est justifiée par la convergence des différents termes, notamment le terme entre crochets est nul.*

On obtient une expression désormais "symétrique en P et Q" (ils sont interchangeables), on trouve donc le même résultat en partant de $\big\langle P, \varphi(Q) \big\rangle$, l'endomorphisme φ est symétrique pour le produit scalaire $< \cdot, \cdot >$.

37. Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme symétrique de E, de valeurs propres (distinctes) λ_1, ..., λ_m, rangées dans l'ordre croissant ($\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m$). Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, notons E_i le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i.

a. Montrer que $\forall x \in E \quad \lambda_1 \|x\|^2 \leq \big(u(x)|x\big) \leq \lambda_m \|x\|^2$.

b. Pour quels vecteurs x l'une des deux inégalités ci-dessus est-elle une égalité ?

c. Soit M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $S = \dfrac{1}{2}\,(M + M^\top)$. On note α (resp. β) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de S. Montrer que toutes les valeurs propres réelles de M appartiennent à l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Qu'en déduit-on lorsque M est antisymétrique ?

- -

a. D'après le théorème spectral, u est diagonalisable donc $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m} E_i$ et on sait aussi que les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux, ce que l'on peut écrire $E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_m$ (c'est une somme directe orthogonale). Soit $x \in E$, on le décompose suivant cette somme directe : $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i$, on a alors $u(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$, puis $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^2$ (relation de Pythagore car les x_i constituent une famille orthogonale) et

$$\big(u(x)|x\big) = \Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \mid \sum_{j=1}^{m} x_j\Big) = \sum_{i,j} \lambda_i (x_i|x_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \|x_i\|^2 \,.$$

Donc $\big(u(x)|x\big) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \|x_i\|^2 \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_1 \|x_i\|^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^2 = \lambda_1 \|x\|^2$; on obtient de même $\big(u(x)|x\big) \leq \lambda_m \|x\|^2$.

b. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
\big(u(x)|x\big) = \lambda_1 \|x\|^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=2}^{m} (\lambda_i - \lambda_1) \|x_i\|^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![2, m]\!] \quad (\lambda_i - \lambda_1) \|x_i\|^2 = 0 \qquad \textbf{(*)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![2, m]\!] \quad \|x_i\|^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in E_1
\end{aligned}$$

(*) car une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul. De même,

$$\big(u(x)|x\big) = \lambda_m \|x\|^2 \iff x \in E_m \,.$$

c. Soit λ une valeur propre réelle de M, soit $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé : $X \neq 0$ et $MX = \lambda X$. La matrice S est symétrique réelle, donc représente canoniquement un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^n$, la question **a.** montre alors que $\alpha \|X\|^2 \leq (SX|X) \leq \beta \|X\|^2$, où $(\cdot|\cdot)$ représente le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ défini par $(X|Y) = X^\top Y$. On a donc

$$\alpha\, X^\top X \le X^\top\, S\, X \le \beta\, X^\top X\ .$$

D'autre part, $X^\top\, S\, X = \dfrac{1}{2}\big(X^\top\, M\, X + X^\top\, M^\top\, X\big) = \dfrac{1}{2}\big(X^\top\,(\lambda X) + (\lambda X)^\top\, X\big) = \lambda\, X^\top X$.
On a finalement $\alpha\, X^\top X \le \lambda\, X^\top X \le \beta\, X^\top X$, avec $X^\top X = \|X\|^2 > 0$, d'où $\lambda \in [\alpha, \beta]$.

Si M est antisymétrique, alors $S = \dfrac{1}{2}\,(M + M^\top) = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \{0\}$.
La seule valeur propre réelle possible pour une matrice antisymétrique réelle est donc 0.

---

38. Soit E un espace euclidien orienté de dimension trois, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme antisymétrique, c'est-à-dire tel que

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \big(u(x)|y\big) = -\big(x|u(y)\big)\ .$$

Montrer qu'il existe un unique vecteur ω de E tel que, pour tout x, on ait $u(x) = \omega \wedge x$.
En déduire qu'il existe une base orthonormale directe de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $k \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}_+$.

