CORRIGÉ du SUJET
"Distance entre deux distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$"

I. Nombre de points fixes d'une permutation.

1. Comme $\mathrm{Card}(\mathcal{S}_n) = n!$, on a $0 \leq d_n \leq n!$, donc $\left|\dfrac{d_n}{n!}\right| \leq 1$. On en déduit que $R \geq R'$, où $R' = 1$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$.

2. Pour construire une permutation de $[\![1,n]\!]$ ayant k points fixes, on choisit l'ensemble A de ses points fixes, de cardinal k, il y a $\dbinom{n}{k}$ choix possibles. Ensuite, on choisit un dérangement du complémentaire $B = [\![1,n]\!] \setminus A$, et il y a d_{n-k} possibilités. Le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement k points fixes est donc $\dbinom{n}{k}\, d_{n-k}$.

L'univers $\mathcal{S}_n$, de cardinal $n!$, étant muni de la probabilité uniforme P_n, on a donc

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \qquad P_n(X_n = k) = \frac{\big|\{X_n = k\}\big|}{|\mathcal{S}_n|} = \frac{\dbinom{n}{k}\, d_{n-k}}{n!} = \frac{d_{n-k}}{k!\,(n-k)!}\ .$$

3. Comme s et $x \mapsto e^x$ sont développables en série entière sur $]-1,1[$, par produit de Cauchy, on obtient sur cet intervalle

$$\begin{aligned} s(x)\,e^x &= \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{d_p}{p!}\,x^p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^q}{q!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{k!\,(n-k)!}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} P_n(X_n = k)\Big)\, x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\ . \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in]-1,1[$, on a $s(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$. Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} s(x) = +\infty$, on ne peut pas prolonger s en une fonction continue sur $]-R,R[$ avec $R > 1$. On en déduit que $R = 1$.

4. Pour $x \in]-1,1[$, on a donc $(1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}\,x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,x^n$ soit, après réorganisation du premier membre,

$$d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!}\right) x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,x^n\ .$$

Par identification (unicité du développement en série entière), on retrouve $d_0 = 1$ et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}\ .$$

Changeons de notations: fixons $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{d_k}{k!} - \dfrac{d_{k-1}}{(k-1)!} = \dfrac{(-1)^k}{k!}$.
En sommant ces inégalités et en observant le télescopage dans le membre de gauche, il vient

$$\frac{d_n}{n!} - d_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\ .$$

Comme $d_0 = 1$, on conclut que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \ .$$

5. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$P_n(X_n = k) = \frac{1}{k!} \ \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \ .$$

6. Comme $U_i(\mathcal{S}_n) = \{0, 1\}$, U_i est une variable de Bernoulli dont le paramètre est

$$P_n(U_i = 1) = P_n\big(\sigma(i) = i\big) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \ .$$

En effet, il y a autant de permutations de $[\![1, n]\!]$ fixant l'élément i que de permutations de $[\![1, n]\!] \setminus \{i\}$, soit $(n-1)!$. Donc $U_i \sim \mathcal{B}\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

Si $i \neq j$, la variable U_iU_j prend aussi ses valeurs dans $\{0, 1\}$, c'est donc encore une variable de Bernoulli, et son paramètre est

$$P_n(U_iU_j = 1) = P_n(U_i = 1, U_j = 1) = P_n\big(\sigma(i) = i, \sigma(j) = j\big) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} \ .$$

En effet, ici aussi, si $i \neq j$, il y a autant de permutations de $[\![1, n]\!]$ fixant les éléments i et j que de permutations de $[\![1, n]\!] \setminus \{i, j\}$, soit $(n-2)!$.

7. Il est immédiat que $X_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i$.

De la question précédente, on déduit que $\mathrm{E}(U_i) = \dfrac{1}{n}$ et $\mathrm{V}(U_i) = \dfrac{n-1}{n^2}$.

Par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(U_i) = n \, \frac{1}{n} = 1$.

