DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 7

PSI2 2024-2025 **Durée: 3 heures** **24/03/2025**

PROBLÈME 1

Rappel de quelques notations.

Si n est un entier naturel avec $n \geq 2$, on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels qui sont antisymétriques. On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal qui est l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n, et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe constitué des matrices orthogonales directes, appelé groupe spécial orthogonal.

PARTIE A. Un peu de trigonométrie.

Soit θ un réel qui n'est pas de la forme $(2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$. On pose $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

1. Exprimer $\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et $\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ en fonction de t.

2. Exprimer $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de t.

PARTIE B. Étude de la dimension deux.

3. Soit t un réel. Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$?

4. Calculer explicitement la matrice $R = (I_2 + A)(I_2 - A)^{-1}$. Montrer que c'est une matrice de rotation, i.e. $R \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, et préciser l'angle de la rotation.

5. L'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{A}_2(\mathbb{R}) & \to \ \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \\ \quad A & \mapsto \ (I_2 + A)(I_2 - A)^{-1} \end{cases}$ est-elle injective ? Est-elle surjective ?

PARTIE C. Étude en dimension quelconque.

Soit n un entier naturel avec $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

6. Montrer que la seule valeur propre réelle possible de A est 0. En déduire que la matrice $I_n - A$ est inversible.

7. Montrer que les matrices $I_n + A$ et $(I_n - A)^{-1}$ commutent.

8. Soit la matrice $R = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}$.

a. Montrer que $\det(R) = 1$.

b. Montrer que $R \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

c. Montrer que le réel -1 n'est pas valeur propre de R.

d. Prouver la relation $A = (R + I_n)^{-1}(R - I_n)$.

9. L'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) & \to \ \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \\ \quad A & \mapsto \ (I_n + A)(I_n - A)^{-1} \end{cases}$ est-elle injective ? Est-elle surjective ?

PARTIE D. Étude en dimension trois.

L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée canonique, i.e. telle que la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est orthonormale directe. Soit $u \in E$ un vecteur unitaire, soit $\theta \in]-\pi, \pi[$, soit r la rotation d'axe D dirigé et orienté par u, et d'angle θ (si $\theta = 0$, alors $r = \mathrm{id}_E$). Soit $R \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ la matrice représentant canoniquement la rotation r.

10. Expliquer comment construire une base orthonormale directe $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de E dont le premier vecteur est u.

11. Donner la matrice M représentant la rotation r dans la base $\mathcal{B}$, puis exprimer R à l'aide de M et de la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{B}$.

12. En réutilisant les calculs faits dans la partie B, construire une matrice $B \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique telle que
$$M = (I_3 + B)(I_3 - B)^{-1} .$$

13. Exprimer, à l'aide de la matrice B ci-dessus et de la matrice de passage P, une matrice antisymétrique $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ telle que $R = (I_3 + A)(I_3 - A)^{-1}$. Y a-t-il unicité d'une telle matrice ?

14. Montrer que la matrice A représente canoniquement un endomorphisme de E de la forme $f_a : x \mapsto a \wedge x$, et préciser le vecteur a en fonction du vecteur u et de l'angle θ.

PROBLÈME 2

Soit U un ouvert du plan $\mathbb{R}^2$, soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. On appelle **laplacien** de f et note Δf la fonction définie sur U par
$$\forall (x, y) \in U \qquad \Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) .$$

Une application $f : U \to \mathbb{R}$ est dite **harmonique** si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, et de laplacien nul: $\Delta f = 0$.

PARTIE A. Quelques exemples

1. Dans cette question, U est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Prouver la relation
$$\Delta(f^2) = 2\left(f\, \Delta f + \|\nabla f\|^2\right) ,$$
où ∇f est le gradient de f et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$. Quelles sont les fonctions f telles que f et f^2 soient harmoniques sur U ?

