CORRIGÉ du D.M. de MATHÉMATIQUES numéro 10
PSI2 2024-2025

d'après Centrale PSI 2013

PARTIE A. Un calcul préliminaire.

1. D'abord $1+\dfrac{z}{n}=\left(1+\dfrac{a}{n}\right)+i\,\dfrac{b}{n}$, donc $\left|1+\dfrac{z}{n}\right|=\sqrt{\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^2+\dfrac{b^2}{n^2}}$, et

$$r_n=\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right|=\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^2+\frac{b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\ .$$

Ensuite, tout nombre complexe de la forme $x+iy$ avec x réel **strictement positif** et y réel quelconque, admet pour argument le réel $\theta=\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Si $n>|z|$ (hypothèse proposée par l'énoncé), alors a fortiori $n>-a$, donc $\operatorname{Re}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)>0$ et ce qui précède s'applique: un argument de $1+\dfrac{z}{n}$ est alors $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{b}{n+a}\right)$. Un argument du nombre complexe $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ est alors $\theta_n=n\ \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{b}{n+a}\right)$.

2. On a donc $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n=r_n\,e^{i\theta_n}$, avec les notations introduites ci-dessus. De l'équivalent classique $\operatorname{Arctan}(x)\underset{x\to 0}{\sim}x$, on déduit facilement que $\lim\limits_{n\to+\infty}\theta_n=b$. De plus,

$$\ln(r_n)=\frac{n}{2}\,\ln\left(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)=\frac{n}{2}\left(\frac{2a}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}a\ .$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=e^a$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n=e^a\,e^{ib}=e^{a+ib}=e^z$.

B. Matrices antisymétriques réelles d'ordre 2 ou 3.

3.a. On veut avoir l'égalité $\begin{pmatrix}1&-\dfrac{\alpha}{n}\\ \dfrac{\alpha}{n}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_n\,\cos\theta_n&-\beta_n\,\sin\theta_n\\ \beta_n\,\sin\theta_n&\beta_n\,\cos\theta_n\end{pmatrix}$, soit **(S)**: $\begin{cases}\beta_n\,\cos\theta_n=1\\ \beta_n\,\sin\theta_n=\dfrac{\alpha}{n}\end{cases}$.

De **(S)**, on déduit que nécessairement $\beta_n^2=1+\dfrac{\alpha^2}{n^2}$, donc $\beta_n=\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2}{n^2}}$ (puisque l'on impose β_n strictement positif), et $\tan(\theta_n)=\dfrac{\alpha}{n}$.

Faisons le choix: $\begin{cases}\beta_n&=\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2}{n^2}}\\ \theta_n&=\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)\end{cases}$. On a alors $\beta_n>0$, $\theta_n\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\tan(\theta_n)=\dfrac{\alpha}{n}$,

donc $\cos^2(\theta_n)=\dfrac{1}{1+\tan^2(\theta_n)}=\dfrac{1}{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}$ et, comme $\cos(\theta_n)>0$, $\cos(\theta_n)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}}=\dfrac{1}{\beta_n}$

donc $\beta_n\,\cos(\theta_n)=1$, puis $\beta_n\,\sin(\theta_n)=\big(\beta_n\,\cos(\theta_n)\big)\,\tan(\theta_n)=\dfrac{\alpha}{n}$, ce choix de β_n et θ_n convient donc.

b. Par le cours sur les matrices de rotation, on a $\left(I_2+\dfrac{1}{n}A\right)^n=\beta_n^nR_n^n=\beta_n^n\begin{pmatrix}\cos(n\theta_n)&-\sin(n\theta_n)\\ \sin(n\theta_n)&\cos(n\theta_n)\end{pmatrix}$.

On recherche la limite coefficient par coefficient. Avec des arguments semblables à ceux de la question **2.**, on a $n\theta_n=n\ \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\alpha$ et

$$\ln(\beta_n^n)=\frac{n}{2}\,\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)=\frac{n}{2}\left(\frac{\alpha^2}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\ ,$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \beta_n^n = 1$ et, par continuité des fonctions sin et cos,

$$\exp(A) = \lim_{n\to+\infty} \left(I_2 + \frac{1}{n}A\right)^n = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} .$$

4.a. En cherchant Ω sous la forme $\Omega = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on obtient

$$\Omega \wedge X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ,$$

donc $\Omega = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ est le seul vecteur qui convient.

b. Si $B = 0_3$, alors $P = I_3$ et $\beta = 0$ conviennent.