Ensuite, $\mathrm{V}(X_n) = \mathrm{V}\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(U_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(U_i, U_j)$.

Et, pour $i \neq j$, on a $\mathrm{Cov}(U_i, U_j) = \mathrm{E}(U_iU_j) - \mathrm{E}(U_i)\mathrm{E}(U_j)$. Or, $\mathrm{E}(U_iU_j) = \dfrac{1}{n(n-1)}$ d'après la question précédente, ce qui donne $\mathrm{Cov}(U_i, U_j) = \dfrac{1}{n(n-1)} - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n^2(n-1)}$.

Comme il y a $n(n-1)$ couples (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on termine le calcul:

$$\mathrm{V}(X_n) = n \cdot \frac{n-1}{n^2} + n(n-1) \cdot \frac{1}{n^2(n-1)} = 1 \ .$$

8. On a $P_n(X_n = k) = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y_k = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{e^{-1}}{k!}$.

On reconnaît la distribution de probabilités d'une loi de Poisson de paramètre 1, donc $Y \sim \mathcal{P}(1)$.

9. D'après le cours (ou par un calcul immédiat), on a $G_Y(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k)\, s^k = e^{s-1}$, la série entière ayant un rayon de convergence infini. D'autre part, comme X_n prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$, sa fonction génératrice est polynomiale, on a pour tout s réel,

$$\begin{aligned}
G_{X_n}(s) &= \sum_{k=0}^{n} P_n(X_n = k)\, s^k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \right) s^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j=k}^{n} \frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!} \right) s^k \qquad \textit{translation d'indice} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} s^k \right) \qquad \textit{interversion des sommes} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{(s-1)^j}{j!} .
\end{aligned}$$

On observe bien que, pour tout s réel fixé, $\lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(s) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(s-1)^j}{j!} = e^{s-1} = G_Y(s)$.

II. Convergence en variation totale.

10. Pour tout k, on a $\big|x(k) - y(k)\big| \leq \big|x(k)\big| + \big|y(k)\big| = x(k) + y(k)$. Comme les séries $\sum_{k\geq 0} x(k)$ et $\sum_{k\geq 0} y(k)$ convergent et ont pour somme 1, par comparaison de séries à termes positifs, on déduit la convergence de la série $\sum_{k\geq 0} \big|x(k) - y(k)\big|$ et la majoration de sa somme par 2.

Il est clair, au passage, qu'une distribution de probabilités prend ses valeurs dans $[0,1]$. Donc $d_{VT}(x,y)$ existe et appartient à $[0,1]$.

Si $x = y$, alors $d_{VT}(x,y) = 0$. Réciproquement, comme une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, si $d_{VT}(x,y) = 0$, alors $\big|x(k) - y(k)\big| = 0$ pour tout k, donc $x = y$ (*axiome de séparation*).

La *symétrie* $d_{VT}(y,x) = d_{VT}(x,y)$ est immédiate.

Enfin pour l'*inégalité triangulaire*:

$$\begin{aligned}
2\, d_{VT}(x,z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \big|x(k) - z(k)\big| = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big| \big(x(k) - y(k)\big) + \big(y(k) - z(k)\big) \Big| \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\big|x(k) - y(k)\big| + \big|y(k) - z(k)\big| \Big) = 2\, \big(d_{VT}(x,y) + d_{VT}(y,z) \big) .
\end{aligned}$$

11. On a ici

$$2\, d_{VT}(p_X, p_Y) = \big|p_X(0) - p_Y(0)\big| + \big|p_X(1) - p_Y(1)\big| = \big|(1-\lambda) - (1-\mu)\big| + |\lambda - \mu| = 2\, |\lambda - \mu| ,$$

donc $d_{VT}(x,y) = |\lambda - \mu|$.

