Calcul de dérivées partielles

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(y,x) = f(x,y)$. Quelle relation y a-t-il entre les dérivées partielles de f ?

- -

On a $\partial_1 f(x,y) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(y,x+h)-f(y,x)}{h} = \partial_2 f(y,x)$, ce qui s'écrit aussi, mais de façon plus confuse, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$.

---

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer l'équivalence entre les assertions:

(1) : $\quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+t, y+t) = f(x,y)$;

(2) : $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

- -

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, l'application $g_{x,y} : t \mapsto f(x+t, y+t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $g'_{x,y}(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t)$.

• Si on a **(1)**, alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g_{x,y}$ est constante sur $\mathbb{R}$ donc $g'_{x,y}(0) = 0$, ce qui donne **(2)**.

• Si on a **(2)**, alors pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'application dérivable $g_{x,y}$ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$, donc elle est constante et, pour tout t, $g_{x,y}(t) = g_{x,y}(0)$, ce qui donne **(1)**.

Interprétation. Les fonctions vérifiant **(1)** ou **(2)** au choix sont les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ dont les lignes de niveau sont les droites parallèles à la première bissectrice.

---

3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer ses dérivées partielles premières.

- -

Comme g est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives qui sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; soit G l'une d'elles. On a alors $f(x,y) = G(y) - G(x)$, donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par opérations, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -g(x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g(y)$.

---

4. Soit la fonction f définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ par $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. Montrer que la fonction f admet une limite finie l au point $(0,0)$. Si on prolonge f par continuité en posant $f(0,0) = l$, la fonction f admet-elle alors des dérivées partielles en $(0,0)$? Montrer que f est en fait de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

- -

C'est facile si l'on pense à introduire une fonction auxiliaire : si on pose $g(t) = \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ pour $t \in \mathbb{R}^*$, on voit en utilisant un développement limité en 0 que $\lim_{t\to 0} g(t) = \dfrac{1}{2}$. Posons alors $g(0) = \dfrac{1}{2}$, on a ainsi construit une fonction g qui est définie sur $\mathbb{R}$ et qui est continue. Mais la fonction cosinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, précisément

$\cos t = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\, t^{2p}}{(2p)!}$, on voit alors par une opération très simple et un changement d'indice que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad g(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\, t^{2p}}{(2p+2)!}\ .$$

Donc la fonction g, qui est maintenant développable en série entière sur $\mathbb{R}$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En prolongeant f par $f(0,0) = \dfrac{1}{2}$, on a alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = g(x^2+y^2)$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, ce qui entraîne bien sûr l'existence de toutes les dérivées partielles d'ordres 1 et 2. On peut préciser, concernant les dérivées partielles premières, que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\, g'(x^2+y^2)$, ce calcul étant valable en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, en particulier $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

---

5. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,y) = f\big(x + \varphi(y)\big)$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifier l'égalité

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial F}{\partial x} = 0\ .$$

- -

La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. On calcule successivement

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'\big(x+\varphi(y)\big)\ , \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \varphi'(y)\ f'\big(x+\varphi(y)\big)\ ,$$

puis

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = f''\big(x+\varphi(y)\big)\ , \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \varphi'(y)\ f''\big(x+\varphi(y)\big)\ ,$$

et l'égalité à vérifier est évidente!

---

6. Expression du laplacien en coordonnées polaires.

Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, soit $g : (r,\theta) \mapsto f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ à l'aide des dérivées partielles de g.

- -

On a $g = f \circ X$, avec $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $X(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Comme f et X sont de classe $\mathcal{C}^2$, alors $g = f \circ X$ l'est aussi. Passons au calcul, un peu fastidieux, mais utile pour ses applications en physique. Par la règle de la chaîne généralisée,

$$\textbf{(1) :}\quad \frac{\partial g}{\partial r} = \cos(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \textbf{(2) :}\quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\ \sin(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\ \cos(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial y}\ .$$

Notons que la relation **(1)** peut s'écrire aussi $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = r\,\dfrac{\partial g}{\partial r}$, cela sera utile pour la suite. On redérive **(1)** par rapport à r:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= \cos(\theta)\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \sin(\theta)\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= \cos(\theta)\left[\cos(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right] + \sin(\theta)\left[\cos(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \sin(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]\\
&= \cos^2(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\cos(\theta)\,\sin(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \sin^2(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,.
\end{aligned}$$

On redérive **(2)** par rapport à θ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} &= -r\,\cos(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial x} - r\,\sin(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial y} - r\,\sin(\theta)\left[-r\,\sin(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\,\cos(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right]\\
&\qquad + r\,\cos(\theta)\left[-r\,\sin(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + r\,\cos(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]\\
&= -r\,\cos(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial x} - r\,\sin(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial y} + r^2\,\sin^2(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2\,\cos(\theta)\,\sin(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + r^2\,\cos^2(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,.
\end{aligned}$$

On observe enfin que $r^2\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = r^2\,\Delta f - \left(x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, donc pour $r \neq 0$, i.e. $(x,y) \neq (0,0)$, on conclut que

$$\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r}\,.$$

---

7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

b. Est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

- -

a. • La fonction f est évidemment de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme produit et quotient de fonctions $\mathcal{C}^2$ ne s'annulant pas (c'est une fonction rationnelle). Le seul problème est donc en $(0,0)$.

• Le passage en polaires permet d'étudier la continuité: en posant $\begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\sin\theta \end{cases}$, on a

$$f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta) = \frac{r^4\,\cos\theta\,\sin\theta\,(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r^2} = \frac{r^2}{4}\,\sin(4\theta)\,. \qquad \textbf{(*)}$$

La fonction $\theta \mapsto \sin(4\theta)$ étant bornée sur $\mathbb{R}$, il est clair que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, donc f est continue au point $(0,0)$. *En effet, faire tendre (x,y) vers $(0,0)$ revient, en coordonnées polaires, à faire tendre r vers 0 indépendamment de θ. Une explication plus rigoureuse est aussi que, puisque $r = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|_2$, la relation* **(*)** *montre que*

$$|f(x,y)| = |f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{1}{4}\,\|(x,y)\|_2^2\ ,$$

d'où découle la continuité de f en $(0,0)$ en disant par exemple que pour avoir $|f(x,y) - f(0,0)| \leq \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ donné, il suffit que $\|(x,y)\|_2 \leq \alpha$ en choisissant $\alpha = 2\sqrt{\varepsilon}$ pour ceux qui aiment la définition de la continuité et de la limite avec des ε et des α.

• Sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, les dérivées partielles premières se calculent en appliquant les règles de dérivation d'un produit ou d'un quotient : on obtient

$$\forall (x,y) \in U \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\,(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\,(x^4 - y^4 - 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}\ .$$

L'existence de dérivées partielles premières en $(0,0)$ ne peut se déduire ici que de l'étude des applications partielles $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$, mais les deux étant nulles, on a donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

• Les applications dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont donc bien définies sur $\mathbb{R}^2$, elles sont continues sur l'ouvert U et leur continuité en $(0,0)$ peut s'étudier encore en passant en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta) = \frac{r^5\,\varphi(\theta)}{r^4} = r\,\varphi(\theta)\ ,$$

où la fonction φ (que je n'explicite pas) est bornée sur $\mathbb{R}$ (elle est continue et 2π-périodique, c'est un "polynôme trigonométrique"). On a donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ par le même raisonnement que ci-dessus. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

b. La dérivée partielle seconde $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)$, si elle existe, est la dérivée en 0 de l'application partielle $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$. Or, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$ pour tout x, donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) = 1$. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$, donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0) = -1$. Les dérivées partielles "croisées" prenant des valeurs différentes à l'origine, on déduit que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (théorème de Schwarz).

