CCINP 2021 – Corrigé

Exercice

Q1. $\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0)$ ou $(1,1)$.

Q2. $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x,0) = x^3 < 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x,0) > 0$. On en déduit que f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$.

Q3. $g(u,v) = 3u^2 + 3v^2 - 3uv + u^3 + v^3$ puis $g(r\cos\theta, r\sin\theta) = 3r^2(1 - \frac{1}{2}\sin(2\theta) + r(\cos^3\theta + \sin^3\theta))$.

Q4. $1 - \frac{1}{2}\sin(2\theta) \geq \frac{1}{2}$ et $\cos^3\theta + \sin^3\theta \geq -2$ donc $g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geq 3r^2(\frac{1}{2} - 2r)$.
Lorsque $0 \leq r \leq \frac{1}{4}$, $g(u,v) \geq 0$ donc f admet un minimum local en $(1,1)$.

Q5. Global implique local donc le seul extremum possible est en $(1,1)$ et c'est un minimum. Mais $f(-2,0) = -8 < -1 = f(1,1)$ donc f n'admet pas d'extremum global.
Ou encore, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty$ donc f n'est ni minorée ni majorée.

Problème 1

Partie I

Q6. $\forall z \in \mathbb{C},\ \left|\frac{z^n}{n^\alpha}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$ donc $R = 1$.

Q7. D'après ce qui précède, $]-1,1[\subset \mathcal{D}_\alpha \subset [-1,1]$. La série converge en $1 \iff \alpha > 1$ (exemple de Riemann) et en $-1 \iff \alpha > 0$ (CSSA). Donc $\mathcal{D}_\alpha = \begin{cases}]-1,1[& \text{si } \alpha \in]-\infty, 0] \\ [-1,1[& \text{si } \alpha \in]0,1] \\ [-1,1] & \text{si } \alpha \in]1,+\infty[\end{cases}$

Q8. Pour $x \geq 0$, la série est à termes positifs donc $f_\alpha(x) \geq 0$.
Pour $x \leq 0$, la série satisfait les hypothèses du CSSA donc sa somme est du signe de son 1er terme : $f_\alpha(x) \leq 0$.

Q9. D'après le cours, $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ et $f_1(x) = -\ln(1-x)$.
Par le théorème de dérivation des SE, $f_0'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{x} f_{-1}(x)$ donc $f_{-1}(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$

Q10. Pour $\alpha > 1$, la série converge normalement sur $[-1,1]$ donc f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha = [-1,1]$.

Q11. $\forall x \in [0,1[,\ \frac{x^n}{n^\alpha} \geq \frac{x^n}{n}$ donc $f_\alpha(x) \geq f_1(x)$. Or $f_1(x) = -\ln(1-x) \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to1^-} f_\alpha(x) = +\infty$.

Q12. G_α converge en $x = 1$ donc $1 \in \mathcal{D}_\alpha$ *ie* $\alpha > 1$ et $G_\alpha(1) = 1$ donc $\lambda f_\alpha(1) = 1$.

Q13. X_α admet une espérance $\iff G_\alpha$ est dérivable en 1 $\iff \alpha > 2$ et dans ce cas, $G_\alpha'(x) = \lambda f_\alpha'(x) = \frac{\lambda}{x} f_{\alpha-1}(x)$.
Donc $E(X_\alpha) = G_\alpha'(1) = \frac{f_{\alpha-1}(1)}{f_\alpha(1)}$.

Partie II

Q14. Pour $x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n}$

Q15. $R_S = 1$ et pour $x \in]-1,1[,\ \exp(S(x)) = 1 + x$.

Q16. $R_g = \frac{1}{|z_0|} R_S = \frac{1}{|z_0|}$.

Q17. D'après le théorème de dérivation des SE, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R_g, R_g[\supset [0,1]$ et $g'(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} z_0^n t^{n-1} = \frac{z_0}{1+tz_0}$.

Q18. D'après ce qui précède, h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et $h'(t) = g'(t)h(t) = \frac{z_0}{1+tz_0} h(t)$.

Q19. On remarque que la fonction $z : t \mapsto 1 + tz_0$ est solution de cette équation différentielle. De plus, $z(0) = 1 = h(0)$. Ainsi, h et z sont solutions du même problème de Cauchy, donc elle sont égales. En $t = 1$, on obtient $h(1) = \exp(S(z_0)) = z(1) = 1 + z_0$.

Partie III

Q20. $t \mapsto \frac{x^t}{t^\alpha} = \frac{e^{t\ln x}}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
$0 \leq \frac{x^t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$ qui est intégrable sur $]0,1]$.
$\forall t \geq 1,\ 0 \leq \frac{x^t}{t^\alpha} \leq e^{t\ln x}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\ln x < 0$.

Q21. On effectue le changement de variable $u = -t\ln x$, $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$:
$I(x) = (-\ln x)^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} u^{-\alpha} e^{-u}\, \mathrm{d}u = (-\ln x)^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha)$.

Q22. $t \mapsto x^t = e^{t\ln x}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sont décroissantes positives sur $\mathbb{R}_+^*$ donc aussi leur produit.

Q23. $\forall t \in [n, n+1]$, $\frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{x^t}{t^\alpha} \leq \frac{x^n}{n^\alpha}$ donc en intégrant sur $[n, n+1]$, $\frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \frac{x^n}{n^\alpha}$.
On somme les 1res inégalités pour $n \in \mathbb{N}$ et les 2es pour $n \in \mathbb{N}^*$ et on obtient le résultat attendu.

