CORRIGÉ du DS de MATHÉMATIQUES numéro 7

PSI2 2024-2025 **le 24/03/2025**

PROBLÈME 1

d'après CCP PSI, 2017

PARTIE A. Un peu de trigonométrie.

1. De la relation $1+\tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$, on déduit $\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1}{1+t^2}$. Puis, de $\sin = \tan\times\cos$, on déduit $\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$.

2. Les fomules de duplication donnent $\cos(\theta) = \cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Puis

$$\sin(\theta) = 2\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\,\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\,\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2t}{1-t^2}\ .$$

B. Étude de la dimension deux

3. On calcule $\chi_A = X^2+t^2$ donc

- si $t=0$, alors $\mathrm{Sp}(A)=\{0\}$, en fait $A=0_2$ tout bêtement ;
- si $t\neq 0$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}=\emptyset$ mais $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)=\{it,-it\}$ (deux valeurs propres simples dans $\mathbb{C}$).

En tout cas, le nombre 1 n'est jamais valeur propre, donc la matrice I_2-A est inversible, ce qui est rassurant pour la question suivante.

4. Il faut d'abord inverser $I_2-A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1\end{pmatrix}$. Pour cela, on peut écrire le système $\begin{cases} x+ty &= u \\ -tx+y &= v\end{cases}$ et, par des combinaisons linéaires des deux équations, le résoudre en

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{1+t^2}\,u - \dfrac{t}{1+t^2}\,v \\ y = \dfrac{t}{1+t^2}\,u + \dfrac{1}{1+t^2}\,v \end{cases}, \text{ d'où } \quad (I_2-A)^{-1} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1\end{pmatrix}\ .$$

On achève le calcul: $R = (I_2+A)(I_2-A)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & -\dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{pmatrix}$.

On peut vérifier par des calculs que $R\in SO_2(\mathbb{R})$, mais on peut aussi utiliser la partie A pour remarquer que, si l'on pose $\theta = 2\,\mathrm{Arctan}(t)\in\,]-\pi,\pi[$, on a alors $t=\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et $R = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. On reconnaît donc la matrice de la rotation d'angle $\theta = 2\,\mathrm{Arctan}(t)$ dans le plan euclidien orienté rapporté à une quelconque base orthonormale directe.

5. L'application φ n'est pas surjective car on n'obtient jamais la matrice de la rotation d'angle π qui est $-I_2$.

Elle est injective car, si t et t' sont deux réels tels que $\begin{pmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & -\dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-t'^2}{1+t'^2} & -\dfrac{2t'}{1+t'^2} \\ \dfrac{2t'}{1+t'^2} & \dfrac{1-t'^2}{1+t'^2}\end{pmatrix}$,

alors en posant $\theta = 2\,\mathrm{Arctan}(t)$ et $\theta' = 2\,\mathrm{Arctan}(t')$, les réels θ et θ' appartiennent à $]-\pi,\pi[$ et ils ont le même sinus et le même cosinus, ils sont donc égaux, puis $t=\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et $t'=\tan\left(\dfrac{\theta'}{2}\right)$ sont égaux aussi.

C. Étude en dimension quelconque

6. Soit λ une valeur propre réelle de $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, il existe alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$. On a alors $(X|AX) = (X|\lambda X) = \lambda \|X\|^2$ mézôssi, par symétrie du produit scalaire, $(X|AX) = (AX|X) = (AX)^\top X = X^\top A^\top X = -X^\top AX = -(X|AX)$, donc $(X|AX) = 0$ puis $\lambda = 0$ étant donné que $\|X\|^2 \neq 0$. Donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{0\}$.

En particulier, le réel 1 n'est pas valeur propre de A, donc $I_n - A$ est inversible.

7. Les matrices $I_n + A$ et $I_n - A$ commutent puisque $(I_n+A)(I_n-A) = (I_n-A)(I_n+A) = I_n - A^2$. En multipliant à droite et à gauche par $(I_n - A)^{-1}$, on obtient

$$(I_n - A)^{-1}(I_n + A) = (I_n + A)(I_n - A)^{-1} .$$

8.a. On a $\det(R) = \dfrac{\det(I_n + A)}{\det(I_n - A)} = \dfrac{\det(I_n + A)}{\det\big((I_n + A)^\top\big)} = 1$ puisqu'une matrice et sa transposée ont le même déterminant.