Équations aux dérivées partielles

8. En utilisant le changement de variables $\{u = xy\ ,\ v = \dfrac{y}{x}\}$, résoudre, sur l'ouvert $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$, l'équation aux dérivées partielles

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} - 2f + 2 = 0\ .$$

- -

Posons $f(x,y) = g(u,v) = g\Big(xy, \dfrac{y}{x}\Big)$, avec $(u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. La règle de la chaîne donne

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x} = y\,\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\,\frac{\partial g}{\partial v}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y} = x\,\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{x}\,\frac{\partial g}{\partial v}\ .$$

En réinjectant dans l'équation, il vient $u\,\dfrac{\partial g}{\partial u} - g + 1 = 0$, soit $u\,\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) - g(u,v) = -1$, soit encore $u^2\,\dfrac{\partial}{\partial u}\Big(\dfrac{g(u,v)}{u}\Big) = -1$, ou $\dfrac{\partial}{\partial u}\Big(\dfrac{g(u,v)}{u}\Big) = -\dfrac{1}{u^2}$, ce qui s'intègre en $\dfrac{g(u,v)}{u} = \dfrac{1}{u} + \varphi(v)$, où $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction arbitraire de classe $\mathcal{C}^1$, puis $g(u,v) = 1 + u\,\varphi(v)$, et enfin

$$f(x,y) = 1 + xy\,\varphi\Big(\frac{y}{x}\Big)\ .$$

Remarque. Le changement de variables proposé est bien bijectif de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ vers lui-même puisque, réciproquement, on peut écrire $\Big\{x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}\ ,\ y = \sqrt{uv}\Big\}$.

---

9. Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x} - 3\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, avec le changement de variables $\left\{\begin{array}{lcl} u &=& 2x+y \\ v &=& 3x+y \end{array}\right.$.

- -

Posons $f(x,y) = g(u,v)$. La règle de la chaîne donne

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\,\frac{\partial g}{\partial u} + 3\,\frac{\partial g}{\partial v} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\ .$$

L'équation proposée devient alors $-\dfrac{\partial g}{\partial u} = 0$, soit $g(u,v) = h(v)$ avec $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ arbitraire, et finalement $f(x,y) = h(3x+y)$.

Interprétation. Les fonctions solutions sont les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ dont les lignes de niveau sont les droites (parallèles entre elles) d'équation $3x + y = C$, où C est une constante réelle.

---

10. En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telles que

$$y\,\frac{\partial f}{\partial x} - x\,\frac{\partial f}{\partial y} = f\ .$$

- -

Posons $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,\pi[$. La règle de la chaîne donne

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\,\sin(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\,\cos(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -y\,\frac{\partial f}{\partial x} + x\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

en posant $x = r\ \cos(\theta)$ et $y = r\ \sin(\theta)$. L'équation proposée est alors équivalente à $\dfrac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta) = -g(r,\theta)$ soit, en raisonnant sur les applications partielles $\theta \mapsto g(r,\theta)$, à $g(r,\theta) = h(r)\ \exp(-\theta)$ avec $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, soit enfin à

$$f(x,y) = h\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\ \exp\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{x}{y}\right)\right) = k(x^2+y^2)\ \exp\left(\operatorname{Arctan}\frac{x}{y}\right)\,,$$

où $k : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction arbitraire de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque. Une expression de l'angle θ (de sa "mesure principale" pour être rigoureux, i.e. celle comprise dans $]-\pi,\pi]$, et ici plus précisément dans $]0,\pi[$) des coordonnées polaires dans le demi-plan ouvert $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ (situé au-dessus de l'axe des abscisses) est effectivement donnée par $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

---

11. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\ x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Montrer que l'intégrale $I(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\ \cos t, r\ \sin t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas du réel r, avec $r > 0$.

- -

Posons $g(r,t) = f(r\ \cos t, r\ \sin t)$ pour $(r,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Alors l'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ comme composée de fonctions du même métal et, en tout point de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, par la règle de la chaîne, on a

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,t) = \cos t \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(r\ \cos t, r\ \sin t) + \sin t \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(r\ \cos t, r\ \sin t)\ .$$

On a donc

$$\forall (r,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \qquad r\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,t) = r\ \cos t\,\frac{\partial f}{\partial x}(r\ \cos t, r\ \sin t) + r\ \sin t\,\frac{\partial f}{\partial y}(r\ \cos t, r\ \sin t) = 0$$

d'après l'équation aux dérivées partielles vérifiée par f. On en déduit que $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,t) = 0$ pour tout $(r,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, il existe donc une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, et évidemment 2π-périodique, telle que $g(r,t) = h(t)$ pour tout $(r,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Interprétation. La fonction f est donc constante sur toute demi-droite ouverte issue du pôle, i.e. de l'origine $(0,0)$, ces demi-droites ouvertes sont donc des lignes de niveau de f.

Finalement, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ I(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} h(t)\,\mathrm{d}t$, qui est bien indépendant de r.

---

12. En utilisant les coordonnées polaires, résoudre, sur l'ouvert $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, les équations aux dérivées partielles

(1)
$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 1\ ;$$

(2)
$$x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\ .$$

Montrer qu'il existe une unique solution de **(1)** sur U vérifiant $\forall y \in \mathbb{R} \quad f(1,y) = y$ et l'expliciter.

- -

(1) : Le changement de variables $\varphi : (r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, dont on peut ici facilement expliciter l'application réciproque $\varphi^{-1} : (x,y) \mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \text{Arctan}\,\frac{y}{x}\right)$.

Posons $g(r,\theta) = f(x,y) = f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)$, et appliquons la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial r} = (\cos\theta)\,\frac{\partial f}{\partial x} + (\sin\theta)\,\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{r}\left(x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

On a beaucoup de chance, on a reconnu le premier membre de l'équation **(1)**, cette dernière se ramène donc à $\dfrac{\partial g}{\partial r} = \dfrac{1}{r}$, soit $g(r,\theta) = \ln r + k(\theta)$ avec $k : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ fonction arbitraire de classe $\mathcal{C}^1$, et finalement

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + k\Big(\text{Arctan}\,\frac{y}{x}\Big) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + h\Big(\frac{y}{x}\Big),$$

avec $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction arbitraire de classe $\mathcal{C}^1$.

Si l'on impose la condition $f(1,y) = y$, on voit que cela donne $h(y) = y - \frac{1}{2}\ln(1+y^2)$, donc f est complètement déterminée, puis

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \ln(x) + \frac{y}{x}.$$

(2) : On passe maintenant au calcul des dérivées partielles secondes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial g}{\partial r}\Big) = \frac{\partial}{\partial r}\Big((\cos\theta)\,\frac{\partial f}{\partial x} + (\sin\theta)\,\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \\
&= (\cos\theta)\cdot\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) + (\sin\theta)\cdot\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \\
&= (\cos\theta)\cdot\left[(\cos\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\sin\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right] + (\sin\theta)\cdot\left[(\cos\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + (\sin\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] \\
&= (\cos^2\theta)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,(\sin\theta)\,(\cos\theta)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + (\sin^2\theta)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= \frac{1}{r^2}\left[x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]
\end{aligned}$$

On a vraiment beaucoup de chance aujourd'hui, c'est un jour à jouer au loto, on tombe juste sur le premier membre de l'équation **(2)**. On continue :

$$\begin{aligned}
\textbf{(2)} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = A(\theta)
\end{aligned}$$

$$\iff \quad g(r,\theta) = r \cdot A(\theta) + B(\theta)$$
$$\iff \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \cdot a\Big(\frac{y}{x}\Big) + b\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

avec $A, B : \Big]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big[\to \mathbb{R}$ fonctions arbitraires de classe $\mathcal{C}^2$; ou $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonctions arbitraires de classe $\mathcal{C}^2$.