- -

• Soit $\mathcal{B} = (i, j, k)$ une base orthonormale directe de E, alors la matrice de u dans cette base est antisymétrique : il existe donc trois réels p, q, r tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$,
on constate alors que, si $x = ai + bj + ck$, on a

$$u(x) = (qc - rb)i + (ra - pc)j + (pb - qa)k = \omega \wedge x\ , \qquad \text{avec} \qquad \omega = pi + qj + rk\ .$$

• Si $\omega = 0$, c'est-à-dire si $u = 0$, la fin de l'exercice est triviale avec $\lambda = 0$.

• Si $\omega \neq 0$, posons $e_3 = \dfrac{\omega}{\|\omega\|}$ et $\lambda = \|\omega\|$, soit e_1 un vecteur unitaire orthogonal à ω, soit $e_2 = e_3 \wedge e_1$; alors $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale directe de E, on vérifie que

$$u(e_1) = \omega \wedge e_1 = \lambda\, e_3 \wedge e_1 = \lambda\, e_2 \quad ; \quad u(e_2) = \lambda\, e_3 \wedge e_2 = -\lambda\, e_1 \quad ; \quad u(e_3) = 0\ ,$$

donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

---

39. Soient u et v deux endomorphismes symétriques d'un espace euclidien E, qui commutent.
Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle u et v sont représentés par des matrices diagonales.

- -

Notons λ_1, $\cdots$, λ_m les valeurs propres **distinctes** de u, et E_1, $\cdots$, E_m les sous-espaces propres associés. Si u et v commutent, les sous-espaces propres E_i de u sont stables par v.
Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, notons v_i l'endomorphisme de E_i induit par v. Chaque v_i est auto-adjoint puisque v l'est, donc par le théorème spectral, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_i$

de E_i constituée de vecteurs propres de v_i (et donc de v), mais les vecteurs de cette base $\mathcal{B}_i$ sont aussi des vecteurs propres de u puisqu'ils sont dans $E_i = E_{\lambda_i}(u)$. La famille de vecteurs $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation des familles $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_m$ est alors une base de E puisque $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i$, orthonormale car chaque $\mathcal{B}_i$ est orthonormale et les E_i sont deux à deux orthogonaux. $\mathcal{B}$ est donc une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres communs aux endomorphismes u et v, c'est ce qu'il fallait construire.

---

40. Soient a et b deux vecteurs non colinéaires dans un espace euclidien E. Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$\forall x \in E \qquad f(x) = (a|x)\, b + (b|x)\, a\ .$$

a. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

b. Montrer que f est diagonalisable.

c. Diagonaliser f.

- -

a. • $x \in \mathrm{Ker}\, f \iff (a|x)\, b + (b|x)\, a = 0_E \iff (a|x) = (b|x) = 0$ car la famille (a, b) est libre. Donc $\mathrm{Ker}\, f = \big(\mathrm{Vect}(a)\big)^{\perp} \cap \big(\mathrm{Vect}(b)\big)^{\perp}$, ou encore $\mathrm{Ker}\, f = \big(\mathrm{Vect}(a,b)\big)^{\perp}$. En français, $\mathrm{Ker}(f)$ est l'orthogonal du plan engendré par les vecteurs a et b.

• De l'expression de $f(x)$, on déduit que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(a, b)$. Par ailleurs, $\mathrm{Ker}\, f$ est de dimension $n-2$ avec $n = \dim(E)$, donc le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$, et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(a, b)$.

b. Vérifions que l'endomorphisme f est autoadjoint: si $x \in E$ et $y \in E$,

$$\big(f(x)|y\big) = \big((a|x)\, b + (b|x)\, a \mid y\big) = (a|x)(b|y) + (b|x)(a|y)$$

et, cette expression étant visiblement symétrique en x et y, on déduit qu'elle est aussi égale à $\big(f(y)|x\big) = \big(x|f(y)\big)$. D'après le théorème spectral, l'endomorphisme f est donc diagonalisable.

