DS de MATHÉMATIQUES numéro 7 COMMENTAIRES
PSI2 2024-2025

PROBLÈME 1

1., 2. et 3. Pffou que c'est dur la trigo! Et ça, c'est vraiment des mathématiques de grand-papa!

4. Le plus efficace pour rechercher les valeurs propres est tout de même d'exprimer le polynôme caractéristique de A.

5. Certains semblent connaître la formule d'inversion d'une matrice 2×2, je ne pense pas qu'elle soit vraiment "au programme", mais cela peut toujours servir:

$$\text{si} \quad ad - bc \neq 0 \,, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \,.$$

Sinon, la résolution d'un système linéaire est peut-être le plus agréable. Certains calculs sont un peu trop parachutés.

Pour reconnaître dans R une matrice de rotation, et surtout pour exprimer son angle θ en fonction de t, il fallait faire le lien avec le petit préliminaire trigonométrique.

La bonne expression de l'angle θ en fonction de t est $\theta = 2\ \mathrm{Arctan}(t)$, si l'on choisit la "détermination principale" de l'angle θ, à savoir celle qui se trouve dans $]-\pi, \pi[$. D'autres expressions avec des arcsinus ou des arccosinus ont été proposées, mais elles ne sont pas valables en toute généralité. En effet, un arccosinus par exemple ne prend des valeurs que dans $[0, \pi]$.

6. L'application φ n'étant pas linéaire et l'ensemble $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ n'étant pas un espace vectoriel, la notion de "noyau" n'a pas de sens ici, et les considérations de dimensions sont tout aussi déplacées.

8. Question très élémentaire, qui a pourtant donné du fil à retordre!

10. Mêmes remarques que pour **Q6.**

13. On pouvait bien sûr utiliser **Q9.d.** pour proposer une matrice B qui convient (et qui est d'ailleurs la seule possible), mais cela a l'inconvénient (à moins de faire des calculs assez pénibles) de ne pas donner explicitement le vecteur a demandé en **Q15.**

PROBLÈME 2

1. Décomposer les calculs!

Pour la conclusion, certains répondent que les fonctions recherchées sont celles dont le gradient est nul, ce qui n'est pas faux, mais ils oublient peut-être que (sur un ouvert convexe) cela caractérise les fonctions constantes.

2.a. Des calculs souvent mal posés. Les fonctions u et v sont supposées "non identiquement nulles", ce qui signifie qu'elles ne sont pas partout nulles, mais cela ne les empêche pas de pouvoir s'annuler en certains points. Des $u(x)$ et des $v(y)$ ne doivent donc pas figurer au dénominateur sans prendre un minimum de précautions! Je vous renvoie à mon corrigé pour une rédaction qui me semble correcte.

Dans quelques copies, les variables disparaissent complètement et la relation

$$\Delta f(x,y) = u(x)v''(y) + u''(x)v(y)$$

devient $\Delta f = uv'' + u''v$, ce qui ne veut plus rien dire!

3. Calcul déjà fait en TD, réécrit correctement dans beaucoup de copies, mais pas toutes!

5. Des questions classiques d'analyse, mais bien peu de calculs aboutissent. Peut-être faute de temps ?

6. Une question de topologie plutôt dans l'esprit de la filière MP. Même si ce n'est pas à savoir en PSI, l'adhérence d'une partie d'un e.v.n. est toujours un fermé, mais est-ce évident ? Et l'intérieur d'une partie est toujours un ouvert.

8.a. Question peu abordée. On peut remarquer que le laplacien de f en a est la trace de la hessienne $H_f(a)$, cela permet de conclure aussi (si la trace est strictement négative, les deux valeurs propres ne peuvent pas être positives).