---

13. Soit α un réel. Une fonction $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ est dite **homogène de degré** α si elle vérifie

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(tx,ty) = t^\alpha\, f(x,y)\ .$$

a. Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si elle est solution de l'équation aux dérivées partielles **(E) :** $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = \alpha\, f$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

On pourra considérer $g : t \mapsto f(tx,ty)$, *avec* $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ *fixé.*

b. Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, homogène de degré α. Montrer que l'on a

$$x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha\,(\alpha-1)\, f\ .$$

- -

a. Fixons $m = (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, et considérons la fonction d'une variable $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(tx,ty)$. On peut écrire $g = f \circ \varphi$, avec $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\varphi(t) = (tx,ty)$. On a $\varphi'(t) = (x,y)$ et $g'(t) = \mathrm{d}f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) = \Big(\nabla f\big(\varphi(t)\big)\Big|\varphi'(t)\Big) = x\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)$.

• Si f est homogène de degré α, alors on a aussi $g(t) = t^\alpha\, g(1)$, donc $g'(t) = \alpha\, t^{\alpha-1}\, g(1)$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad x\,\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = \alpha\, t^{\alpha-1}\, f(x,y)\ .$$

En évaluant cette égalité pour $t = 1$, on obtient la relation **(E)** demandée.

• Inversement, si f vérifie l'équation $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha\, f(x,y)$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, en appliquant cette relation au point (tx,ty), on a

$$tx\,\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + ty\,\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = \alpha\, f(tx,ty)\ ,$$

soit $t\, g'(t) = \alpha\, g(t)$. La fonction g est donc solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle ordinaire, qui se résout en $g(t) = C\, t^\alpha$ avec, bien sûr, $C = g(1) = f(x,y)$, et on obtient bien la relation $f(tx,ty) = t^\alpha\, f(x,y)$.

b. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et homogène de degré α sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, on écrit l'équation **(E1)** obtenue en dérivant **(E)** par rapport à la variable x, puis l'équation **(E2)** obtenue en dérivant **(E)** par rapport à la variable y, puis on forme la combinaison linéaire $x \times (\mathbf{E1}) + y \times (\mathbf{E2})$, on obtient alors

$$x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\alpha-1)\left(x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\ .$$

En appliquant de nouveau **(E)** au second membre, on conclut.

---

14. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles que, en posant $\varphi(x, y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on ait
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3} .$$

- -

Posons $t = \dfrac{y}{x}$ pour simplifier. On calcule $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) = -\dfrac{y}{x^2}\, f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$, et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) = \dfrac{1}{x}\, f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$, puis
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2y}{x^3}\, f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4}\, f''\left(\frac{y}{x}\right) \qquad ; \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{x^2}\, f''\left(\frac{y}{x}\right) ,$$
d'où l'expression du laplacien
$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\left[2\,\frac{y}{x}\, f'\left(\frac{y}{x}\right) + \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) f''\left(\frac{y}{x}\right)\right] .$$
En multipliant par x^2, on a
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3} \quad &\Longleftrightarrow \quad (1 + t^2)\, f''(t) + 2t\, f'(t) = t \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[(1 + t^2)\, f'(t)\big] = t \\
&\Longleftrightarrow \quad (1 + t^2)\, f'(t) = \frac{t^2}{2} + C \\
&\Longleftrightarrow \quad f'(t) = \frac{(t^2 + 1) - 1}{2(1 + t^2)} + \frac{C}{1 + t^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad f'(t) = \frac{1}{2} + \frac{K}{1 + t^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad f(t) = \frac{t}{2} + K\ \mathrm{Arctan}(t) + K' ,
\end{aligned}$$
où C, puis K et K' sont des constantes réelles arbitraires.

---

15. Trouver les fonctions $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles que, en posant $f(x, y, z) = \varphi(r)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, la fonction f vérifie sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + kf = 0 ,$$
où k est un réel donné.

- -

Interprétation. On recherche les fonctions propres de l'opérateur laplacien, qui sont à symétrie sphérique. L'équation posée s'appelle parfois **équation de Helmholtz**.

Si $f(x,y,z) = \varphi(r)$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, on obtient sur U les calculs de dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi'(r)\,\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\,\varphi'(r) = x \times \frac{1}{r} \times \varphi'(r)\ ,$$

puis, en dérivant cette expression par rapport à x comme un produit de trois facteurs :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{r}\,\varphi'(r) - \frac{x^2}{r^3}\,\varphi'(r) + \frac{x^2}{r^2}\,\varphi''(r)\ .$$

Les trois variables jouant le même rôle, on obtient des expressions analogues pour les autres dérivées partielles. On en déduit notamment l'expression du laplacien d'une fonction $\mathcal{C}^2$ à symétrie sphérique : si $f(x,y,z) = \varphi(r)$ avec φ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, alors

$$\Delta f(x,y,z) = \left(\frac{3}{r} - \frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\right)\varphi'(r) + \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\,\varphi''(r)\ =\ \frac{2}{r}\,\varphi'(r) + \varphi''(r)\ .$$

L'équation $\Delta f + kf = 0$ se ramène à une équation différentielle ordinaire du second ordre :

$$r\,\varphi''(r) + 2\,\varphi'(r) + k\,r\,\varphi(r) = 0\ ,$$

laquelle n'est malheureusement pas à coefficients constants, mais le changement de fonction inconnue $\psi(r) = r\,\varphi(r)$ nous ramène à l'équation $\psi''(r) + k\,\psi(r) = 0$, que l'on sait discuter et résoudre. Allons-y :

- si $k = 0$, alors $\psi(r) = Ar + B$, donc $\varphi(r) = A + \dfrac{B}{r}$.

- si $k > 0$, posons $k = \omega^2$, alors $\psi(r) = A\ \cos(\omega r) + B\ \sin(\omega r)$, donc

$$\varphi(r) = A\,\frac{\cos(\omega r)}{r} + B\,\frac{\sin(\omega r)}{r}\ .$$

- si $k < 0$, posons $k = -\omega^2$, alors $\psi(r) = A\ \mathrm{ch}(\omega r) + B\ \mathrm{sh}(\omega r)$, donc

$$\varphi(r) = A\,\frac{\mathrm{ch}(\omega r)}{r} + B\,\frac{\mathrm{sh}(\omega r)}{r}\ .$$

---

16. Soit $c > 0$. En posant $\begin{cases} u &= x + ct \\ v &= x - ct \end{cases}$, rechercher les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$, de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$c^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

(**équation de d'Alembert**, ou **équation des cordes vibrantes**).

- -

Posons $f(x,y) = g(u,v)$. La règle de la chaîne donne

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = c\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v}\right),$$

puis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\, \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) .$$

L'équation proposée devient alors $4c^2\, \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$, soit $\dfrac{\partial}{\partial u}\Big(\dfrac{\partial g}{\partial v}\Big) = 0$, donc $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = h(v)$ où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, puis $g(u,v) = k(u) + H(v)$, où k et H sont deux fonctions arbitraires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$. Finalement,

$$f(x,y) = k(x+ct) + H(x-ct) .$$

---

17. Une fonction f, de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U du plan, est dite **harmonique** lorsque son laplacien est nul, i.e.