Suppsons désormais $B \neq 0_3$, on a alors $\Omega \neq 0$.

Soit u_B l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice B, il est défini par

$$\forall X \in \mathbb{R}^3 \qquad u_B(X) = BX = \Omega \wedge X .$$

On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u_B) = B$, où $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Posons $U = \dfrac{\Omega}{\|\Omega\|}$, ce vecteur est unitaire, on peut alors construire une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$ dont il est le premier vecteur, soit $\mathcal{B} = (U, V, W)$. Comme $\Omega = \|\Omega\|\, U$, en posant $\beta = \|\Omega\|$, il est classique que $u_B(U) = 0$, $u_B(V) = \beta W$ et $u_B(W) = -\beta V$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_B) = M_\beta$. On a donc la relation $B = PM_\beta P^{-1}$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{B}$. Ces deux bases étant orthonormales, la matrice de passage P est orthogonale.

c. En posant $A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$, on a $M_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & A \end{pmatrix}$, et comme $\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ existe d'après la question **3.b.**, un calcul par blocs donne

$$\left(I_3 + \frac{1}{n}M_\beta\right)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & \left(I_2 + \frac{1}{n}A\right)^n \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & \exp(A) \end{pmatrix} ,$$

d'où l'existence de $\exp(M_\beta) = \lim_{n\to+\infty} \left(I_3 + \frac{1}{n}M_\beta\right)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Ensuite, $B = PM_\beta P^{-1}$ donc, par continuité du produit matriciel,

$$\left(I_3 + \frac{1}{n}B\right)^n = \left(P\left(I_3 + \frac{1}{n}M_\beta\right)P^{-1}\right)^n = P\left(I_3 + \frac{1}{n}M_\beta\right)^n P^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P \cdot \exp(M_\beta) \cdot P^{-1} .$$

Donc $\exp(B)$ existe et $\exp(B) = P \cdot \exp(M_\beta) \cdot P^{-1}$ avec $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, donc $\exp(B) \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, c'est une matrice de rotation dont l'axe (si $B \neq 0_3$) est dirigé et orienté par Ω, ou ce qui revient au même par $U = \dfrac{\Omega}{\|\Omega\|}$, et dont l'angle est $\beta = \|\Omega\| = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ modulo 2π.

PARTIE C. Exponentielles de matrices diagonalisables.

5.a. Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ alors, par un calcul classique, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(D) = \mathrm{diag}\big(P(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_p)\big)$. En particulier, d'après la question **2.**

$$\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^n = \mathrm{diag}\left(\left(1+\frac{\lambda_1}{n}\right)^n, \cdots, \left(1+\frac{\lambda_p}{n}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_p}\right) ,$$

d'où l'existence de $\exp(D)$, et $\exp(D) = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_p}\right)$, matrice qui est inversible car elle est diagonale avec des coefficients diagonaux non nuls.

b. Si $D' = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_p)$, alors $\exp(D') = \mathrm{diag}\left(e^{\mu_1}, \cdots, e^{\mu_p}\right)$, et

$$\begin{aligned}\exp(D+D') &= \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1+\mu_1}, \cdots, e^{\lambda_p+\mu_p}\right)\\ &= \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_p}\right)\cdot \mathrm{diag}\left(e^{\mu_1}, \cdots, e^{\mu_p}\right) \;=\; \exp(D)\ \exp(D') ,\end{aligned}$$

(et ces deux matrices commutent).

6.a. Si A est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$. Alors, comme en **4.f.**,

$$\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n = \left(P\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)P^{-1}\right)^n = P\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^n P^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\cdot\exp(D)\cdot P^{-1} ,$$

donc $\exp(A)$ existe et $\exp(A) = P\cdot\exp(D)\cdot P^{-1}$. Donc $\exp(A)$ est aussi diagonalisable et

$$\det\big(\exp(A)\big) = \prod_{k=1}^{p} e^{\lambda_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\right) = e^{\mathrm{tr}(A)} .$$

b. Si $A = PDP^{-1}$, alors $xI_p + A = P(xI_p + D)P^{-1} = P\cdot\mathrm{diag}(x+\lambda_1, \cdots, x+\lambda_p)\cdot P^{-1}$, donc $\exp(xI_p + A)$ existe d'après le **a.** et

$$\exp(xI_p + A) = P\cdot\mathrm{diag}\left(e^{x+\lambda_1}, \cdots, e^{x+\lambda_p}\right)\cdot P^{-1} = e^x\ P\cdot\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_p}\right)\cdot P^{-1} = e^x\ \exp(A) .$$

7.a. Il s'agit ici de montrer que les matrices A et B sont diagonalisables **avec la même matrice de passage**, c'est-à-dire que les endomorphismes u_A et u_B de $\mathbb{C}^p$ canoniquement associés sont diagonalisables dans une même base, c'est-à-dire encore qu'il existe une base de $\mathbb{C}^p$ constituée de vecteurs propres communs à u_A et à u_B.