c. On sait déjà que $0 \in \mathrm{Sp}(f)$, le sous-espace propre $E_0(f) = \mathrm{Ker}(f) = \big(\mathrm{Vect}(a, b)\big)^{\perp}$ étant de dimension $n-2$. Comme f est autoadjoint, ses sous-espaces propres sont orthogonaux, les vecteurs propres de f pour des valeurs propres autres que 0 doivent être cherchées dans $\big(E_0(f)\big)^{\perp} = \mathrm{Vect}(a, b) = \mathrm{Im}(f)$. *C'est d'ailleurs une propriété générale qu'un vecteur propre d'un endomorphisme f associé à une valeur propre non nulle appartient à* $\mathrm{Im}(f)$. Le plan $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(a, b)$ étant stable par f, on va considérer l'endomorphisme induit u, dont il est facile d'écrire la matrice dans la base $\mathcal{B} = (a, b)$ de ce plan. En effet, $u(a) = f(a) = (a|b)\, a + \|a\|^2\, b$, et $u(b) = f(b) = \|b\|^2\, a + (a|b)\, b$. Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = M = \begin{pmatrix} (a|b) & \|b\|^2 \\ \|a\|^2 & (a|b) \end{pmatrix}\ .$$

On calcule $\chi_u = \chi_M = \big(X - (a|b)\big)^2 - \|a\|^2\|b\|^2 = \big(X - (a|b) - \|a\|\|b\|\big)\big(X - (a|b) + \|a\|\|b\|\big)$. On obtient donc deux valeurs propres non nulles distinctes $\alpha = (a|b) - \|a\|\|b\|$ et $\beta = (a|b) + \|a\|\|b\|$. Elles sont non nulles car, a et b étant supposés non colinéaires, on n'est pas dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ici plus précisément

$\alpha < 0$ et $\beta > 0$. Un petit calcul élémentaire, laissé à l'improbable lecteur, montre que $E_\alpha(u) = E_\alpha(f) = \mathrm{Vect}\big(\|b\|a - \|a\|b\big)$, et $E_\beta(f) = \mathrm{Vect}\big(\|b\|a + \|a\|b\big)$.

---

41. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que son rang est égal au nombre de valeurs propres non nulles (comptées avec leur ordre de multiplicité) de $A^\top A$.

- -

D'abord, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top A)$. En effet, on a facilement $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^\top A)$, mais on a aussi l'inclusion inverse: si $X \in \mathrm{Ker}(A^\top A)$, alors $A^\top AX = 0$, puis $X^\top A^\top AX = 0$, soit $(AX)^\top(AX) = 0$, donc $\|AX\|^2 = 0$, et enfin $AX = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^\top A)$, d'où

$$\mathrm{rg}(A) = n - \dim \mathrm{Ker}(A) = n - \dim \mathrm{Ker}(A^\top A) = \mathrm{rg}(A^\top A)\ .$$

Ensuite, $A^\top A$ est symétrique réelle, donc diagonalisable: si D est une matrice diagonale semblable à $A^\top A$, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top A) = \mathrm{rg}(D)$ est le nombre de coefficients non nuls sur la diagonale de D, c'est bien le nombre de valeurs propres non nulles (comptées avec leur multiplicité) de $A^\top A$.

---

42. Soit E un espace euclidien.

a. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique positif. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme r symétrique positif tel que $r^2 = u$.

b. Soient u et v des endomorphismes symétriques positifs de E. Démontrer les inégalités

$$0 \leq \mathrm{tr}(u \circ v) \leq (\mathrm{tr}u) \cdot (\mathrm{tr}v)\ .$$

- -

a. Montrons d'abord l'existence: on sait qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle u est représenté par une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, les valeurs propres λ_i (ici non nécessairement distinctes) étant positives ou nulles puisque u est autoadjoint positif. Soit r l'endomorphisme représenté dans la même base $\mathcal{B}$ par la matrice $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$, on a bien sûr $r^2 = u$ puisque $\Delta^2 = D$, et l'endomorphisme r est autoadjoint puisqu'il est représenté dans une base orthonormale par une matrice diagonale (donc symétrique!), et il est positif puisque ses valeurs propres sont les $\sqrt{\lambda_i}$.