b. Comme $(M^\top)^{-1} = (M^{-1})^\top$ pour toute matrice M inversible, on calcule

$$\begin{aligned}
R^\top R &= \big((I_n - A)^{-1}\big)^\top (I_n + A)^\top (I_n + A)(I_n - A)^{-1} \\
&= \big((I_n - A)^\top\big)^{-1} (I_n - A)(I_n + A)(I_n - A)^{-1} \\
&= (I_n + A)^{-1}(I_n - A)(I_n + A)(I_n - A)^{-1} \\
&= I_n
\end{aligned}$$

puisque l'on peut faire commuter les matrices. Donc R est orthogonale, et $R \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ d'après **a.**

c. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $RX = -X$, soit $(I_n - A)^{-1}(I_n + A)X = -X$. En multipliant à gauche par $I_n - A$, on a la relation $(I_n + A)X = -(I_n - A)X$, soit $X = -X$ donc $X = 0$, le réel -1 n'est donc pas valeur propre de R.

d. De la définition de R, on déduit $R(I_n - A) = I_n + A$, soit $R - RA = I_n + A$, soit encore $R - I_n = (R + I_n)A$, donc $A = (R + I_n)^{-1}(R - I_n)$. En effet, la matrice $R + I_n$ est inversible puisque -1 n'est pas valeur propre de R.

9. L'application φ est injective car, si $R \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ admet un antécédent A par φ, autrement dit s'il existe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(A) = R$, on a nécessairement $A = (R + I_n)^{-1}(R - I_n)$ d'après **8.d.**, ce qui assure l'unicité de A.

Mais elle n'est pas surjective car, si R est une matrice de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ admettant -1 pour valeur propre (et il en existe, considérer par exemple $R = \mathrm{diag}(-1, -1, 1, 1, \cdots, 1)$), alors R n'admet aucun antécédent par φ d'après **8.c.**

C. Étude en dimension trois

10. On prend un vecteur v unitaire et orthogonal à u (une infinité de choix possibles), et on complète par $w = u \wedge v$ (là, il y a un seul choix possible).

11. D'après le cours, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Par les formules de changement de base, on a $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(r) = PMP^{-1} = PMP^\top$ puisque la matrice P est orthogonale, en tant que matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale.

12. En reprenant les calculs de la question **4.** et en effectuant des produits par blocs, on voit que si l'on pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix}$ où t est un réel, alors

$$(I_3 + B)(I_3 - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & -\dfrac{2t}{1+t^2} \\ 0 & \dfrac{2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{pmatrix},$$

Pour obtenir ainsi la matrice M, il faut choisir le réel t de façon que $\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \cos\theta$ et $\dfrac{2t}{1+t^2} = \sin\theta$, ce qui est réalisé si on prend $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

13. La matrice $A = PBP^{-1} = PBP^\top$ convient. En effet, elle est bien antisymétrique puisque B l'est et $A^\top = (PBP^\top)^\top = PB^\top P^\top = -PBP^\top = -A$ et on a

$$\begin{aligned} (I_3 + A)(I_3 - A)^{-1} &= (I_3 + PBP^{-1})(I_3 - PBP^{-1})^{-1} \\ &= P(I_3 + B)P^{-1}\left(P(I_3 - B)P^{-1}\right)^{-1} \\ &= P(I_3 + B)P^{-1}\, P(I_3 - B)^{-1}P^{-1} \;=\; PMP^{-1} \;=\; R\,. \end{aligned}$$

Il y a unicité d'une telle matrice A d'après **Q9.** En fait, $A = (R + I_n)^{-1}(R - I_n)$.

14. L'endomorphisme f canoniquement associé à A est représenté dans la base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ par la matrice $B = P^{-1}AP$ introduite en **Q12.** On a donc $f(u) = 0$, $f(v) = tw$ et $f(w) = -tv$, ce qui détermine entièrement f et correspond à $f : x \mapsto a \wedge x$, avec $a = t\,u = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\, u$.

PROBLÈME 2

en partie d'après Centrale MP, 2018

PARTIE A. Quelques exemples.

1. Par dérivation d'un produit, on a $\dfrac{\partial(f^2)}{\partial x} = 2f\,\dfrac{\partial f}{\partial x}$, puis

$$\frac{\partial^2(f^2)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2f\,\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2f\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

et un résultat analogue pour $\dfrac{\partial^2(f^2)}{\partial y^2}$. En ajoutant les deux, on obtient bien

$$\Delta(f^2) = 2f\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 2f\,\Delta f + 2\,\|\nabla f\|^2 .$$

Si f et f^2 sont harmoniques sur U, alors $\Delta f = \Delta(f^2) = 0$ puis, par différence, $\nabla f = 0$ en tout point de U, donc f est une fonction constante sur U (comme U est un ouvert convexe). Réciproquement, les fonctions constantes satisfont bien sûr $\Delta f = \Delta(f^2) = 0$.