Pour cela, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres **distinctes** de u_A, et notons $F_i = E_{\lambda_i}(u_A)$, $1 \le i \le m$, les sous-espaces propres associés. Comme les endomorphismes u_A et u_B commutent, chaque sous-espace F_i est stable par u_B, et les endomorphismes induits $(u_B)_{F_i}$ sont diagonalisables (*c'est une propriété du cours*). Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de F_i constituée de vecteurs propres de $(u_B)_{F_i}$ donc de u_B, les vecteurs de $\mathcal{B}_i$ sont alors aussi des vecteurs propres de u_A puisqu'ils appartiennent à un sous-espace propre F_i. Comme u_A est diagonalisable, on a $\mathbb{C}^p = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m} F_i$, et la famille de vecteurs $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_i$, $1 \le i \le m$, est une base de $\mathbb{C}^p$, et cette base est bien constituée de vecteurs propres communs aux matrices A et B.

On a donc $A = PDP^{-1}$ et $B = PD'P^{-1}$, avec D et D' matrices diagonales, et en notant P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{C}^p$ vers la base $\mathcal{B}$ construite ci-dessus.

b. Avec les notations ci-dessus, on a $A + B = P(D + D')P^{-1}$, la matrice $D + D'$ étant diagonale. Donc la matrice $A+B$ est diagonalisable, d'où l'existence de $\exp(A+B)$ d'après la question **6.a.** On a alors, avec la question **5.**,

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= P \cdot \exp(D + D') \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot \exp(D) \cdot \exp(D') \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot \exp(D) \cdot P^{-1} \cdot P \cdot \exp(D') \cdot P^{-1} \\ &= \exp(A) \cdot \exp(B) \ , \end{aligned}$$

et ces deux matrices commutent.

PARTIE D. Une autre expression de l'exponentielle d'une matrice (cas particuliers).

8. Si A est diagonalisable, posons $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$. On a alors

$$S_n(D) = \mathrm{diag}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!}, \cdots, \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_p^k}{k!}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Delta = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_p}\right) = \exp(D)\ .$$

On reconnaît effectivement la matrice $\exp(D)$ *obtenue en* **5.a.**

Par un calcul immédiat, $S_n(A) = P \cdot S_n(D) \cdot P^{-1}$. De la “continuité du produit matriciel”, ou plus précisément de la continuité de l'application linéaire $M \mapsto PMP^{-1}$, on déduit que

$$S_n(A) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\Delta P^{-1} = P \cdot \exp(D) \cdot P^{-1} = \exp(A)$$

puisque l'on reconnaît la matrice $\exp(A)$ obtenue en **6.a.**

9. Calculons d'abord les puissances de la matrice M_β. On observe que $M_\beta^2 = -\beta^2 I_3$, on en déduit que $M_\beta^0 = I_3$ par convention, $M_\beta^{2k} = (M_\beta^2)^k = (-1)^k\, \beta^{2k}\, I_3$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, enfin $M_\beta^{2k+1} = (-1)^k\, \beta^{2k}\, M_\beta$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout n entier naturel,

$$S_n(M_\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_n & -s_n \\ 0 & s_n & c_n \end{pmatrix}$$

en posant $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, \beta^{2k}}{(2k)!}$ et $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{N'} \frac{(-1)^k\, \beta^{2k+1}}{(2k+1)!}$, avec $N = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ et $N' = \left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor$.

On a reconnu les développements en série entière des fonctions cos et sin, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \cos\beta$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \sin\beta$. On reconnaît alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(M_\beta) = \exp(M_\beta)$ obtenue en **4.c.** Ensuite, comme dans la question **8.** ci-dessus, de $B = PM_\beta P^{-1}$, on déduit $S_n(B) = P \cdot S_n(M_\beta) \cdot P^{-1}$ pour tout n puis, grâce à la continuité du produit matriciel, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(B) = P \cdot \exp(M_\beta) \cdot P^{-1} = \exp(B)$ d'après **4.c.**

PARTIE E. Exponentielles de matrices nilpotentes.