Pour l'unicité, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres (ici distinctes) de u, on sait que ce sont des réels positifs ou nuls, notons $E_i = E_{\lambda_i}(u)$ pour tout i. Considérons r endomorphisme symétrique positif tel que $r^2 = u$. Alors r et u commutent, donc les sous-espaces propres E_i de u sont stables par r, notons r_i l'endomorphisme de E_i induit par r. Alors r_i est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien E_i (muni de la restriction du produit scalaire de E), donc il est diagonalisable, mais si α est une valeur propre de r_i, si $x \in E_i$ est un vecteur propre associé, on a $r(x) = r_i(x) = \alpha x$, puis $u(x) = r^2(x) = \alpha^2 x$ donc $\alpha^2 = \lambda_i$ puisqu'on a aussi $u(x) = \lambda_i x$, donc $\alpha = \sqrt{\lambda_i}$ puisque l'on veut que les valeurs propres de r soient positives. Ceci montre que r_i est l'homothétie de rapport $\sqrt{\lambda_i}$ dans l'espace E_i (en effet, r_i est diagonalisable avec une seule valeur propre), autrement dit la restriction de r au sous-espace E_i est entièrement déterminée. Comme un endomorphisme de E est entièrement déterminé par la connaissance de ses restrictions aux sous-espaces E_i

(ceci puisque E est la somme directe des E_i), on a bien prouvé l'unicité de la "racine carrée" symétrique positive de l'endomorphisme u.

b. *Rappelons que, si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale d'un espace euclidien E, si f est un endomorphisme de E, on a* $\mathrm{tr}(f) = \sum_{i=1}^{n} \big(e_i | f(e_i)\big)$.

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale constituée de vecteurs propres de u : $u(e_i) = \lambda_i\, e_i$, avec $\lambda_i \geq 0$. Alors

$$\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u) = \sum_{i=1}^{n} \big(v(u(e_i)) \mid e_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \big(u(e_i) | v(e_i)\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \big(e_i | v(e_i)\big) \ .$$

Comme v est positif, on a $\big(e_i | v(e_i)\big) \geq 0$ pour tout i, donc déjà $\mathrm{tr}(u \circ v) \geq 0$. Enfin,

$$\mathrm{tr}(u \circ v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \big(v(e_i) | e_i\big) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \big(v(e_j) | e_j\big) \right) = \mathrm{tr}(u) \cdot \mathrm{tr}(v) \ .$$

En effet, le second membre de l'inégalité ci-dessus comporte les mêmes termes que le premier membre, auxquels viennent s'ajouter des termes tous positifs, les $\lambda_i \, \big(v(e_j) | e_j\big)$ *avec* $i \neq j$.

---

43. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité). Montrer que $\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

- -

Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Par le théorème spectral, A est semblable à D (avec une matrice de passage orthogonale, mais ce n'est en fait pas utile), i.e. $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En notant $\| \cdot \|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la norme associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ défini par

$$(A|B) = \mathrm{tr}(A^\top B) = \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j} \ ,$$

on a

$$\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \|A\|^2 = \mathrm{tr}(A^\top A) = \mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

puisque A^2 et D^2 sont semblables, et $D^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2)$.

---

44. Soit E un espace euclidien, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique défini positif. Montrer l'inégalité

$$\forall x \in E \qquad \|x\|^4 \leq \big(u(x)|x\big) \, \big(u^{-1}(x)|x\big) \ .$$

Déterminer les cas d'égalité.

- -

Pour $(x, y) \in E^2$, posons $< x, y >= \big(u(x)|y\big)$. Alors $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E.