12. Puisque $p_X(k)$ est nul pour $k \geq 2$, on calcule

$$\begin{aligned}
2\, d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) &= \left|p_X(0) - \pi_\lambda(0)\right| + \left|p_X(1) - \pi_\lambda(1)\right| + \sum_{k=2}^{+\infty} \pi_\lambda(k) \\
&= \left|1 - \lambda - e^{-\lambda}\right| + \left|\lambda - \lambda\, e^{-\lambda}\right| + e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} - (1-\lambda) + \lambda\,(1 - e^{-\lambda}) + e^{-\lambda}\,(e^{\lambda} - 1 - \lambda)\ .
\end{aligned}$$

On a utilisé l'inégalité $e^{-\lambda} \geq 1 - \lambda$ qui résulte de la convexité de la fonction exponentielle. Après simplifications, il reste $d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) = \lambda\,(1 - e^{-\lambda})$.

Avec le même argument de convexité, $1 - e^{-\lambda} \leq \lambda$, donc $d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) \leq \lambda^2$.

13. Il suffit d'appliquer la définition, sachant que $p_{X_n}(k)$ est nul pour $k > n$:

$$\begin{aligned}
2\, d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) &= \sum_{k=0}^{n} \left|p_{X_n}(k) - \pi_1(k)\right| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \pi_1(k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} - \frac{e^{-1}}{k!} \right| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + e^{-1}\, r_n\ ,
\end{aligned}$$

où l'on pose $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. On a utilisé $e^{-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$.

14. Par un décalage d'indice, on écrit $r_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1+k)!}$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(n+1+k)! = (n+1)!\,(n+2)(n+3)\cdots(n+k+1) \geq (n+1)!\,(n+2)^k\ .$$

Donc, en reconnaissant une série géométrique,

$$r_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!\,(n+2)^k} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k} = \frac{n+2}{n+1}\, \frac{1}{(n+1)!}\ .$$

Comme, par ailleurs, $r_n \geq \dfrac{1}{(n+1)!}$, l'encadrement

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq r_n \leq \frac{n+2}{n+1}\, \frac{1}{(n+1)!}\ ,$$

les termes extrêmes étant équivalents entre eux, donne $r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n+1)!}$.

15. La suite $\left(\dfrac{1}{i!}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ étant décroissante de limite nulle, le théorème spécial des séries alternées permet de majorer en valeur absolue le reste d'ordre $n-k$ de la série $\sum \dfrac{(-1)^i}{i!}$ par le premier terme négligé, à savoir $\left|\displaystyle\sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^i}{i!}\right| \leq \dfrac{1}{(n-k+1)!}$. On déduit

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

en concluant par la formule du binôme. Finalement, de **13.**, on déduit la majoration

$$0 \leq d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) \leq \frac{2^n}{(n+1)!} + \frac{r_n}{2e}\ .$$

De **14.**, on déduit que r_n est négligeable devant $\dfrac{2^n}{(n+1)!}$ lorsque $n \to +\infty$. On conclut donc que

$$d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right)\ .$$

III. Autres estimations de distances en variation totale.

16. Posons $z = x * y$. On a clairement $z(k) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puis, par produit de Cauchy,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z(k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i+j=k} x(i)\,y(j)\right) = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} x(i)\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} y(j)\right) = 1\times 1 = 1\ ,$$

donc $x * y \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}$.

17. Pour tout k entier naturel, on a (union disjointe):

$$\{X+Y=k\} = \bigsqcup_{i+j=k} \big(\{X=i\} \cap \{Y=j\}\big)\ ,$$

donc par additivité finie, et les variables X et Y étant indépendantes,

$$\begin{aligned} p_{X+Y}(k) &= P(X+Y=k) = \sum_{i+j=k} P(X=i, Y=j) \\ &= \sum_{i+j=k} P(X=i)\,P(Y=j) = \sum_{i+j=k} p_X(i)\,p_Y(j) \\ &= (p_X * p_Y)(k)\ . \end{aligned}$$