10.a. Soit $j \in [\![1,k]\!]$. De $A^j = A\,A^{j-1}$, on déduit déjà l'inclusion $\mathrm{Ker}(A^{j-1}) \subset \mathrm{Ker}(A^j)$.

Comme $A^{k-1} \neq 0_p$, il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ tel que $A^{k-1}X \neq 0$ et on a bien sûr $A^kX = 0$. Le vecteur $Y = A^{k-j}X$ vérifie alors $A^{j-1}Y = A^{k-1}X \neq 0$ et $A^jY = A^kX = 0$, donc ce vecteur Y est dans $\mathrm{Ker}(A^j)$, mais pas dans $\mathrm{Ker}(A^{j-1})$. L'inclusion est donc stricte pour tout j tel que $1 \leq j \leq k$.

b. Pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, on a donc $\dim \mathrm{Ker}(A^j) \geq 1 + \dim \mathrm{Ker}(A^{j-1})$ d'où, par une récurrence immédiate, $\dim \mathrm{Ker}(A^j) \geq j$. En particulier, $\dim \mathrm{Ker}(A^k) \geq k$, soit $p = \dim(\mathbb{C}^p) \geq k$.

L'indice de nilpotence k de la matrice A est donc majoré par la taille p de la matrice.

Comme $p-k$ est un entier naturel, $A^p = A^k\,A^{p-k} = 0_p$.

11. Par la formule du binôme, et comme A^j est nulle pour $j \geq k$, on a, pour $n \geq k-1$,

$$\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} A^j = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} A^j\ .$$

Or, pour j fixé, $\dfrac{1}{n^j}\dbinom{n}{j} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!\,n^j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{j!}$, on en déduit l'existence de $\exp(A)$, et $\exp(A) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!}A^j = Q(A)$, où Q est le polynôme $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!}X^j$.

12. Par un calcul très voisin de celui qui précède,

$$\left(I_p + \frac{1}{n}(xI_p + A)\right)^n = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)I_p + \frac{1}{n}A\right)^n = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-j} \frac{1}{n^j}A^j \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!}A^j\ ,$$

donc $\exp(xI_p + A)$ existe, et $\exp(xI_p + A) = e^x \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!}A^j = e^x \cdot \exp(A)$.

PARTIE F. Cas général.

13. Liens avec le polynôme caractéristique.

a. Comme χ_A est de degré p, c'est l'existence et l'unicité du couple (quotient, reste) d'une division euclidienne de polynômes.

b. Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0_p$, donc $P_n(A) = R_n(A)$ pour tout n. La matrice $\exp(A)$, qui est définie comme limite de $P_n(A)$ sous réserve d'existence, existe donc si et seulement si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(A)$ existe.

c. Soit $F = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} a_j X^j$ un polynôme quelconque (les coefficients a_j sont supposés nuls au-delà d'un certain rang d), on observe par un calcul classique (J_q est nilpotente d'indice q) que

$$F(J_q)=\sum_{j=0}^{q-1} a_j (J_q)^j = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{q-1} \\ & a_0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & a_2 \\ & (0) & & \ddots & a_1 \\ & & & & a_0 \end{pmatrix}.$$

Donc $F(J_q)$ est la matrice nulle si et seulement si $a_0 = a_1 = \cdots = a_{q-1} = 0$, donc si et seulement si $X^q \mid F$. Les polynômes annulateurs de J_q sont donc exactement les multiples de X^q. *Remarque hors programme: X^q est le "polynôme minimal" de J_q.*

Soient $\alpha_0, \cdots, \alpha_{q-1}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i (xI_q + J_q)^i = 0$. Alors le polynôme $F = \displaystyle\sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i (X+x)^i$ est annulateur de la matrice J_q, donc il est multiple de X^q. Mais comme il est de degré strictement inférieur à q, c'est le polynôme nul. Les polynômes $(X+x)^i$, $0 \le i \le q-1$, sont de degrés échelonnés donc forment une famille libre dans $\mathbb{C}[X]$, on en déduit que les coefficients α_i sont tous nuls. On a ainsi prouvé la liberté de la famille $\left((xI_q + J_q)^i\right)_{0\le i\le q-1}$ dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$.

d. Le polynôme caractéristique de $xI_q + J_q$ (matrice triangulaire supérieure) est $(X-x)^q$. Par un calcul par blocs, on a donc $\chi_B = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X-\lambda_i)^{n_i}$.

