Proposition de sujet PC - Corrigé

Denis Choimet - Version du 17/11/19

I. Résultats préliminaires

I.A. Étude d'une série entière

1) Fixons $x > 0$, et considérons la fonction $f_x :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$. Elle est continue et positive. De plus,

$$f_x(t) \sim t^{x-1} \text{ quand } t \to 0^+, \text{ avec } x - 1 > -1,$$

et

$$f(x) = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ quand } t \to +\infty.$$

Cela prouve la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_x(t)dt$, autrement dit que

$$\boxed{\text{la fonction } \Gamma \text{ est bien définie.}}$$

Comme de plus la fonction f_x est continue, positive et non identiquement nulle, on a $\Gamma(x) > 0$. Ainsi,

$$\boxed{\text{la fonction } \Gamma \text{ est à valeurs strictement positives.}}$$

2) Fixons à nouveau $x > 0$. On a

$$\lim_{t\to 0^+} t^x e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} t^x e^{-t} = 0,$$

ce qui légitime l'intégration par parties suivante :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = \Big[-t^x e^{-t}\Big]_{t\to 0^+}^{t\to+\infty} - \int_0^{+\infty} xt^{x-1}(-e^{-t})dt = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x).$$

Ainsi,

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \text{ pour tout } x > 0.}$$

3) Notons que $a_n > 0$ pour tout $n \geqslant 0$ par la question **1)**. De plus, d'après la question précédente,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n+\alpha+1}{n+1} \to 1 \text{ quand } n \to +\infty.$$

D'après la règle de d'Alembert,

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum a_n x^n \text{ est égal à 1.}}$$

4) La somme de la série entière $\sum a_n x^n$ est donc définie (au moins) sur $]-1, 1[$. Fixons donc $x \in]-1, 1[$. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty} t^\alpha \frac{(xt)^n}{n!}e^{-t}dt.$$

Nous allons essayer de permuter les symboles $\displaystyle\int_0^{+\infty}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$. Pour cela, définissons, pour tout $n \geqslant 0$, la fonction

$$f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto t^\alpha \frac{(xt)^n}{n!}e^{-t}.$$

- Tout d'abord, pour chaque $n \geqslant 0$, la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$, car
$$f_n(t) \sim \frac{x^n}{n!} t^{\alpha+n} \text{ quand } t \to 0^+, \text{ avec } \alpha + n \geqslant \alpha > -1,$$
et
$$f_n(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ quand } t \to +\infty.$$
- Ensuite, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $t > 0$,
$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = t^\alpha e^{(x-1)t},$$
donc la somme de cette série de fonctions est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
- Enfin, pour $n \geqslant 0$, on a
$$\|f_n\|_1 = \int_0^{+\infty} t^\alpha \frac{(|x|t)^n}{n!} e^{-t} dt = \frac{|x|^n}{n!} \int_0^{+\infty} t^{\alpha+n} e^{-t} dt = \frac{|x|^n}{n!} \Gamma(\alpha+n+1) = a_n |x|^n.$$
Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est 1, et comme une série entière converge absolument en tout point de son intervalle ouvert de convergence, on en déduit que la série $\sum \|f_n\|_1$ est convergente.

D'après le théorème L^1 de Lebesgue, on peut donc écrire
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{(x-1)t} dt.$$
La changement de variable C^1 et inversible $u = (1-x)t$ donne
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{1-x}\right)^\alpha e^{-u} \frac{du}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du,$$
soit
$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}} \text{ pour tout } x \in]-1,1[.}$$

I.B. Projections orthogonales

5) Comme F est un sous-espace vectoriel *de dimension finie* de E, on sait que $E = F \oplus F^\perp$. Cela permet de définir l'application
$$\pi_F : E \to E, x = \underbrace{f}_{\in F} + \underbrace{g}_{\in F^\perp} \mapsto f,$$
qui est par définition la projection orthogonale sur F.

6) Comme $\pi_F(x) \in F$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base *orthonormale* de F, on a
$$\pi_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle \pi_F(x), e_i \rangle e_i.$$
Or, pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$,
$$\langle \pi_F(x), e_i \rangle = \langle \underbrace{\pi_F(x) - x}_{\in F^\perp}, e_i \rangle + \langle x, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle,$$

d'où

$$\boxed{\pi_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.} \tag{1}$$

7) Comme les vecteurs $x - \pi_F(x)$ et $\pi_F(x)$ sont orthogonaux, le théorème de Pythagore donne

$$\|x\|^2 = \|x - \pi_F(x) + \pi_F(x)\|^2 = \|x - \pi_F(x)\|^2 + \|\pi_F(x)\|^2.$$