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 .$$

a. On suppose f **à symétrie sphérique** sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$, i.e. $f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$, avec $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que f est harmonique si et seulement si φ' est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle d'ordre un que l'on écrira. En déduire quelles sont les fonctions harmoniques à symétrie sphérique.

b*. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, harmonique. On pose $g(r,t) = f(r\cos t, r\sin t)$.

i. Trouver une relation entre $\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r\, \dfrac{\partial g}{\partial r}\Big)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}$.

ii. Montrer que l'application $\varphi : r \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\, \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et prouver que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\big(r\,\varphi'(r)\big) = 0$.

iii. En déduire que φ est constante sur $\mathbb{R}$.

- -

a. Posons $t = x^2+y^2$, alors $f(x,y) = \varphi(t)$, on en déduit $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\,\varphi'(x^2+y^2)$ et, de façon similaire, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\,\varphi'(x^2+y^2)$. Il vient ensuite

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\varphi'(x^2+y^2)+4x^2\varphi''(x^2+y^2) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\varphi'(x^2+y^2)+4y^2\varphi''(x^2+y^2) ,$$

puis $\Delta f(x,y) = 4\,\big(\varphi'(x^2+y^2) + (x^2+y^2)\,\varphi''(x^2+y^2)\big) = 4\,\big(\varphi'(t) + t\,\varphi''(t)\big)$. Ainsi, f est harmonique sur U si et seulement si $t\,\varphi''(t) + \varphi'(t) = 0$, ce qui se résout d'abord en $\varphi'(t) = \dfrac{C}{t}$, puis en $\varphi(t) = C\,\ln(t) + D$, avec C et D constantes arbitraires. Les fonctions harmoniques à symétrie sphérique sur U sont les fonctions $f : (x,y) \mapsto C\,\ln(x^2+y^2) + D$.

b.i. On retrouve le calcul de l'exercice **6.** ci-dessus, peut-être organisé de façon un peu plus agréable. On a $g = f \circ X$, avec $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $X(r,t) = (r\cos t, r\sin t)$. Comme f et X sont de classe $\mathcal{C}^2$, alors $g = f \circ X$ l'est aussi. Par la règle de la chaîne généralisée,

$$\textbf{(1)}: \quad \frac{\partial g}{\partial r} = \cos(t)\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(t)\,\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \textbf{(2)}: \quad \frac{\partial g}{\partial t} = -r\,\sin(t)\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\,\cos(t)\,\frac{\partial f}{\partial y}\ .$$

De **(1)**, on déduit que $r\,\dfrac{\partial g}{\partial r} = r\,\cos(t)\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + r\,\sin(t)\,\dfrac{\partial f}{\partial y}$, puis $\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\dfrac{\partial g}{\partial r}\Big)$ vaut

$$\cos(t)\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(t)\,\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos(t)\left(\cos(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right) + r\sin(t)\left(\cos(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \sin(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right),$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial g}{\partial r}\Big) = \cos(t)\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(t)\,\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos^2(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2r\,\cos(t)\,\sin(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + r\sin^2(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ .$$

En redérivant **(2)** par rapport à t, on a

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -r\,\cos(t)\,\frac{\partial f}{\partial x} - r\,\sin(t)\,\frac{\partial f}{\partial y} + r^2\,\sin^2(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2\,\cos(t)\,\sin(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + r^2\,\cos^2(t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ .$$

On observe alors que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + r\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial g}{\partial r}\Big) = r^2\,\Delta f = 0\ .$$

ii. L'application $g : (r,t) \mapsto g(r,t) = f(r\cos t, r\sin t)$ est continue par rapport à la variable t sur le segment $[0,2\pi]$, ainsi que sa dérivée partielle $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ qui a été explicitée ci-dessus, d'où l'intégrabilité sur $[0,2\pi]$ des fonctions $t \mapsto g(r,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,t)$. L'application partielle $r \mapsto g(r,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et, si S est un segment de $\mathbb{R}$, l'application continue $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ est bornée sur la partie fermée bornée $S \times [0,2\pi]$, on a donc une domination de la forme

$$\forall (r,t) \in S \times [0,2\pi] \qquad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)\right| \le M_S\ ,$$

la fonction constante $t \mapsto M_S$ étant intégrable sur le segment $[0,2\pi]$. On peut donc affirmer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi'(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r,t)\,\mathrm{d}t$ et $\varphi''(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)\,\mathrm{d}t$. Alors

$$\begin{aligned}
r\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\big(r\,\varphi'(r)\big) &= r\,\varphi'(r) + r^2\,\varphi''(r) \\
&= \int_0^{2\pi} \left(r\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,t) + r^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} r\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial g}{\partial r}(r,t)\right)\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\left[\frac{\partial g}{\partial t}(r,t)\right]_0^{2\pi} \ =\ 0
\end{aligned}$$

puisque la fonction $t \mapsto g(r,t)$, ainsi que sa dérivée $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial t}(r,t)$, sont 2π-périodiques.

Pour $r \neq 0$, on déduit donc que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\big(r\,\varphi'(r)\big) = 0$, égalité qui reste vraie pour $r = 0$ par continuité.

iii. Il existe donc C réel tel que $\forall r \in \mathbb{R}\ \ r\,\varphi'(r) = C$. Mais, en évaluant pour $r = 0$, on voit que C est nécessairement nul. Donc $\varphi'(r) = 0$ pour $r \in \mathbb{R}^*$, puis pour $r \in \mathbb{R}$ de nouveau par continuité. Donc l'application φ est constante sur $\mathbb{R}$, soit

$$\forall r \in \mathbb{R} \qquad \varphi(r) = \varphi(0) = 2\pi\, f(0,0)\ .$$

Recherche d'extremums

18. Soit $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ x+y \leq 1\big\}$.

a. Montrer que D est une partie fermée bornée du plan.

b. Soient $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^a\, y^b\, (1-x-y)^c$. Montrer que f est continue sur D.

c. Déterminer $\displaystyle\max_{(x,y)\in D} f(x,y)$.

- -

a. La partie D est définie par des inégalités au sens large, les applications $(x,y) \mapsto x$, $(x,y) \mapsto y$ et $(x,y) \mapsto x+y$ étant continues sur $\mathbb{R}^2$, donc elle est fermée (intersection de trois images réciproques de fermés de $\mathbb{R}$ par des applications continues). Elle est bornée car incluse dans le pavé $[0,1]^2$.

b. Les exposants a, b, c étant strictement positifs, l'application $t \mapsto t^a = e^{a\ \ln t}$ (et idem avec b ou c) est continue sur $\mathbb{R}_+$... à condition toutefois de la prolonger par la valeur 0 en 0. Ainsi f est continue sur D comme produit et composée de fonctions continues.

c. Comme f est continue sur la partie fermée bornée D, elle admet un maximum global sur D. Notons $\overset{\circ}{D}$ l'intérieur de D, i.e. l'ensemble des points intérieurs à D, alors

$$\overset{\circ}{D} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\ ,\ y > 0\ ,\ x+y < 1\big\}\ .$$

Comme f est nulle sur la frontière $D \setminus \overset{\circ}{D}$ de D et strictement positive sur $\overset{\circ}{D}$, son maximum sur D est atteint dans l'intérieur de D, qui est un ouvert. Le(s) point(s) en le(s)quel(s) ce maximum est atteint (il peut a priori être atteint en plusieurs points) est donc un point critique de f. Recherchons donc le(s) point(s) critique(s) de f sur $\overset{\circ}{D}$.