En effet, la bilinéarité est immédiate. La symétrie résulte du fait que l'endomorphisme u est symétrique. Par ailleurs, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres respectivement associées (elles sont toutes strictement positives). Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ est un vecteur de E, on a

$$< x, x >= \big(u(x)|x\big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i \big| \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq 0$$

et cette somme de termes positifs est nulle si et seulement si chaque terme $\lambda_i x_i^2$ est nul, ce qui entraîne que $x = 0_E$, on a donc prouvé le caractère défini positif de $< \cdot, \cdot >$.

Il est par ailleurs immédiat que $u \in \mathrm{GL}(E)$, d'où l'existence de u^{-1}.

Il suffit alors d'écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce nouveau produit scalaire:

$$\forall x \in E \qquad \big\langle u^{-1}(x), x\big\rangle^2 \ \leq\ \big\langle u^{-1}(x), u^{-1}(x)\big\rangle \, \big\langle x, x\big\rangle \ ,$$

soit

$$\forall x \in E \qquad \|x\|^4 = \big(x|x\big)^2 \leq \big(x|u^{-1}(x)\big)\ \big(u(x)|x\big) \ ,$$

ce qui est l'inégalité demandée, avec égalité si et seulement si les vecteurs $u^{-1}(x)$ et x sont colinéaires, ce qui équivaut encore à la colinéarité des vecteurs x et $u(x)$, et donc au fait que x est un vecteur propre de u (ou est le vecteur nul).

---

45. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique réelle.

a. Montrer que A^2 est symétrique réelle et que $\mathrm{Sp}(A^2) \subset \mathbb{R}_-$.

b. On suppose A inversible. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, à valeurs propres imaginaires pures.

c. Montrer que $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$.

d.* En utilisant **c.**, montrer que le résultat du **b.** est vrai même si A n'est pas inversible.

- -

a. On a $(A^2)^\top = (A^\top)^2 = (-A)^2 = A^2$, donc A^2 est symétrique réelle. Les valeurs propres de A^2 sont donc toutes réelles. En notant $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$, si λ est une valeur propre de A^2 et $Y \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé, on a

$$\begin{aligned} \lambda\,\|Y\|^2 \ &= \ < \lambda Y, Y > = < A^2 Y, Y > = \ (A^2 Y)^\top Y \ = \ Y^\top A^\top A^\top Y \\ &= \ -Y^\top A^\top A Y \ = \ -(AY)^\top A Y \ = \ - < AY, AY > = \ -\|AY\|^2 \ \leq 0 \ , \end{aligned}$$

donc $\lambda \leq 0$.

b. Si A est inversible, alors A^2 l'est aussi, et ses valeurs propres sont alors des réels strictement négatifs, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres (distinctes) de A^2. Comme A^2 est diagonalisable, elle admet pour polynôme annulateur $P = \prod_{\alpha \in \mathrm{Sp}(A^2)} (X - \alpha) = \prod_{k=1}^{m} (X - \lambda_k)$. On a ainsi, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la relation $P(A^2) = 0$, soit $Q(A) = 0$, en introduisant le polynôme Q défini par $Q(X) = P(X^2) = \displaystyle\prod_{k=1}^{m}(X^2 - \lambda_k) = \prod_{k=1}^{m}\big((X - i\,\sqrt{-\lambda_k})\,(X + i\,\sqrt{-\lambda_k})\big)$. Ce polynôme Q est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Enfin, on a $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathcal{Z}(Q)$, les valeurs propres de A sont donc imaginaires pures.

c. L'inclusion $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^2)$ est immédiate.

Si $Y \in \mathbb{R}^n$ appartient à $\mathrm{Ker}(A^2)$, on a $A^2Y = 0$, donc $< A^2Y, Y >= 0$, soit $\|AY\|^2 = 0$ (*cf.* calcul fait en **a.**), donc $Y \in \mathrm{Ker}(A)$. Finalement, $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$.