Par ailleurs, la décomposition *en base orthonormale* (1) donne

$$\|\pi_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2,$$

d'où

$$\boxed{\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.}$$

II. Polynômes de Laguerre

8) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$a^2 + b^2 - 2|ab| = |a|^2 + |b|^2 - 2|ab| = (|a| - |b|)^2 \geqslant 0,$$

d'où

$$\boxed{|ab| \leqslant \frac{a^2 + b^2}{2} \text{ pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}^2.}$$

9) Soit $f, g \in E_\alpha$. Pour $x > 0$, on a, par la question précédente :

$$\left|x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)\right| \leqslant \frac{1}{2} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 + \frac{1}{2} x^\alpha e^{-x} g(x)^2.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx$ est absolument convergente, donc convergente. Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tous } f, g \in E_\alpha, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx \text{ est convergente.}}$$

10) Il est clair que $E_\alpha \subset C([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et que la fonction nulle est élément de E_α. Par ailleurs, si $f, g \in E_\alpha$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a, pour tout $x > 0$,

$$x^\alpha e^{-x} \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right)^2 = \lambda^2 x^\alpha e^{-x} f(x)^2 + \mu^2 x^\alpha e^{-x} g(x)^2 + 2\lambda\mu x^\alpha e^{-x} f(x)g(x),$$

et la question précédente permet de conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right)^2 dx$ est convergente, autrement dit que $\lambda f + \mu g \in E_\alpha$. En définitive,

$$\boxed{E_\alpha \text{ est un sous-espace vectoriel de } C([0, +\infty[, \mathbb{R}).}$$

11) Par linéarité, il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $e_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ est élément de E_α, autrement dit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha+2n} e^{-x} dx$ est convergente. Mais cette intégrale n'est autre que $\Gamma(\alpha+2n+1)$, dont on a montré l'existence à la question **1)**, puisque $\alpha+2n+1 \geqslant \alpha+1 > 0$. Ainsi,

$$\boxed{\text{toute fonction polynomiale est élément de } E_\alpha.}$$

12) On obtient aisément

$$\boxed{\psi_0(x) = 1,\ \psi_1(x) = -x+\alpha+1 \text{ et } \psi_2(x) = x^2-(\alpha+2)x+(\alpha+1)(\alpha+2) \text{ pour } x>0.}$$

13) Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de Leibniz donne, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\psi_n(x) &= x^{-\alpha}e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left(e^{-x}\right) \frac{d^k}{dx^k}\left(x^{n+\alpha}\right) \\
&= x^{-\alpha}e^x \left((-1)^n e^{-x} x^{n+\alpha} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{-x} (n+\alpha)\cdots(n+\alpha-k+1) x^{n-k+\alpha} \right) \\
&= (-1)^n x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (n+\alpha)\cdots(n+\alpha-k+1) x^{n-k}.
\end{aligned}$$

Cela prouve que

$$\boxed{\text{la fonction } \psi_n \text{ est polynomiale de degré } n \text{ et de coefficient dominant } (-1)^n.}$$

14) On a montré à la question **9)** la convergence de l'intégrale $\langle f, g\rangle$ pour tous $f, g \in E_\alpha$. Par ailleurs, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire par linéarité de l'intégrale, et clairement symétrique. Enfin, si $f \in E_\alpha$, on a

$$\langle f, f\rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$$

qui est positive comme intégrale d'une fonction positive. Supposons l'intégrale nulle. Comme la fonction $x \mapsto x^\alpha e^{-x} f(x)^2$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$, on a alors $x^\alpha e^{-x} f(x)^2 = 0$ pour tout $x > 0$, d'où $f(x) = 0$ pour tout $x > 0$, d'où $f(x) = 0$ pour tout $x \geqslant 0$ par continuité de f, soit $f = 0$. Cela prouve que

$$\boxed{\langle \cdot, \cdot, \rangle \text{ est un produit scalaire sur } E_\alpha.}$$

15) Fixons $k \in [\![0, n-1]\!]$. La formule de Leibniz donne, pour tout $x > 0$:

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} e^{-x} (n+\alpha)\cdots(n+\alpha-i+1) x^{n+\alpha-i}.$$

Dans cette somme, tous les exposants sont strictement positifs puisque, pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $n+\alpha-i \geqslant \alpha+1 > 0$, ce qui prouve que

$$\boxed{\varphi_n^{(k)}(x) \to 0 \text{ quand } x \text{ tend vers } 0 \text{ par valeurs strictement positives.}}$$

De plus,

$$e^{\frac{x}{2}} \varphi_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} e^{-\frac{x}{2}} (n+\alpha)\cdots(n+\alpha-i+1) x^{n+\alpha-i} \to 0 \text{ quand } x \to +\infty,$$

d'où

$$\boxed{\varphi_n^{(k)}(x) = o\left(e^{-\frac{x}{2}}\right) \text{ quand } x \to +\infty.}$$