Le calcul, laissé au lecteur intrépide, donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^{a-1}\ y^b\ (1-x-y)^{c-1}\ \big[a(1-x-y) - cx\big]\ .$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^a\ y^{b-1}\ (1-x-y)^{c-1}\ \big[b(1-x-y) - cy\big]\ .$$

Le système $\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\ ;\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\right\}$ admet pour seule solution dans $\overset{\circ}{D}$ le couple $(x,y)=\left(\dfrac{a}{a+b+c},\dfrac{b}{a+b+c}\right)$. Ce point, qui est le seul point critique de f dans $\overset{\circ}{D}$, est donc nécessairement le point en lequel le maximum global de f sur D est atteint. Ainsi,

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y)=f\left(\frac{a}{a+b+c},\frac{b}{a+b+c}\right)=\frac{a^a\ b^b\ c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}\ .$$

---

19. Soit $K=[0,1]^2$. Soit $f:K\to\mathbb{R}$ définie par $f(1,1)=0$ et

$$\forall (x,y)\in K\setminus\{(1,1)\}\qquad f(x,y)=\frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}\ .$$

a. Montrer que $\forall (x,y)\in K\quad 0\leq f(x,y)\leq 1-y$.

b. L'application f est-elle continue au point $(1,1)$?

c. Justifier l'existence de $m=\min\limits_{(x,y)\in K} f(x,y)$ et $M=\max\limits_{(x,y)\in K} f(x,y)$ et déterminer leurs valeurs.

- -

a. Observons d'abord que f est bien définie sur K puisque, si $(x,y)\in K\setminus\{(1,1)\}$, alors $1-xy>0$. On en déduit aussi la continuité de f sur $K\setminus\{(1,1)\}$ comme produit et quotient de fonctions continues.

Par ailleurs, $f(x,y)\geq 0$ est évident, et, si $(x,y)\in K\setminus\{(1,1)\}$, alors $xy\leq x$ puis $0\leq 1-x\leq 1-xy$, et enfin

$$0\leq f(x,y)=\frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}\leq xy(1-y)\leq 1-y\ .$$

b. Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} 0=\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}(1-y)=0$, le théorème d'encadrement permet d'affirmer que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)=0=f(1,1)$, ce qui traduit la continuité de f au point $(1,1)$.

c. L'application f est finalement continue sur la partie fermée bornée K du plan, donc elle est bornée sur K et atteint ses bornes, autrement dit elle admet un minimum global m et un maximum global M sur K.

On remarque que f est nulle sur la frontière de K, i.e. sur le bord du carré $[0,1]\times[0,1]$, et qu'elle prend des valeurs strictement positives sur l'intérieur $\overset{\circ}{K}$. On en déduit que $m=\min\limits_{K} f=0$ et que cette valeur minimale est atteinte en tout point du bord.

On en déduit aussi que la valeur maximale M est atteinte dans l'intérieur $U=\overset{\circ}{K}=]0,1[^2$ de K, et comme cette partie est ouverte et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, elle est atteinte en un point critique de f. Recherchons donc les points critiques de f dans U. On calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{y(1-y)(1-2x+x^2y)}{(1-xy)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{x(1-x)(1-2y+xy^2)}{(1-xy)^2}$. Donc, dans U,

$$\nabla f(x,y)=\overrightarrow{0}\iff\begin{cases}2x-x^2y\ =\ 1 & \textbf{(E1)}\\ 2y-xy^2\ =\ 1 & \textbf{(E2)}\end{cases}\ .$$

Le système ci-dessus est équivalent à celui constitué de **(E1)** et de **(E1)-(E2)**, donc

$$\nabla f(x,y)=\overrightarrow{0} \iff \begin{cases} 2x-x^2y & = 1 \\ (x-y)(2-xy) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-x^2y & = 1 \\ x-y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = x \\ 2x-x^3 & = 1 \end{cases}.$$

La deuxième équation s'écrit encore $x^3-2x+1=0$, soit $(x-1)(x^2+x-1)=0$, dont la seule racine dans l'intervalle $]0,1[$ est $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Donc f admet pour unique point critique dans U le point $P(\alpha,\alpha)$. C'est donc nécessairement en ce point P que le maximum de f est atteint. Finalement, $M=\max\limits_K f=f(\alpha,\alpha)=\dfrac{5\sqrt{5}-11}{2}$.

---

20. Soit f un endomorphisme autoadjoint défini positif de $E=\mathbb{R}^n$ (muni de sa structure euclidienne canonique). Soit $u\in\mathbb{R}^n$. Soit l'application h définie sur $\mathbb{R}^n$ par $h(x)=\dfrac{1}{2}\,\big\langle f(x),x\big\rangle-<u,x>$. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et qu'elle admet un unique point critique en lequel elle atteint un minimum global strict.

- -

L'application h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ car elle est polynomiale: en effet, en posant $u=(u_1,\cdots,u_n)$, en nommant $A=(a_{i,j})\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ la matrice représentant canoniquement f, on a facilement, pour $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$h(x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{i,j}x_ix_j-\sum_{i=1}^n u_ix_i\ ,$$

dont on peut (en utilisant le fait que la matrice A est symétrique) tirer l'expression des dérivées partielles:

$$(*)\qquad\qquad \frac{\partial h}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j-u_i\ ,$$

et on voit qu'elles sont continues sur $\mathbb{R}^n$. Pour rechercher les éventuels points critiques, il est plus agréable d'écrire un développement limité de h à l'ordre 1 au voisinage d'un point x de $\mathbb{R}^n$: si on prend $k\in\mathbb{R}^n$ (que l'on pourra interpréter comme un "petit déplacement"), alors

$$\begin{aligned}
h(x+k) &= \frac{1}{2}\,\big\langle f(x+k),x+k\big\rangle-<u,x+k> \\
&= \frac{1}{2}\,\Big(\big\langle f(x),x\big\rangle+\big\langle f(x),k\big\rangle+\big\langle f(k),x\big\rangle+\big\langle f(k),k\big\rangle\Big)-<u,x>-<u,k> \\
&= \Big(\frac{1}{2}\big\langle f(x),x\big\rangle-<u,x>\Big)+\Big(\frac{1}{2}\big\langle f(x),k\big\rangle+\frac{1}{2}\big\langle f(k),x\big\rangle-<u,k>\Big)+\big\langle f(k),k\big\rangle \\
&= h(x)+\big\langle f(x)-u,k\big\rangle+\big\langle f(k),k\big\rangle
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que l'endomorphisme f est symétrique donc que $\big\langle f(x),k\big\rangle=\big\langle f(k),x\big\rangle$. Le terme $\big\langle f(k),k\big\rangle$ est "négligeable au premier ordre" puisque $\Big|\big\langle f(k),k\big\rangle\Big|\leq\|k\|\,\big\|f(k)\big\|$

(Cauchy-Schwarz) et $\lim\limits_{k\to 0_E} \big\|f(k)\big\| = 0$ (toute application linéaire en dimension finie est continue), c'est donc un $o\big(\|k\|\big)$. Sachant que le développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est unique et s'écrit $h(x+k) = h(x) + \big\langle \nabla h(x), k\big\rangle + o\big(\|k\|\big)$, on déduit que $\nabla h(x) = f(x) - u$. L'endomorphisme f est diagonalisable et ses valeurs propres sont toutes non nulles, donc f est un automorphisme, donc

$$\nabla h(x) = 0_E \iff f(x) - u = 0_E \iff x = f^{-1}(u)\ .$$

Donc h admet bien un unique point critique $x_0 = f^{-1}(u)$.

