DM de MATHÉMATIQUES numéro 10 COMMENTAIRES
PSI2 2024-2025

Les copies sont pour la plupart de plutôt bonne qualité, mais... les défauts sont toujours les mêmes: une insuffisance d'argumentation chez beaucoup d'entre vous.

Un exemple frappant: à plusieurs reprises (questions **4c.**, **6a.**, **8.** et **9.**), l'existence de l'exponentielle d'une matrice résulte essentiellement de la **continuité du produit matriciel**, il s'agit en effet de montrer que, si P est une matrice inversible et si une suite (A_n) de matrices converge vers une matrice A, alors la suite de matrices (PA_nP^{-1}) converge vers la matrice PAP^{-1}. Or, sur un total de 32 copies, j'en ai vu une seule(!!!) sur laquelle cette idée de “continuité du produit matriciel” était exprimée!!! Je rappelle qu'une formulation possible de cet argument-clé (dans ce sujet en tout cas) est de dire que l'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{cases}$ est linéaire en dimension finie, donc continue.

Reprenons les choses point par point.

1. L'hypothèse $n > |z|$ ne semble pas avoir été lue par tout le monde... surtout par celles et ceux qui ont probablement préféré recopier un corrigé du sujet original de Centrale sans trop se poser de questions! Cette hypothèse rajoutée garantit que le nombre $1 + \dfrac{z}{n}$ a une partie réelle strictement positive, ce qui permet d'appliquer la formule $\arg(x+iy) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, c'est expliqué dans trop peu de copies.

2. Il y a encore quelques erreurs dans les manipulations de limites et d'équivalents, mais sur ce sujet, il y a indéniablement du progrès depuis le début de l'année.

4.a. On peut bien sûr répondre à cette question en construisant de façon abstraite un isomorphisme entre $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, on l'avait fait en TD récemment, mais ici cela avait l'inconvénient de ne pas donner explicitement le vecteur Ω recherché, c'est un peu enquiquinant pour la question **4.c.** puisque cela ne donne pas la valeur de l'angle β de la rotation en fonction des données de l'énoncé (c'est-à-dire des réels p, q, r).

4.c. Mentionner la continuité du produit matriciel!

6.a. Mentionner la continuité du produit matriciel! (*bis*)

8. Mentionner la continuité du produit matriciel! (*ter*)

9. Mentionner la continuité du produit matriciel! (*quater*)

11. Attention à bien comprendre l'énoncé: dans cette question **11.**, l'exponentielle de la matrice nilpotente A doit être comprise comme la limite éventuelle de $\left(I_p + \dfrac{1}{n}A\right)^n$, et non comme limite éventuelle de l'expression $S_n(A)$ introduite dans la PARTIE D, et seulement pour la PARTIE D.

13.a. Rappeler que χ_A est de degré p exactement.

13.c. Voilà une question qui a été particulièrement mal traitée! “Rechercher les polynômes annulateurs de J_q” signifie en effet “rechercher **tous** les polynômes annulateurs de J_q”.
Il ne suffit donc pas de mentionner que X^q en est un, ni même de dire que les multiples de X^q sont des polynômes annulateurs! Il fallait montrer (et ce n'est pas difficile, *cf.* corrigé) qu'un polynôme est annulateur de J_q **si et seulement si** il est multiple de X^q.

Du coup, la suite de la question, i.e. la liberté de la famille $\big((xI_q + J_q)^i\big)_{0\leq i\leq q-1}$ a souvent été traitée aussi de façon maladroite, voire fausse... et je vous renvoie encore à mon corrigé. Enfin, parler d'une famille de matrices "échelonnée en degrés" ne veut évidemment rien dire!

14.b. IL fallait bien sûr appliquer la question **13.c.**... mais de façon judicieuse: ce qui joue ici le rôle de l'exposant q (qui est l'indice de nilpotence de la matrice J_q) est ici l'entier n_i, et non pas l'entier p, d'où de nombreuses erreurs de rédaction, il fallait décomposer les choses un peu plus.