2.a. On calcule $\Delta f(x,y) = u''(x)\,v(y) + u(x)\,v''(y)$, et ceci doit être nul pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $v(y_0) \neq 0$, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad u''(x) + \frac{v''(y_0)}{v(y_0)}\,u(x) = 0 ,$$

donc u est solution de l'équation différentielle $u'' + \lambda u = 0$ avec $\lambda = \dfrac{v''(y_0)}{v(y_0)}$.

De même, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u(x_0) \neq 0$, on a alors

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad v''(y) + \frac{u''(x_0)}{u(x_0)}\,v(y) = 0 ,$$

donc v est solution de l'équation différentielle $v'' + \mu v = 0$ avec $\mu = \dfrac{u''(x_0)}{u(x_0)}$.

La relation $\Delta f(x_0,y_0) = 0$ donne enfin $\lambda + \mu = 0$, donc on a bien $v'' - \lambda v = 0$.

b. On fait une disjonction de cas:

- si $\lambda = 0$, alors u et v sont des fonctions affines, donc $f(x,y) = (Ax+B)(Cy+D)$, où A, B, C, D sont des réels arbitraires ;

- si $\lambda > 0$, posons $\omega = \sqrt{\lambda}$, il existe alors des constantes réelles A, B, C, D telles que

$$f(x,y) = u(x)v(y) = \big(A\,\cos(\omega x) + B\,\sin(\omega x)\big)\,\big(C\,\mathrm{ch}(\omega y) + D\,\mathrm{sh}(\omega y)\big) ;$$

- si $\lambda < 0$, posons $\omega = \sqrt{-\lambda}$, il existe alors des constantes réelles A, B, C, D telles que

$$f(x,y) = u(x)v(y) = \big(A\,\mathrm{ch}(\omega x) + B\,\mathrm{sh}(\omega x)\big)\,\big(C\,\cos(\omega y) + D\,\sin(\omega y)\big) .$$

Il est immédiat de vérifier que chacune des fonctions listées ci-dessus est bien solution du problème posé, i.e. est harmonique à variables séparables sur $\mathbb{R}^2$.

PARTIE B.

3. En posant $r = \sqrt{x^2+y^2}$, on calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x} = g'(r)\,\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}\,g'(r) = x \cdot \dfrac{1}{r} \cdot g'(r)$, puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 1 \cdot \frac{1}{r} \cdot g'(r) + x \cdot \Big(-\frac{1}{r^2}\Big)\,\frac{\partial x}{\partial r} \cdot g'(r) + x \cdot \frac{1}{r} \cdot g''(r)\,\frac{\partial x}{\partial r} \\ &= \frac{g'(r)}{r} - \frac{x^2}{r^3}\,g'(r) + \frac{x^2}{r^2}\,g''(r)\ .\end{aligned}$$

De même, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{g'(r)}{r} - \dfrac{y^2}{r^3}\,g'(r) + \dfrac{y^2}{r^2}\,g''(r)$. En ajoutant les deux, et en tenant compte de $x^2+y^2 = r^2$, il vient $\Delta f(x,y) = g''(r) + \dfrac{g'(r)}{r}$, donc l'équation de Helmholtz $\Delta f = \lambda f$ devient

$$(E_\lambda)\ :\qquad r\,g''(r) + g'(r) - \lambda\,r\,g(r) = 0\ .$$

4. • Si $\lambda = 0$, on a

$$(E_0) \iff r\,g''(r) + g'(r) = 0 \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\big(r\,g'(r)\big) = 0 \iff r\,g'(r) = C \iff g'(r) = \frac{C}{r}\ ,$$

ce qui conduit à $g(r) = C\,\ln(r) + D$, où C et D sont deux constantes arbitraires.

• Si $f : U \to \mathbb{R}$ est harmonique et à symétrie sphérique, on a $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$, soit $f(x,y) = C'\,\ln(x^2+y^2) + D$, où C' et D sont deux réels.

• Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est harmonique et à symétrie sphérique, alors sa restriction à l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ vérifie les mêmes conditions, donc est de la forme ci-dessus. Mais cette restriction doit pouvoir être prolongée en une fonction continue (et même de classe $\mathcal{C}^2$) sur $\mathbb{R}^2$, ce qui impose $C' = 0$. Donc f est constante sur le plan. Réciproquement, toute fonction constante sur $\mathbb{R}^2$ est évidemment harmonique et à symétrie sphérique.