Remarque. On pouvait aussi remarquer, en utilisant **(*)**, que l'annulation des dérivées partielles de h revient à écrire le système $\Big\{\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = u_i\Big\}$, soit $f(x) = u$. Le seul point critique de h est donc bien $x_0 = f^{-1}(u)$.

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, en utilisant $u = f(x_0)$, on a $h(x_0) = -\dfrac{1}{2} < u, x_0 >$, puis (*en utilisant le caractère symétrique de f*):

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) &= \frac{1}{2}\big\langle f(x), x\big\rangle - < u, x > + \frac{1}{2} < u, x_0 > \\ &= \frac{1}{2}\big\langle f(x), x\big\rangle - \big\langle f(x_0), x\big\rangle + \frac{1}{2}\big\langle f(x_0), x_0\big\rangle \\ &= \frac{1}{2}\Big(\big\langle f(x), x\big\rangle - \big\langle f(x_0), x\big\rangle - \big\langle f(x), x_0\big\rangle + \big\langle f(x_0), x_0\big\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{2}\big\langle f(x - x_0), x - x_0\big\rangle\ . \end{aligned}$$

Or, l'endomorphisme autoadjoint f est défini positif, i.e. $\big\langle f(y), y\big\rangle > 0$ pour tout vecteur non nul y de $\mathbb{R}^n$, donc $h(x) - h(x_0) \geq 0$ pour tout x (strictement si $x \neq x_0$), le point critique x_0 de h est bien le point où h atteint son minimum global, et celui-ci est strict.

---

21. Déterminer les extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) de

a. $f : (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

b. $g : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy - 2y + 5$

c. $h : (x,y) \mapsto x^3 + y^3$

d. $k : (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$

e. $l : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$

- -

a. Le seul point critique de f est $a = (0,3)$. La matrice hessienne de f en a est $H_f(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, d'ailleurs indépendante de a. On constate que $\operatorname{tr}\big(H_f(a)\big) = 4 > 0$ et $\det\big(H_f(a)\big) = 3 > 0$, donc la matrice $H_f(a)$ est symétrique définie positive, et f présente un minimum local strict au point a, et c'est son seul extremum local.

Remarque. Dans cet exemple (f est une fonction polynomiale de degré 2), on peut aussi faire une translation des variables, i.e. placer la nouvelle origine au point critique, et alors constater que

$$f(h,3+k)-f(0,3)=h^2+hk+k^2=\Big(h+\frac{k}{2}\Big)^2+\frac{3}{4}k^2\geq 0\ ,$$

donc f admet un minimum global au point a.

b. Les équations $2x-2y=0$ et $2y-2x-2=0$ étant incompatibles, la fonction g n'a pas de point critique, donc a fortiori pas d'extremum local dans $\mathbb{R}^2$.

c. Le seul point critique de h est l'origine $(0,0)$. Comme $h(x,0)$ est du signe de x, $h(x,y)=h(x,y)-h(0,0)$ n'est pas de signe constant dans un voisinage de l'origine, donc h ne possède pas d'extremum local.

d. La recherche des points critiques de k s'écrit:

$$\nabla k(x,y)=0 \iff \begin{cases}\dfrac{\partial k}{\partial x}(x,y) &= 0\\ \dfrac{\partial k}{\partial y}(x,y) &= 0\end{cases} \iff \begin{cases} y=x^2\\ x=y^2\end{cases} \iff \begin{cases} y=x^2\\ x=x^4\end{cases}.$$

On obtient deux points critiques qui sont l'origine $O=(0,0)$, et le point $a=(1,1)$.

Comme $k(x,0)=x^3$ est du signe de x, $k(x,y)=k(x,y)-k(0,0)$ n'est pas de signe constant dans un voisinage de l'origine, donc l'origine n'est pas un extremum local. On peut remarquer aussi que la matrice hessienne de k en ce point est $H_k(O)=\begin{pmatrix}0&-3\\-3&0\end{pmatrix}$, matrice symétrique qui n'est ni positive ni négative puisque ses valeurs propres sont 3 et -3, donc k n'a pas d'extremum local en ce point.

On calcule $H_k(a)=\begin{pmatrix}6&-3\\-3&6\end{pmatrix}$, donc $\mathrm{tr}\big(H_k(a)\big)=12>0$, $\det\big(H_k(a)\big)=27>0$, la matrice hessienne de k en a est donc définie positive, on en déduit que la fonction k présente au point a un minimum local strict. Ce n'est pas un minimum global car la fonction k n'est pas minorée sur $\mathbb{R}^2$, on a en effet $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x,0)=-\infty$.

e. Recherchons les points critiques de l : $\dfrac{\partial l}{\partial x}=2(x-yz)$, $\dfrac{\partial l}{\partial y}=2(y-zx)$ et $\dfrac{\partial l}{\partial z}=2(z-xy)$, on voit que $M(x,y,z)$ est un point critique si et seulement si $\begin{cases} x &= yz\\ y &= zx\\ z &= xy\end{cases}$. Ce système entraîne $y=yz^2$, soit $y(1-z)(1+z)=0$ donc :

- soit $y=0$, alors $x=z=0$, et $O\,(0,0,0)$ est un point critique ;

- soit $z=1$, alors $x=y$ et $z=x^2=1$, d'où $A\,(1,1,1)$ et $B\,(-1,-1,1)$ comme points critiques ;

- soit $z=-1$, alors $x=-y$ et $z=-x^2=-1$, d'où $C\,(1,-1,-1)$ et $D\,(-1,1,-1)$ comme points critiques ;

On a obtenu finalement cinq points critiques. Notons que la fonction l possède quelques symétries évidentes, comme

$$l(-x,-y,z)=l(x,-y,-z)=l(-x,y,-z)=l(x,y,z)\ ,$$

l'étude locale des points critiques B, C et D se déduira donc facilement de celle faite au point A.

• Étude locale au point O :

on a $H_l(O) = 2I_3$, matrice définie positive, cela montre que l présente un minimum local au point O.

• Étude locale au point $A\,(1,1,1)$: on calcule $H_l(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = -2J + 4I_3$,

en notant J la matrice dont tous les coefficients valent 1. La matrice J ayant pour valeurs propres $\lambda = 0$ (double) et $\mu = 3$ (simple), on en déduit que les valeurs propres de $H_l(A)$ sont $-2\lambda + 4 = 4$ (double) et $-2\mu + 4 = -2$ (simple), donc cette matrice symétrique n'est, ni positive, ni négative. Donc le point A n'est pas un extremum local de l. Par symétrie, il en est de même des points B, C et D.

---

22. Déterminer les extremums locaux et globaux de $f : (x,y) \mapsto y\left(x^2 + \ln(y)^2\right)$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

- -

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + \ln(y)^2 + 2\ln(y)\ .$$

On en déduit que f admet deux points critiques dans l'ouvert U, à savoir $a = (0,1)$ et $b = (0, e^{-2})$. On calcule ensuite

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y\ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{y}\,\big(1 + \ln(y)\big)\ ,$$

donc $\forall (x,y) \in U \quad H_f(x,y) = 2\begin{pmatrix} y & x \\ x & \dfrac{1+\ln(y)}{y} \end{pmatrix}$.