16) Fixons $m, n \in \mathbb{N}$ et définissons, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, l'assertion

$$\mathcal{P}(k)\ : \text{« } \langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^k \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-k)}(x) \psi_m^{(k)}(x) dx \text{ ».}$$

- Tout d'abord, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, car par définition :

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \psi_n(x)\psi_m(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n)}(x)\psi_m(x)dx.$$

- Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. On a donc

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^k \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-k)}(x)\psi_m^{(k)}(x)dx.$$

D'après la question précédente (appliquée à $n-k-1 \leqslant n-1$) et le fait que la fonction $\psi_m^{(k)}$ est polynomiale, on a

$$\varphi_n^{(n-k-1)}(x)\psi_m^{(k)}(x) \to 0 \text{ quand } x \to 0^+ \text{ et quand } x \to +\infty.$$

Cela légitime l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned}\langle \psi_m, \psi_n \rangle &= (-1)^k \left[\varphi_n^{(n-k-1)}(x)\psi_m^{(k)}(x)\right]_{x\to 0^+}^{x\to+\infty} - (-1)^k \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-k-1)}(x)\psi_m^{(k+1)}(x)dx \\ &= (-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-(k+1))}(x)\psi_m^{(k+1)}(x)dx,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathcal{P}(k+1)$ est vrai.

En définitive,

$$\boxed{\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \varphi_n(x)\psi_m^{(n)}(x)dx \text{ pour tous } m, n \in \mathbb{N}.} \tag{2}$$

Si $m < n$, comme ψ_m est polynomiale de degré m (question **13)**), on a $\psi_m^{(n)} = 0$, d'où $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = 0$. Cela prouve que

$$\boxed{\text{la famille } (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est orthogonale pour le produit scalaire } \langle \cdot, \cdot \rangle.}$$

17) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'égalité (2), appliquée à $m = n$, donne

$$\|\psi_n\|_\alpha^2 = (-1)^n \int_0^{+\infty} \varphi_n(x)\psi_n^{(n)}(x)dx.$$

Or, comme ψ_n est polynomiale de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$ (question **13)**), on a $\psi_n^{(n)}(x) = (-1)^n n!$ pour tout $x > 0$, d'où

$$\|\psi_n\|_\alpha^2 = n! \int_0^{+\infty} \varphi_n(x)dx = n! \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha} e^{-x} dx = n!\,\Gamma(n+\alpha+1).$$

Ainsi,

$$\boxed{\|\psi_n\|_\alpha^2 = n!\,\Gamma(n+\alpha+1) \text{ pour tout } n \geqslant 0.}$$

III. Approximation

18) Fixons $k \in \mathbb{N}$. Tout d'abord,

$$\langle f_k, \psi_0 \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(k+1)x} dx \overset{u=(k+1)x}{=} \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(k+1)^{\alpha+1}}.$$

Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\langle f_k, \psi_n \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} e^{-kx} \psi_n(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-kx} \varphi_n^{(n)}(x)dx.$$

On réalise alors, comme à la question **16)**, n intégrations par parties successives, légitimes car, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\varphi_n^{(n-k)}(x) \to 0$ quand $x \to 0^+$ et quand $x \to +\infty$ d'après la question **15)**. Cela donne

$$\begin{aligned}
\langle f_k, \psi_n \rangle &= (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-kx}\right)\varphi_n(x)dx \\
&= k^n \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha} e^{-(k+1)x} dx \overset{u=(k+1)x}{=} \frac{k^n}{(k+1)^{n+\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^{n+\alpha} e^{-u} dx \\
&= \frac{k^n}{(k+1)^{n+\alpha+1}} \Gamma(n+\alpha+1).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$$\langle f_k, \psi_n \rangle = \Gamma(n+\alpha+1) \frac{k^n}{(k+1)^{n+\alpha+1}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

d'où, grâce à la question **17)** :

$$\frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \frac{k^{2n}}{(k+1)^{2n+2\alpha+2}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Avec les notations de la question **4)**, cela s'écrit encore

$$\frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} a_n \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $0 \leqslant \dfrac{k}{k+1} < 1$, on en déduit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{1}{(k+1)^{2\alpha+2}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(1 - \left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)^{\alpha+1}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{((k+1)^2 - k^2)^{\alpha+1}},$$

d'où finalement

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}.} \tag{3}$$

19) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$\|f_k\|_\alpha^2 = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} e^{-2kx} dx = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(2k+1)x} dx \overset{u=(2k+1)x}{=} \frac{1}{(2k+1)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du,$$

soit

$$\|f_k\|_\alpha^2 = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2k+1)^{\alpha+1}}. \tag{4}$$