Notons toutefois une petite ambiguïté: s'agit-il des noyaux de A et A^2 considérées comme matrices réelles (ce sont alors des s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, et c'est ce qui a été prouvé ci-dessus) ou comme matrices complexes (ce sont alors des s.e.v. de $\mathbb{C}^n$, et c'est ce dont on aura besoin pour la question suivante) ? La réponse à cette question sera la même puisqu'on a toujours l'inclusion triviale $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^2)$ et que le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est le même, qu'elle soit considérée comme matrice réelle ou comme matrice complexe.

d. Si A n'est pas inversible, alors elle admet 0 pour valeur propre et il en est de même pour A^2, et en notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes **non nulles** de A^2 (qui sont donc strictement négatives), le polynôme $P = X \displaystyle\prod_{k=1}^{m}(X - \lambda_k)$ annule A^2, donc le polynôme $Q = P(X^2) = X^2\,R(X)$ annule A, avec $R(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{m}(X^2 - \lambda_k)$. On a donc $Q(A) = A^2\,R(A) = 0$, soit $\mathrm{Im}\big(R(A)\big) \subset \mathrm{Ker}(A^2)$ et, de la question **c.**, on déduit que $\mathrm{Im}\big(R(A)\big) \subset \mathrm{Ker}(A)$, soit $A\,R(A) = 0$ et le polynôme XR annule A. Or, le polynôme $XR = X\displaystyle\prod_{k=1}^{m}\big((X - i\sqrt{-\lambda_k})\,(X + i\sqrt{-\lambda_k})\big)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, on déduit donc comme en **b.** que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, avec $\mathrm{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$.

46.a. Soit f un endomorphisme symétrique de E euclidien E. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \big(\mathrm{Ker}(f)\big)^{\perp}$.

b. On suppose f symétrique positif. Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique positif h tel que $h^2 = f$.

c. Soient f et g deux endomorphismes symétriques positifs de E. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}(f)\ \cap\ \mathrm{Ker}(g)\ .$$

d* Toujours avec f et g endomorphismes symétriques positifs, montrer que

$$\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)\ .$$

- -

a. Soient $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $t \in E$ tel que $y = f(t)$, donc

$$\big(x|y\big) = \big(x|f(t)\big) = \big(f(x)|t\big) = (0_E|t) = 0\ .$$

On a ainsi prouvé que $\text{Im}(f) \subset \big(\text{Ker}(f)\big)^{\perp}$. Le théorème du rang donne l'égalité des dimensions, puis la conclusion.

b. Par le théorème spectral, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E constituée de vecteurs propres de f. Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, les valeurs propres λ_i étant positives. Soit h l'endomorphisme de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$. Alors h est symétrique (car représenté dans une b.o.n. par une matrice diagonale, donc symétrique) et $h^2 = f$.

c. L'inclusion $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f+g)$ est triviale. Montrons l'autre!

Soit $x \in \text{Ker}(f+g)$, alors $f(x)+g(x) = 0_E$, donc $\big((f+g)(x)|x\big) = \big(f(x)|x\big) + \big(g(x)|x\big) = 0$. C'est une somme de termes positifs, donc chaque terme est nul: $\big(f(x)|x\big) = \big(g(x)|x\big) = 0$. Si on appelle h un endomorphisme symétrique tel que $h^2 = f$ (question **b.**), on a alors $0 = \big(f(x)|x\big) = \big\|h(x)\big\|^2 = 0$, donc $h(x) = 0_E$ puis $f(x) = 0_E$ et $x \in \text{Ker}(f)$. De même, $x \in \text{Ker}(g)$.