• au point $a = (0,1)$, on a $H_f(a) = 2I_2$, matrice symétrique définie positive, donc f admet un minimum local strict en ce point. On note par ailleurs que

$$\forall (x,y) \in U \qquad f(x,y) = y\left(x^2 + \ln(y)^2\right) \geq 0 = f(0,1)\ ,$$

donc $0 = f(a)$ est le minimum global de f sur U.

• au point $b = (0, e^{-2})$, on a $H_f(b) = 2\begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & -e^2 \end{pmatrix}$, matrice symétrique qui n'est ni positive , ni négative, donc f n'admet pas d'extremum local en ce point.

---

23. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique, on considère les points $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$, où α et β sont des réels tels que $0 < \alpha < \beta < 2\pi$.

a. Montrer que l'aire du triangle MAB est $f(\alpha,\beta) = 2\,\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\,\sin\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\,\sin\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)$.

b. Rechercher les points critiques de f dans l'ouvert $U = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \alpha < \beta < 2\pi\}$.

c. En déduire quels sont les triangles d'aire maximale inscrits dans le cercle trigonométrique.

- -

a. On sait que l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ est la valeur absolue du produit mixte de ces vecteurs, l'aire $\mathcal{A}$ du triangle MAB est alors la moitié, soit

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}]\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \cos(\alpha)-1 & \cos(\beta)-1 \\ \sin(\alpha) & \sin(\beta) \end{vmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|(1-\cos\beta)\,\sin\alpha - (1-\cos\alpha)\,\sin\beta\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|2\,\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \times 2\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2\,\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times 2\,\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right| \\
&= \left|2\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(\sin\frac{\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\beta}{2}\right)\right| \\
&= 2\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\,\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = f(\alpha,\beta)\,,
\end{aligned}$$

cette dernière expression étant toujours positive pour $(\alpha,\beta) \in U$.

b. On calcule

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) = \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\,\sin\left(\frac{\beta-2\alpha}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial \beta}(\alpha,\beta) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,\sin\left(\frac{2\beta-\alpha}{2}\right).$$

Les facteurs $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$ sont non nuls pour $(\alpha,\beta) \in U$. L'annulation des dérivées partielles de f conduit aux conditions $\frac{\beta-2\alpha}{2} \in \{-\pi, 0\}$ et $\frac{2\beta-\alpha}{2} \in \{0,\pi\}$ (pour rester dans U), et la seule solution avec $(\alpha,\beta) \in U$, est $(\alpha,\beta) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$.

Le seul point critique de f dans U est donc $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$.

c. Soit $K = \overline{U} = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 2\pi\}$ l'adhérence de U. Alors f est continue sur K, donc admet un maximum sur K (partie fermée bornée du plan) par le théorème des bornes atteintes. Mais f est nulle sur la frontière $K \setminus U$ de K, et est strictement positive sur l'intérieur U, ce maximum est donc atteint en un point de U, et ce point est alors un point critique de f, c'est donc nécessairement le point $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ obtenu en **b.**

Le triangle MAB est donc d'aire maximale lorsque $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ et $\beta = \frac{4\pi}{3}$, autrement dit lorsqu'il est équilatéral. Son aire vaut alors $f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) = 2\,\sin^3\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

L'aire étant invariante par toute rotation de centre O (qui est une isométrie), on en déduit que les triangles d'aire maximale inscrits dans le cercle trigonométrique sont les triangles équilatéraux.

24. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, soit $f : U \to \mathbb{R}$ une **fonction convexe**, i.e. telle que

$$\forall (x,y) \in U^2 \quad \forall \lambda \in [0,1] \qquad f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leq (1-\lambda)\, f(x) + \lambda\, f(y)\ ,$$

et de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que tout point critique de f est un minimum global.

- -

Soit $x \in U$ un point critique de f, on a donc $\nabla f(x) = 0$. Fixons $y \in U$, l'objectif est de montrer que $f(y) \geq f(x)$.

Pour $\lambda \in [0,1]$, posons $g(\lambda) = (1-\lambda)\, f(x) + \lambda\, f(y) - f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big)$.

Alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ comme composée avec

$$\forall \lambda \in [0,1] \qquad g'(\lambda) = f(y) - f(x) - \Big(\nabla f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \mid y - x\Big)\ .$$

Comme $g(0) = 0$ et $g \geq 0$ sur $[0,1]$, on a $g'(0) \geq 0$, soit $f(y) - f(x) \geq 0$, CQFD!

Applications géométriques du calcul différentiel

25. Soit la surface $\mathcal{S} : x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Existe-t-il des points de $\mathcal{S}$ en lesquels la normale est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v} = (1,2,3)$?

- -

$\mathcal{S}$ est la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$ avec $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -2z$, donc tout point de $\mathcal{S}$ est régulier (le seul point critique de f est $(0,0,0)$ qui n'appartient pas à $\mathcal{S}$). En tout point $M\ (x,y,z)$ de $\mathcal{S}$, la normale est donc dirigée par le vecteur $\nabla f(M) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix}$. La normale en M est donc dirigée par $\overrightarrow{v}$ si et seulement si les vecteurs $\nabla f(M)$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, i.e. si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\big\{x = \lambda\ ,\ y = 2\lambda\ ,\ z = -3\lambda\big\}$. Mais le point M doit appartenir à $\mathcal{S}$, d'où l'équation $\lambda^2 + (2\lambda)^2 - (-3\lambda)^2 = 1$, soit $-4\lambda^2 = 1$, qui n'a pas de solution. Il n'y a donc aucun point de $\mathcal{S}$ en lequel la normale est dirigée par $\overrightarrow{v}$.

---

26. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $x^2 - y^2 + z^2 = 1$. Déterminer les points de $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent est parallèle au plan $P\ :\ 2x + y - z = 0$.

- -

On recherche les points de $\mathcal{S}$ en lesquels la normale est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{S}$ est la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$ avec $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 - 1$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z$, donc tout point de $\mathcal{S}$ est régulier (le seul point critique de f est $(0,0,0)$ qui n'appartient pas à $\mathcal{S}$). En tout point $M\ (x,y,z)$ de $\mathcal{S}$, la normale est donc dirigée par le vecteur $\nabla f(M) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 2z \end{pmatrix}$. La normale en M est donc dirigée par $\overrightarrow{v}$ si et seulement si les vecteurs $\nabla f(M)$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, i.e. si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\{2x = 2\lambda\ ,\ -2y = \lambda\ ,\ 2z = -\lambda\}$, soit $\{x = 2\alpha\ ,\ y = -\alpha\ ,\ z = -\alpha\}$ en posant $\alpha = \dfrac{\lambda}{2}$ (qui est toujours un réel arbitraire). Mais le point M doit appartenir à $\mathcal{S}$, d'où l'équation $(2\alpha)^2 - (-\alpha)^2 + (-\alpha)^2 = 1$, soit $4\alpha^2 = 1$, qui a deux solutions, $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\alpha = -\dfrac{1}{2}$. Il y a donc deux points de $\mathcal{S}$ en lesquels la normale est dirigée par $\overrightarrow{v}$, ce sont $M\Big(1, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\Big)$ et son symétrique par rapport à O, soit $M'\Big(-1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\Big)$.