Or, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la famille $\left(\dfrac{\psi_n}{\|\psi_n\|_\alpha}\right)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ est une base orthonormale de V_N, donc d'après la question **7)** :

$$\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha^2 = \|f_k\|_\alpha^2 - \sum_{n=0}^{N} \left\langle f_k, \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|_\alpha} \right\rangle^2 = \|f_k\|_\alpha^2 - \sum_{n=0}^{N} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2},$$

donc, quand $N \to +\infty$:

$$\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha^2 \to \|f_k\|_\alpha^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2} = 0$$

d'après (3) et (4). On a donc montré que

$$\boxed{\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \to 0 \text{ quand } N \to +\infty.}$$

20) Il suffit d'observer que $\psi_n \in \mathcal{P}$ pour tout $n \geqslant 0$ (question **13)**). Le résultat découle alors immédiatement de la question précédente. Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } p \in \mathcal{P} \text{ telle que } \|f_k - p\|_\alpha \leqslant \varepsilon.}$$

21) Suivons l'indication du texte en définissant la fonction

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} f(-\ln t) \text{ si } t \in]0,1] \\ 0 \text{ si } t = 0, \end{cases}$$

de sorte que

$$f(x) = g(e^{-x}) \text{ pour tout } x \geqslant 0.$$

Comme f tend vers 0 en $+\infty$, la fonction g est continue sur le segment $[0,1]$. D'après le fait admis, il existe une fonction polynomiale $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $|g(t) - p(t)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in [0,1]$. Écrivons

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k t^k \text{ pour } t \in [0,1].$$

On a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{-kx} \right| = |g(e^{-x}) - p(e^{-x})| \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } x \geqslant 0,$$

d'où

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{-kx} \right| dx \leqslant \varepsilon \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx,$$

la dernière intégrale écrite étant convergente. Comme ε est arbitraire, on a bien montré que

$$\boxed{\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } n \in \mathbb{N} \text{ et } \lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } \left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leqslant \varepsilon.}$$

22) Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question **20)**, pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$, on peut fixer une fonction $p_k \in \mathcal{P}$ telle que

$$\|f_k - p_k\|_\alpha \leqslant \frac{\varepsilon}{(n+1)(|\lambda_k| + 1)}$$

Posons alors $p = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k p_k$, qui est élément de $\mathcal{P}$. Comme $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme, on a

$$\begin{aligned} \|f - p\|_\alpha &= \left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k p_k \right\|_\alpha \\ &\leqslant \varepsilon + \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k| \, \|f_k - p_k\|_\alpha \\ &\leqslant \varepsilon + \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k| \frac{\varepsilon}{(n+1)(|\lambda_k| + 1)} \\ &\leqslant \varepsilon + \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{n+1} = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Comme ε est arbitraire, on a bien montré que

$$\boxed{\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } p \in \mathcal{P} \text{ telle que } \|f - p\|_\alpha \leqslant \varepsilon.}$$

23) Suivons l'indication de l'énoncé, et définissons la fonction

$$\phi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto h\left(\sqrt{x}\right) e^{\frac{x}{2}}.$$

Soit α un réel strictement supérieur à -1 à ajuster, et $\varepsilon > 0$. Comme la fonction ϕ est nulle en dehors du segment $[0, A^2]$, il est clair qu'elle est élément de E_α. D'après la question **22)**, il existe $q \in \mathcal{P}$ tel que $\|f - q\|_\alpha^2 \leqslant \varepsilon$, soit

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \left(h\left(\sqrt{x}\right) e^{\frac{x}{2}} - q(x)\right)^2 dx \leqslant \varepsilon.$$

Le changement de variable $u = \sqrt{x}$ (C^1 et inversible sur $]0, +\infty[$) donne

$$\int_0^{+\infty} u^{2\alpha} e^{-u^2} \left(h(u) e^{\frac{u^2}{2}} - q(u^2)\right)^2 2u du \leqslant \varepsilon,$$

soit

$$\int_0^{+\infty} u^{2\alpha+1} \left(h(u) - q(u^2) e^{-\frac{u^2}{2}}\right)^2 du \leqslant \varepsilon.$$

En choisissant $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \left(h(u) - q(u^2) e^{-\frac{u^2}{2}}\right)^2 du \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où par parité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(u) - q(u^2) e^{-\frac{u^2}{2}}\right)^2 du \leqslant \varepsilon.$$

En posant $p(u) = q(u^2)$ pour $u \in \mathbb{R}$, on a bien trouvé $p \in \mathcal{P}$ tel que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(u) - p(u) e^{-\frac{u^2}{2}}\right)^2 du \leqslant \varepsilon.}$$