18. Soit k un entier naturel. On a alors

$$\begin{aligned}
\left|(x*y)(k)-(u*v)(k)\right| &= \left|\sum_{i+j=k}\big(x(i)y(j)-u(i)v(j)\big)\right| \\
&= \left|\sum_{i+j=k}\Big(y(j)\,\big(x(i)-u(i)\big)+u(i)\,\big(y(j)-v(j)\big)\Big)\right| \\
&\le \sum_{i+j=k}\left|y(j)\,\big(x(i)-u(i)\big)+u(i)\,\big(y(j)-v(j)\big)\right| \\
&\le \sum_{i+j=k} y(j)\,\left|x(i)-u(i)\right| + \sum_{i+j=k} u(i)\,\left|y(j)-v(j)\right|
\end{aligned}$$

en utilisant diverses inégalités triangulaires et la positivité des nombres $u(i)$ et $y(j)$.

19. Calculons encore un peu, en utilisant la majoration obtenue en question **18.**:

$$\begin{aligned}
2\,d_{VT}(x*y,u*v) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left|(x*y)(k)-(u*v)(k)\right| \\
&\le \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i+j=k} y(j)\,\left|x(i)-u(i)\right|\right)+\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i+j=k} u(i)\,\left|y(j)-v(j)\right|\right) .
\end{aligned}$$

Ce calcul peut être fait dans $[0,+\infty]$ puisque tous les termes sont positifs, ce qui évite de se poser des problèmes de convergence a priori. On reconnaît alors de nouveau des produits de Cauchy. Donc

$$\begin{aligned}
2\,d_{VT}(x*y,u*v) &\le \left(\sum_{i=0}^{+\infty}\left|x(i)-u(i)\right|\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}y(j)\right)+\left(\sum_{i=0}^{+\infty}u(i)\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\left|y(j)-v(j)\right|\right) \\
&= 2\,d_{VT}(x,u) \quad\times\quad 1 \quad+\quad 1 \quad\times\quad 2\,d_{VT}(y,v) ,
\end{aligned}$$

ce qui est bien la majoration souhaitée.

20. Soit par un calcul direct, soit en considérant la somme de deux variables de Poisson indépendantes sur un espace probabilisé, on a facilement la relation

$$\forall(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \pi_\alpha*\pi_\beta=\pi_{\alpha+\beta} .$$

Sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, considérons n variables de Bernoulli indépendantes, de même paramètre λ, notées $X_1,\,\cdots,\,X_n$. Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, soit $S_k=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}X_i$. Il est alors connu que $S_k\sim\mathcal{B}(k,\lambda)$. Donc S_n a la même loi que U, et $p_{S_n}=p_U$.

On peut montrer par récurrence finie sur $k\in[\![1,n]\!]$ que $d_{VT}(p_{S_k},\pi_{k\lambda})\le k\lambda^2$.

- initialisation pour $k=1$: c'est la question **12.** puisque $S_1=X_1$ est une variable de Bernoulli ;

- hérédité: soit $k\in[\![1,n-1]\!]$, supposons la propriété vraie au rang k. Comme $S_{k+1}=S_k+X_{k+1}$ avec $S_k\perp\!\!\!\perp X_{k+1}$ d'après le lemme des coalitions, on a

$$p_{S_{k+1}} = p_{S_k} * p_{X_{k+1}} = p_{S_k} * p_{X_1}\ .$$

Par ailleurs, $\pi_{(k+1)\lambda} = \pi_{k\lambda} * \pi_\lambda$. De la question **19.** et de l'hypothèse de récurrence, on déduit alors

$$\begin{aligned} d_{VT}(p_{S_{k+1}}, \pi_{(k+1)\lambda}) &= d_{VT}(p_{S_k} * p_{X_1}, \pi_{k\lambda} * \pi_\lambda) \\ &\leq d_{VT}(p_{S_k}, \pi_{k\lambda}) + d_{VT}(p_{X_1}, \pi_\lambda) \\ &\leq k\lambda^2 + \lambda^2 \ = \ (k+1)\,\lambda^2\ , \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence, et donne la majoration souhaitée pour $k = n$.