---

27. Déterminer les plans tangents à la surface $\mathcal{S}$: $z^3 = xy$ qui contiennent la droite $\mathcal{D}$ d'équations

$$\big\{x = 2 \quad ; \quad y = 3z - 3\big\}\ .$$

- -

La surface $\mathcal{S}$ est définie implicitement par l'équation $F(x,y,z) = 0$, où $F(x,y,z) = z^3 - xy$. On a $\nabla F(x,y,z) = (-y, -x, 3z^2)$. Tous les points de $\mathcal{S}$ sont réguliers sauf l'origine O que nous allons exclure de cette étude. En un point $m_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de $\mathcal{S}$ autre que l'origine, $\mathcal{S}$ admet un plan tangent $\mathcal{T}$ d'équation

$$-y_0(x - x_0) - x_0(y - y_0) + 3z_0^2(z - z_0) = 0\ .$$

On veut que la droite $\mathcal{D}$ soit incluse dans le plan $\mathcal{T}$; or la droite $\mathcal{D}$ est paramétrée par

$$\big\{x = 2\ ,\ y = 3t - 3\ ,\ z = t\big\} \qquad (t \in \mathbb{R})\ .$$

On veut donc avoir

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad -y_0(2 - x_0) - x_0(3t - 3 - y_0) + 3z_0^2(t - z_0) = 0\ .$$

En identifiant les coefficients (*une fonction affine est nulle si et seulement si son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine sont nulles*), on a le système

$$\begin{cases} 2x_0y_0 - 2y_0 + 3x_0 - 3z_0^3 = 0 & \textbf{(E1)} \\ -3x_0 + 3z_0^2 = 0 & \textbf{(E2)} \end{cases}.$$

De **(E2)**, on tire $x_0 = z_0^2$, puis $z_0^2(z_0 - y_0) = 0$ en réinjectant dans l'équation de $\mathcal{S}$. On peut simplifier par z_0^2: en effet, si $z_0 = 0$ alors $x_0 = z_0^2$ est nul aussi, on peut avoir a priori y_0 quelconque puisque tous les points de la forme $(0, y_0, 0)$ sont dans $\mathcal{S}$, mais en ces points le plan tangent est le plan d'équation $x = 0$ qui manifestement ne contient pas la droite $\mathcal{D}$. Après cette simplification, il reste donc $y_0 = z_0$, on est donc en un point de $\mathcal{S}$ de la forme (z_0^2, z_0, z_0) avec $z_0 \neq 0$. L'équation **(E1)**, non encore exploitée, donne alors $z_0(z_0^2 - 3z_0 + 2) = 0$. En excluant toujours l'éventualité $z_0 = 0$, il reste deux possibilités: $z_0 = 1$ ou $z_0 = 2$.

Nous obtenons alors comme solutions:

- le point $(1,1,1)$ de $\mathcal{S}$ en lequel le plan tangent: $x+y-3z+1=0$ contient effectivement $\mathcal{D}$;

- le point $(4,2,2)$ de $\mathcal{S}$ en lequel le plan tangent: $x+2y-6z+4=0$ contient aussi $\mathcal{D}$.

28*. Soit $f(x,y)=\dfrac{1+x+y}{1+x^2+y^2}$.

a. Montrer que $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2 \quad |x+y|\leq \sqrt{2(x^2+y^2)}$. Montrer que $f(x,y)$ tend vers zéro quand $r=\sqrt{x^2+y^2}$ tend vers $+\infty$.

b. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation cartésienne $z(1+x^2+y^2)-1-x-y=0$. Déterminer les points de $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent est parallèle au plan xOy. En déduire les extremums globaux de f.

- -

a. L'inégalité demandée, équivalente à $(x+y)^2\leq 2(x^2+y^2)$, est une conséquence immédiate de $(x-y)^2\geq 0$. En posant $r=\sqrt{x^2+y^2}$, on en déduit donc la majoration $\left|f(x,y)\right|\leq \dfrac{1+r\sqrt{2}}{1+r^2}$ et, comme cette dernière expression tend vers 0 lorsque $r\to+\infty$, on a bien $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y)=0$. Comprendre par là que, si l'on se donne un $\varepsilon>0$, on pourra trouver un $R>0$ tel que $\sqrt{x^2+y^2}\geq R\Longrightarrow |f(x,y)|\leq\varepsilon$, autrement dit $|f(x,y)|$ sera majoré par ε en dehors du disque de centre O et de rayon R.

b. • On notera que $\mathcal{S}$ est aussi la surface d'équation $z=f(x,y)$, autrement dit c'est la surface représentative de la fonction de deux variables f.

Posons $g(x,y,z)=z(1+x^2+y^2)-1-x-y$, alors g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, on a

$$\nabla g(x,y,z)=\begin{pmatrix}2zx-1\\ 2yz-1\\ x^2+y^2+1\end{pmatrix}$$

et ce vecteur gradient ne s'annule jamais (sa troisième coordonnée est toujours strictement positive). Donc tout point de la surface $\mathcal{S}$ est régulier, et le plan tangent à $\mathcal{S}$ en $M(x,y,z)$ est parallèle à $x0y$ si et seulement si le vecteur $\nabla g(M)$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{e_3}$, donc si et seulement si $\begin{cases}2xz-1 = 0\\ 2yz-1 = 0\end{cases}$, soit encore si et seulement si $x=y=\dfrac{1}{2z}$, avec $z\neq 0$. En reportant dans l'équation de la surface $\mathcal{S}$, on obtient la condition sur z, après simplifications: $2z^2-2z-1=0$. On en déduit qu'il y a deux points de la surface $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent est “horizontal”, ce sont les points

$$A\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\,,\,-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\,,\,\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\qquad\text{et}\qquad B\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,,\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,,\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right).$$

• On a déjà noté que $g(x,y,z)=0 \iff z=f(x,y)$. Comme les points A et B ci-dessus appartiennent à $\mathcal{S}$, nous déduisons que la fonction f prend des valeurs strictement négatives et aussi des valeurs strictement positives: en effet, $A\in\mathcal{S}$, donc f prend la valeur strictement négative $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$; de même, $B\in\mathcal{S}$, donc f prend la valeur strictement positive $\beta = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. Soit ε un réel tel que $0 < \varepsilon < \min\{|\alpha|, \beta\}$, nous savons d'après **a.** qu'il existe un réel strictement positif R tel que $|f(x,y)| \leq \varepsilon$ en dehors du disque fermé $\overline{D}$ de centre O et de rayon R. Par ailleurs, $\overline{D}$ est un fermé borné ; comme f est continue sur ce fermé borné, elle y présente un minimum et un maximum qui sont aussi le minimum global et le maximum global de f sur le plan $\mathbb{R}^2$ (cela résulte du choix de ε). “Au-dessus” de ces points, la surface $\mathcal{S}$ a un plan tangent horizontal: en effet, $\mathcal{S}$ est aussi la surface d'équation $h(x,y,z) = 0$ en posant $h(x,y,z) = z - f(x,y)$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Les points extrémaux de f sont aussi des points critiques de f, i.e. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, ce qui entraîne

$$\frac{\partial h}{\partial x}\big(x,y,f(x,y)\big) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial h}{\partial y}\big(x,y,f(x,y)\big) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\ ,$$

et le vecteur $\nabla h\big(x,y,f(x,y)\big)$ est “vertical”, plus précisément il vaut $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Finalement, f atteint son minimum global en le point $\left(-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\ ,\ -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, en lequel elle prend la valeur $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$, et son maximum global en le point $\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\ ,\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$, en lequel elle prend la valeur $\beta = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.