5.a. On a maintenant $(E_\lambda)\ :\quad r\,g''(r) + g'(r) + \omega^2\,r\,g(r) = 0$ avec $\omega > 0$.

On recherche les solutions développables en série entière sur un intervalle $]-R,R[$ avec $R > 0$. Posons $g(r) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$, donc $r\,g(r) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} r^n$, puis $g'(r) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} r^n$ et enfin $r\,g''(r) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} r^n$. On réinjecte tout cela dans (E_λ), cela donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} r^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} r^n + \omega^2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} r^n = 0\ ,$$

soit, d'après l'unicité du développement en série entière,

$$\left\{\begin{array}{lrcl} & a_1 &=& 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* & (n+1)^2 a_{n+1} + \omega^2\,a_{n-1} &=& 0 \end{array}\right.\ .$$

On en déduit (en partant de $a_1 = 0$, puis de proche en proche avec la deuxième relation) que $a_{2p+1} = 0$ pour tout p entier naturel. On n'a aucune condition portant sur a_0 qui est donc arbitraire, et la deuxième relation donne

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad a_{2p} = \frac{(-\omega^2)^p}{\big(2 \times 4 \times \cdots \times (2p)\big)^2}\, a_0 = \frac{(-1)^p\, \omega^{2p}}{4^p\, (p!)^2}\ .$$

Finalement (on vérifie facilement que le rayon de convergence est infini),

$$\forall r \in \mathbb{R} \qquad g(r) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\, \omega^{2p}}{4^p\, (p!)^2}\, r^{2p} = a_0\, J_0(\omega r)\ .$$

Remarque. On n'a pas obtenu toutes les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle (E_λ), on sait que celles-ci forment un espace vectoriel de dimension deux. On n'a ici déterminé que celles qui sont développables en série entière et qui, vu leur expression à l'aide d'une constante arbitraire a_0, en forment seulement un sous-espace vectoriel de dimension 1. Les fonctions de deux variables

$$f : (x, y) \mapsto g\big(\sqrt{x^2 + y^2}\big) = a_0\, J_0\big(\omega\, \sqrt{x^2 + y^2}\big)$$

sont donc **des** solutions à symétrie sphérique de l'équation $\Delta f = -\omega^2 f$, mais ce ne sont pas **toutes les** solutions puisque l'équation différentielle (E_λ) n'a pas été complètement résolue.

b. Le lecteur averti (qui en vaut deux) aura reconnu des intégrales de Wallis. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
W_{k+1} &= \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2\theta)\, (\sin\theta)^{2k}\, \mathrm{d}\theta \\
&= W_k \ - \int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta)\, \big(\cos\theta\, (\sin\theta)^{2k}\big)\, \mathrm{d}\theta \\
&= W_k \ - \left(\Big[\frac{\cos\theta\, (\sin\theta)^{2k+1}}{2k+1}\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2k+1} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin\theta)^{2k+2}\, \mathrm{d}\theta\right) \\
&= W_k - \frac{1}{2k+1}\, W_{k+1}\ .
\end{aligned}$$

On a donc $\dfrac{2k+2}{2k+1}\, W_{k+1} = W_k$, ou encore $W_{k+1} = \dfrac{2k+1}{2k+2}\, W_k$.

Partant de $W_0 = 2\pi$, on obtient alors, de proche en proche,

$$W_k = \frac{(2k-1) \times (2k-3) \times \cdots \times 3 \times 1}{(2k) \times (2k-2) \times \cdots \times 4 \times 2}\, W_0 = \frac{(2k)!}{4^k\, (k!)^2} \times 2\pi\ .$$

c. Posons $g(t) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t \sin\theta)\, \mathrm{d}\theta$. La fonction cosinus étant développable en série entière sur $\mathbb{R}$, on peut écrire

$$\cos(t\, \sin\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, t^{2k}\, (\sin\theta)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\theta)$$

où, t étant fixé, on pose $f_k(\theta) = \dfrac{(-1)^k\, t^{2k}\,(\sin\theta)^{2k}}{(2k)!}$. Chaque fonction f_k est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$, et on a facilement sur ce segment $\|f_k\|_\infty = \dfrac{t^{2k}}{(2k)!}$ qui est le terme général d'une série convergente (DSE du cosinus hyperbolique). On a montré la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_k$ sur le **segment** $[-\pi, \pi]$, ce qui autorise à intervertir série et intégrale. Donc

$$g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_k(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, t^{2k}}{(2k)!}\, W_k = 2\pi \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, t^{2k}}{4^k\,(k!)^2} = 2\pi\, J_0(t)\ .$$

On a ainsi prouvé la relation $J_0(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t\,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ pour tout t réel.