D'autre part, χ_A est scindé (car $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), unitaire, de degré p d'après le cours, et admet pour racines les λ_i avec les n_i comme multiplicités, on en déduit la même expression pour le polynôme χ_A.

14. Existence de $\exp(A)$.

a. Trivialement, $B^i = \begin{pmatrix} (\lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1})^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\lambda_2 I_{n_2} + J_{n_2})^i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (\lambda_k I_{n_k} + J_{n_k})^i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

On en déduit que $P(B) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2 I_{n_2} + J_{n_2}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P(\lambda_k I_{n_k} + J_{n_k}) \end{pmatrix}$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.

b. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de B, alors $P(\lambda_i I_{n_i} + J_{n_i}) = 0_{n_i}$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$. De la question **13.c.**, on déduit facilement que les polynômes annulateurs de la matrice $\lambda_i I_{n_i} + J_{n_i}$ sont exactement les multiples de $(X-\lambda_i)^{n_i}$, c'est-à-dire les polynômes qui admettent λ_i comme racine de multiplicité au moins égale à n_i. Les polynômes annulateurs de B sont alors exactement les multiples du polynôme $\chi_A = \chi_B = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{n_i}$. Si un tel polynôme est non nul, il est forcément de degré au moins égal à $p = \deg(\chi_A)$.

Supposons $\alpha_0 I_p + \alpha_1 B + \cdots + \alpha_{p-1}B^{p-1} = 0_p$ avec $\alpha_0, \cdots, \alpha_{p-1}$ scalaires. Alors le polynôme $F = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{p-1}X^{p-1}$ annule la matrice B et est de degré $p-1$ au plus, c'est donc le polynôme nul, ce qui entraîne la nullité des coefficients α_i. La famille $(I_p, B, \cdots, B^{p-1})$ est donc libre dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

c. Chaque matrice J_{n_i} $(1 \leq i \leq k)$ étant nilpotente, $\exp(\lambda_i I_{n_i} + J_{n_i})$ existe d'après la question **12.** En exprimant $P_n(B)$ par blocs, on voit que $\exp(B)$ existe et

$$\exp(B) = \lim_{n\to+\infty} P_n(B) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1}\exp(J_{n_1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2}\exp(J_{n_2}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_k}\exp(J_{n_k}) \end{pmatrix}.$$

d. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, soit F un sous-espace vectoriel de E, soit G un supplémentaire de F dans E. Alors $F = \mathrm{Ker}(p)$ où p est le projecteur sur G parallèlement à F, donc $F = p^{-1}\big(\{0_E\}\big)$. Comme p est une application linéaire en dimension finie, elle est continue, et F est alors fermé car image réciproque par p du fermé $\{0_E\}$.

e. Pour tout n, posons $R_n = \sum_{k=0}^{p-1} a_k(n)X^k \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$. Alors $P_n(B) = R_n(B) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k(n)B^k$ converge vers $\exp(B)$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, donc $\exp(B)$ appartient toujours au sous-espace $V = \mathrm{Vect}(I_p, B, \cdots, B^{p-1})$ car un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est toujours fermé donc "stable par passage à la limite". Il existe donc des scalaires α_k tels que $\exp(B) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k B^k$.

Comme la convergence d'une suite dans un espace vectoriel de dimension finie s'étudie coordonnée par coordonnée et que $(I_p, B, \cdots, B^{p-1})$ est bien une base de V d'après **14.b.**, on a $\lim_{n\to+\infty} a_k(n) = \alpha_k$ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$.

Donc $R_n(A) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k(n)A^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k A^k$, ce qui montre l'existence de $\exp(A)$ d'après la question **13.b.**

Pour la culture. L'exponentielle d'une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est habituellement définie par la formule $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!} = \lim_{n\to+\infty} S_n(M)$ avec les notations de la **partie D**. On montre en effet que cette série est toujours convergente dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On montre par ailleurs que $\lim_{n\to+\infty}\left(I_p + \frac{M}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} S_n(M)$ pour toute matrice M, ce qui donne une autre approche possible de l'exponentielle d'une matrice.