2. Dans cette question, $U = \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ **à variables séparables**, i.e. il existe $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = u(x)\, v(y)$. On supposera de plus u et v non identiquement nulles.

a. On suppose f harmonique sur $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $u'' + \lambda u = 0$ et $v'' - \lambda v = 0$ sur $\mathbb{R}$.

b. En discutant suivant le signe de λ, donner la forme générale des fonctions harmoniques à variables séparables sur $\mathbb{R}^2$.

PARTIE B.

Dans cette partie, on considère l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, c'est-à-dire le plan privé de l'origine. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de deux variables est dite **à symétrie sphérique** s'il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ d'une variable, telle que
$$\forall (x, y) \in U \quad f(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) .$$

On recherche dans cette partie certaines fonctions propres à symétrie sphérique de l'opérateur laplacien, i.e. des fonctions telles que $\Delta f = \lambda f$ avec λ réel.

On se donne donc $f : U \to \mathbb{R}$ une application, on suppose qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\forall (x, y) \in U \quad f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$.

3. Soit λ un réel. Montrer que f est solution sur U de l'équation aux dérivées partielles $\Delta f = \lambda f$ si et seulement si g est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$(E_\lambda) \ : \qquad r\, g''(r) + g'(r) - \lambda\, r\, g(r) = 0\ .$$

4. Dans le cas $\lambda = 0$, résoudre l'équation (E_0). Quelles sont les fonctions harmoniques à symétrie sphérique sur U ? Quelles sont les fonctions harmoniques à symétrie sphérique sur le plan $\mathbb{R}^2$ tout entier ?

5. Dans cette question, on suppose $\lambda < 0$ et on pose $\lambda = -\omega^2$ avec $\omega > 0$.

a. Rechercher les solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_λ). On exprimera ces solutions à l'aide de la **fonction de Bessel** J_0 définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad J_0(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, \frac{t^{2k}}{4^k\,(k!)^2}\ .$$

b. Pour tout k entier naturel, on pose $W_k = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\sin\theta)^{2k}\, \mathrm{d}\theta$. Trouver une relation entre W_k et W_{k+1}. En déduire l'expression de W_k en fonction de k.

c. Montrer que, pour tout t réel, $J_0(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t\,\sin\theta)\, \mathrm{d}\theta$. En déduire que la fonction J_0 est bornée sur $\mathbb{R}$.

PARTIE C.

Dans cette partie, U est une partie ouverte bornée et convexe du plan $\mathbb{R}^2$. On note $K = \overline{U}$ son adhérence et $D = K \setminus U$ sa frontière.

6. Montrer que K et D sont des parties fermées et bornées du plan.

7. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une application continue. Justifier l'existence des réels

$$m = \min_{a\in K} f(a) \qquad \text{et} \qquad m' = \min_{c \in D} f(c)\ .$$

Quelle inégalité évidente peut-on écrire entre m et m' ?

8. Dans cette question, on considère $f : K \to \mathbb{R}$ continue, et on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U avec $\forall a \in U \quad \Delta f(a) < 0$.

a. Montrer qu'il n'existe aucun point a de U en lequel la matrice hessienne $H_f(a)$ est symétrique positive.

b. En déduire que $\forall a \in U \quad f(a) > \min\limits_{c\in D} f(c)$.

9. On considère maintenant $f : K \to \mathbb{R}$ continue, telle que la restriction de f à U est de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique.

a. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $a \in K$, on pose $h_\varepsilon(a) = f(a) - \varepsilon \|a\|^2$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que h_ε est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et calculer $\Delta h_\varepsilon(a)$ pour $a \in U$.

b. En utilisant la question **8.**, montrer que $\min\limits_{a\in K} f(a) = \min\limits_{c\in D} f(c)$.

10. Soient $f : K \to \mathbb{R}$ et $g : K \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur K, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmoniques sur U. On suppose que f et g coïncident sur D. Montrer que $f = g$ sur K.