Isométries en dimensions 2 et 3

Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, automorphismes directs et indirects.

Produit mixte $[x_1, \cdots, x_n]$ de n vecteurs dans un espace euclidien orienté de dimension n.

Produit vectoriel dans un espace euclidien orienté de dimension trois: propriétés, notamment formule du double produit vectoriel, identité de Lagrange, application à la construction de bases orthonormales directes.

Explicitation des groupes $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Définition de la rotation d'angle θ dans un plan euclidien orienté, notion d'angle orienté noté (x, y) de deux vecteurs non nuls x et y, expression de $(x|y)$ et de $[x, y]$ à l'aide de $\|x\|$, $\|y\|$ et $\theta = (x, y)$. Isométries indirectes du plan: ce sont les réflexions.

Notion d'angle géométrique (ou écart angulaire) entre deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien orienté de dimension 3, mesuré dans $[0, \pi]$, expression de $(x|y)$ et de $\|x \wedge y\|$, construction du vecteur $x \wedge y$.

Rotations dans l'espace, détermination de l'axe et de l'angle, relation $\mathrm{tr}(r) = 1 + 2\cos(\theta)$.

Calcul différentiel

Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles premières pour $f : U \to \mathbb{R}$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors elle admet en tout point a de U un développement limité d'ordre un, définition de la différentielle de f au point a:

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a)\cdot h + o\big(\|h\|\big) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \sum_{i=1}^{p} \partial_i f(a)\, h_i + o\big(\|h\|\big)\ .$$

Règle de la chaîne, dérivation de $t \mapsto f\big(x_1(t), \cdots, x_p(t)\big)$, caractérisation des fonctions ($\mathcal{C}^1$) constantes sur un ouvert convexe. Application au calcul de dérivées partielles de fonctions composées, cas du "passage en coordonnées polaires".

Gradient de $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, noté ∇f. Expression du gradient en coordonnées polaires.

Dérivées partielles secondes, fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Théorème de Schwarz.

Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles d'ordre un ou deux, une indication de changement de variables étant fournie.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Identité de Lagrange $\|x \wedge y\|^2 + (x|y)^2 = \|x\|^2\|y\|^2$, construction de $x \wedge y$.
- Si $r \neq \mathrm{id}_E$ est une isométrie directe en dimension trois, alors $\dim\big(\mathrm{Ker}(r - \mathrm{id}_E)\big) = 1$.
- Construction géométrique et expression de l'image d'un vecteur de E_3 par une rotation dont l'axe et l'angle sont donnés.
- Caractérisation des fonctions constantes de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert convexe.
- Dérivées partielles de $(r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Expression du gradient en coordonnées polaires.