21. On peut faire un calcul direct (et classique, je ne détaille pas) pour montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} P(B_n = k) = \lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n-k} = e^{-\alpha}\,\frac{\alpha^k}{k!}\ .$$

Mais on peut aussi exploiter ce qui précède puisque, en posant $\lambda = \dfrac{\alpha}{n}$, on a la majoration

$$d_{VT}(p_{B_n}, \pi_\alpha) \leq n\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{n}\ .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, on a clairement

$$\big|p_{B_n}(k) - \pi_\alpha(k)\big| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \big|p_{B_n}(j) - \pi_\alpha(j)\big| = 2\,d_{VT}(p_{B_n}, \pi_\alpha) \leq 2\,\frac{\alpha^2}{n} \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0\ ,$$

donc par majoration de la valeur absolue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(B_n = k) = \pi_\alpha(k) = e^{-\alpha}\,\frac{\alpha^k}{k!}$.

22. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in\,]0,1[$, notons $\theta_{n,\lambda}$ la **distribution binomiale de paramètres** n et λ, c'est-à-dire l'application $\theta_{n,\lambda} : \mathbb{N} \to [0,1]$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \theta_{n,\lambda}(k) = \begin{cases} \dbinom{n}{k}\,\lambda^k\,(1-\lambda)^{n-k} & \text{si } \ 0 \leq k \leq n \\ \qquad 0 & \text{si } \quad k > n \end{cases}\ .$$

Ainsi, $\theta_{1,\lambda}$ est la "distribution de Bernoulli" de paramètre λ.

Par un calcul analogue à celui de la question **20.**, on montre par récurrence que, si λ et μ sont dans $]0,1[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $d_{VT}(\theta_{n,\lambda}\ ,\ \theta_{n,\mu}) \leq n\,|\lambda - \mu|$, l'initialisation étant donnée par la question **11.**

En particulier, pour $n > \max\big\{\lfloor\alpha\rfloor, \lfloor\beta\rfloor\big\}$, on a $d_{VT}\big(\theta_{n,\frac{\alpha}{n}}\ ,\ \theta_{n,\frac{\beta}{n}}\big) \leq |\beta - \alpha|$.

La question **20.** montre aussi que $d_{VT}(\theta_{n,\lambda}\ ,\ \pi_{n\lambda}) \leq n\lambda^2$ si $\lambda \in\,]0,1[$.

Par l'inégalité triangulaire et la symétrie (question **10.**), pour $n > \max\big\{\lfloor\alpha\rfloor, \lfloor\beta\rfloor\big\}$, on a

$$\begin{aligned} d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) &\leq d_{VT}\big(\theta_{n,\frac{\alpha}{n}}\ ,\ \pi_\alpha\big) + d_{VT}\big(\theta_{n,\frac{\alpha}{n}}\ ,\ \theta_{n,\frac{\beta}{n}}\big) + d_{VT}\big(\theta_{n,\frac{\beta}{n}}\ ,\ \pi_\beta\big) \\ &\leq n\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 + |\beta - \alpha| + n\left(\frac{\beta}{n}\right)^2 \ = \ \frac{\alpha^2 + \beta^2}{n} + |\beta - \alpha|\ . \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq |\beta - \alpha|$

Variante. En notant δ_0 la "distribution de Dirac" donnée par $\delta_0(k) = \delta_{0,k}$ (symbole de Kronecker) pour tout $k \in \mathbb{N}$, on vérifie que $u * \delta_0 = u$ pour tout $u \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}$, puis on écrit, en supposant $\beta > \alpha$,

$$
\begin{aligned}
d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) &= d_{VT}(\pi_\alpha * \delta_0, \pi_\alpha * \pi_{\beta-\alpha}) \\
&\leq d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\alpha) + d_{VT}(\delta_0, \pi_{\beta-\alpha}) \;=\; d_{VT}(\delta_0, \pi_{\beta-\alpha}) \\
&= 1 - e^{\alpha-\beta} \quad (\textit{calcul facile}) \;\leq\; \beta - \alpha \;=\; |\beta - \alpha| \; .
\end{aligned}
$$