On en déduit que $\big|J_0(t)\big| \le \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big|\cos(t\,\sin\theta)\big|\,\mathrm{d}\theta \le \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta = 1$. La fonction J_0 est bornée sur $\mathbb{R}$.

PARTIE C.

6. Soit (a_n) une suite de points de $K = \overline{U}$, supposée convergente de limite a. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, il existe un entier N tel que $\|a_N - a\| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$. Comme $a_N \in K = \overline{U}$, il existe un point b de U tel que $\|b - a_N\| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$. Par l'inégalité triangulaire, on a $\|a - b\| \le \varepsilon$, donc $\overline{B}(a, \varepsilon)\ \cap\ U \ne \emptyset$. On a montré que toute boule centrée en a rencontre U, ce qui signifie que le point a est adhérent à U, donc $a \in K$. La partie K est donc “stable par passage à la limite”, c'est-à-dire fermée.

Enfin, $D = K \setminus U = K\ \cap\ (\mathbb{R}^2 \setminus U)$ est l'intersection de deux fermés (le deuxième car c'est le complémentaire d'un ouvert), c'est donc aussi un fermé.

Comme U est supposé borné: il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall a \in U \quad \|a\| \le M$, les inégalités larges passant à la limite et la norme étant continue car elle est 1-lipschitzienne, la majoration $\|a\| \le M$ reste vraie pour tout point a de K qui est limite d'une suite de points de U. Donc la partie K est bornée, et D aussi puisque $D \subset K$.

7. L'application f est continue, les ensembles K et D sont des parties fermées bornées d'un espace vectoriel de dimension finie, le résultat demandé résulte donc du théorème des bornes atteintes. Comme $D \subset K$, on a $m' \ge m$.

8.a. En tout point a de U, on a $\Delta f(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) < 0$, l'une au moins de ces deux dérivées partielles secondes est donc strictement négative. Supposons $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$, soit $e_1 = (1, 0)$ le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors

$$e_1^\top\, H_f(a)\, e_1 = (\,1 \quad 0\,) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0\ ,$$

la matrice symétrique $H_f(a)$ n'est donc pas positive.

b. La fonction f, qui est de classe $\mathcal{C}^2$ dans l'ouvert U, n'admet donc aucun minimum local dans U.

S'il existait un point a dans U tel que $f(a) \leq \min\limits_D f$, alors le minimum global de f sur K serait atteint en au moins un point b de U, mais ce point b serait aussi un minimum local de f dans U, et on vient de montrer que ceci est impossible.

9.a. Pour $a = (x, y) \in K$, on a $h_\varepsilon(x, y) = f(x, y) - \varepsilon(x^2 + y^2)$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction h_ε est encore de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Un calcul immédiat donne

$$\forall a \in U \qquad \Delta h_\varepsilon(a) = \Delta f(a) - 4\varepsilon = -4\varepsilon$$

puisque f est harmonique sur U.

b. L'application h_ε est continue sur K, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U avec $\Delta h_\varepsilon < 0$ sur U. On peut donc appliquer la question **8.** qui nous dit que

$$\forall a \in U \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad h_\varepsilon(a) > \min_{c \in D} h_\varepsilon(c) \ ,$$

soit
$$\forall a \in U \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad f(a) - \varepsilon \|a\|^2 > \min_{c \in D} \big(f(c) - \varepsilon \|c\|^2\big) \ .$$

Mais D est une partie bornée du plan, il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall c \in D \quad \|c\| \leq M$. Donc, pour $c \in D$, on a $h_\varepsilon(c) = f(c) - \varepsilon \|c\|^2 \geq f(c) - \varepsilon M^2$. On en déduit

$$\forall a \in U \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad f(a) - \varepsilon \|a\|^2 > \min_{c \in D} f(c) - \varepsilon M^2 \ .$$

En faisant tendre ε vers zéro, on obtient

$$\forall a \in U \qquad f(a) \geq \min_{c \in D} f(c) \ .$$

On en déduit que le minimum de f sur K est atteint en un point du "bord" D, donc $\min\limits_{a \in K} f(a) = \min\limits_{c \in D} f(c)$.

10. Posons $h = f - g$, alors h est continue sur K, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur U, et elle est nulle sur le bord D. Donc $\forall a \in U \quad h(a) \geq \min\limits_{c \in D} h(c) = 0$ d'après **9.b.**, la fonction h est donc positive sur K. En remplaçant h par $-h$ puisque f et g jouent des rôles symétriques, on a aussi $h \leq 0$ sur K, donc $h = 0$ et $f = g$ sur K.