d. L'endomorphisme $f+g$ est symétrique, on a donc

$$\begin{aligned} \text{Im}(f+g) &= \big(\text{Ker}(f+g)\big)^{\perp} = \big(\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)\big)^{\perp} \\ &= (\text{Ker}\, f)^{\perp} + (\text{Ker}\, g)^{\perp} = \text{Im}(f) + \text{Im}(g) \ . \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que, si V et W sont deux sous-espaces d'un espace euclidien E, on a $(V \cap W)^{\perp} = V^{\perp} + W^{\perp}$. En effet, il est facile de prouver que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ (ceci est vrai plus généralement dans un espace préhilbertien). En dimension finie, on a, de plus, $\big(F^{\perp}\big) = F$, donc $V \cap W = \big(V^{\perp}\big)^{\perp} \cap \big(W^{\perp}\big)^{\perp} = \big(V^{\perp} + W^{\perp}\big)^{\perp}$, puis

$$(V \cap W)^{\perp} = \Big(\big(V^{\perp} + W^{\perp}\big)^{\perp}\Big)^{\perp} = V^{\perp} + W^{\perp} \ .$$

Variante: L'inclusion $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ est facile.

Soit maintenant $y \in \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$, on a donc $y = u + v$ avec $u \in \text{Im}(f) = (\text{Ker}\, f)^{\perp}$ et $v \in \text{Im}(g) \in (\text{Ker}\, g)^{\perp}$ en utilisant **a.** Soit alors $x \in \text{Ker}(f+g)$, on a donc $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$ d'après **c.**, puis $(y|x) = (u|x) + (v|x)$ et chacun des deux termes est nul. On a ainsi prouvé que $y \in \big(\text{Ker}(f+g)\big)^{\perp}$, soit $y \in \text{Im}(f+g)$ d'après **a.** (l'endomorphisme $f+g$ étant lui aussi symétrique). Cela prouve donc $\text{Im}(f) + \text{Im}(g) \subset \text{Im}(f+g)$.

---

47. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

a. Montrer que, pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^{\top}AX = 0$.

b. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $M = A + S$ est inversible.

- -

a. L'expression $X^{\top}AX$ est un scalaire, elle est donc égale à sa transposée. Sachant que $A^{\top} = -A$, on obtient

$$X^{\top}AX = (X^{\top}AX)^{\top} = X^{\top}A^{\top}X = -X^{\top}AX \ ,$$

donc $X^{\top}AX = 0$.

b. Si S est une matrice symétrique définie positive, on a $X^{\top}SX > 0$ pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **non nul**.

Maintenant, si X est un vecteur **non nul**, on a $X^\top MX = X^\top AX + X^\top SX = X^\top SX > 0$, ce qui entraîne $MX \neq 0$. Ainsi on vient de montrer que $\mathrm{Ker}(M) = \{0\}$, la matrice $M = A+S$ est donc inversible.

48.a. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont positifs ou nuls. Montrer que

$$\forall V \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{tr}(DV) \leq \mathrm{tr}(D)\ .$$

b. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer que

$$\forall U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{tr}(AU) \leq \mathrm{tr}(A)\ .$$

- -

a. Notons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, les λ_i étant positifs. Posons $V = (v_{i,j})_{i,j}$ et $DV = (w_{i,j})_{i,j}$. On a alors $w_{i,j} = \lambda_i\, v_{i,j}$ (multiplier V à gauche par la matrice diagonale D revient à multiplier, pour tout i, la i-ème ligne de V par le coefficient λ_i). La matrice V étant orthogonale, ses coeeficients sont majorés par 1 en valeur absolue (par exemple parce que chaque colonne de V est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$). Donc, les coefficients λ_i étant positifs,

$$\mathrm{tr}(DV) = \sum_{i=1}^n w_{i,i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_{i,i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i\, |v_{i,i}| \leq \sum_{i=1} \lambda_i = \mathrm{tr}(D)\ .$$

b. D'après le théorème spectral, A est diagonalisable et $A = PDP^{-1} = PDP^\top$, avec $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale à coefficients diagonaux positifs. Alors, en utilisant **a.**,

$$\mathrm{tr}(AU) = \mathrm{tr}(PDP^\top U) = \mathrm{tr}(DP^\top UP) = \mathrm{tr}(DV) \leq \mathrm{tr}(D) = \mathrm{tr}(A)$$

en posant $V = P^\top UP \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ car c'est un produit de matrices orthogonales, la dernière égalité est vraie car les matrices A et D sont semblables.