Q24. $t \mapsto \frac{x^t}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1]$ et $I(x) = (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} +\infty$ car $\alpha < 1$. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 1}{\sim} \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)$. En divisant par ce même équivalent et en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient $f_\alpha(x) \underset{x\to 1}{\sim} (-\ln x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)$.

Problème 2

Partie I

Q25. Si $C = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $I_n + C\overline{C} = \mathrm{diag}(1+|\lambda_1|^2, \dots, 1+|\lambda_n|^2)$ et $\det(I_n + C\overline{C}) = \prod_{k=1}^{n}(1+|\lambda_k|^2) \geq 1$ avec égalité $\iff \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \iff C = 0$.

Q26. D'après le théorème spectral, C est diagonalisable : $C = PDP^{-1}$. Alors, $\det(I_n + C^2) = \det(P(I_n + D^2)P^{-1}) = \det(I_n + D^2) = \det(I_n + D\overline{D})$ et la question précédente conclut.

Q27. La propriété est trivialement vraie pour $n = 1$ et l'inférence se fait en développant selon une rangée.

Q28. $I_n + C^2 = (I_n + iC)(I_n - iC) = (I_n + iC)(\overline{I_n + iC})$ donc $\det(I_n + C^2) = \det(I_n + iC)\overline{\det(I_n + iC)} = |\det(I_n + iC)|^2 = |\det(C - iI_n)|^2$.
On en déduit que $\det(I_n + C^2) \geq 0$ et que $\det(I_n + C^2) = 0 \iff \chi_C(i) = 0 \iff i \in \mathrm{Sp}(C)$.

Partie II

Q29. $\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\overline{C} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n + C\overline{C} & -C \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ donc en passant au déterminant, $\det\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix} \times 1 = \det(I_n + C\overline{C})$.

Q30. La matrice de φ dans la base (e_2, e_1) est $\begin{pmatrix} u & t \\ s & r \end{pmatrix}$.

Q31. On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^{2n}$ canoniquement associé à M et on découpe par blocs de taille $n \times n$. Dans la base $(e_{n+1}, \dots, e_{2n}, e_1, \dots, e_n)$, φ a pour matrice $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$ et dans la base $(e_1, \dots, e_n, -e_{n+1}, \dots, -e_{2n})$, φ a pour matrice $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$.

Q32. D'après Q31, $\chi_{C_0}(x) = \begin{vmatrix} (x-1)I_n & C \\ -\overline{C} & (x-1)I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x-1)I_n & -\overline{C} \\ C & (x-1)I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x-1)I_n & -C \\ \overline{C} & (x-1)I_n \end{vmatrix}$.
Or d'après Q27, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{vmatrix} (x-1)I_n & -\overline{C} \\ C & (x-1)I_n \end{vmatrix} = \overline{\begin{vmatrix} (x-1)I_n & -C \\ \overline{C} & (x-1)I_n \end{vmatrix}}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\overline{\chi_{C_0}(x)} = \overline{\chi_{C_0}}(x) = \chi_{C_0}(x)$ donc $\overline{\chi_{C_0}} = \chi_{C_0}$ et donc $\chi_{C_0} \in \mathbb{R}[X]$.

Q33. (a) Par le calcul, on obtient $\begin{pmatrix} -C\overline{X} - \overline{Y} \\ \overline{X} - \overline{C}\overline{Y} \end{pmatrix}$.

(b) Calcul immédiat.

(c) Calcul immédiat.

Remarque : On a aussi $\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}\right) = \Omega\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \Omega\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$.
Ω n'est pas linéaire mais vérifie : $\Omega(\lambda Z + \mu Z') = \overline{\lambda}\Omega(Z) + \overline{\mu}\Omega(Z')$.

Q34. Posons $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \neq 0$. Si $\Omega(Z) = \lambda Z$ alors $\Omega^2(Z) = -Z = \overline{\lambda}\Omega(Z) = \overline{\lambda}\lambda Z$ donc $|\lambda|^2 = -1$ ce qui est impossible. Donc $(Z, \Omega(Z))$ est libre.
En notant $P = \mathrm{Vect}\,(Z, \Omega(Z))$, $\Omega(\lambda Z + \mu\Omega(Z)) = \overline{\lambda}\Omega(Z) - \overline{\mu}Z \in P$ donc P est stable par Ω.

Q35. Soit $Z = \lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \mu\Omega\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in E \cap P$. Alors $Z' = \Omega(Z) = \overline{\lambda}\Omega\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \overline{\mu}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ puis $\overline{\lambda}Z - \mu Z' = (\lambda\overline{\lambda} + \mu\overline{\mu})\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in E \cap P$.
Comme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \notin E$, on en déduit que $|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 0$ soit $\lambda = \mu = 0$ et $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Q36. On a vu en Q32 que $\chi_{C_0} \in \mathbb{R}[X]$ donc pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, $\overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}(C_0)$ et $\alpha_{\overline{\lambda}} = \alpha_\lambda$.
On rappelle également que $\Omega(C_0 Z) = C_0\Omega(Z)$ donc, par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Omega(C_0^k Z) = C_0^k\Omega(Z)$ et $\Omega(\lambda Z) = \overline{\lambda}\Omega(Z)$ d'où l'on déduit : $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\Omega(P(C_0)Z) = \overline{P}(C_0)\Omega(Z)$.
Soit $Z = \Omega(Z') \in \Omega(F_\lambda)$. Alors $(\overline{\lambda}I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda}Z = \Omega\left((\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda})Z'\right) = \Omega(0) = 0$ donc $Z \in F_{\overline{\lambda}}$.
Réciproquement, soit $Z \in F_{\overline{\lambda}}$, on pose $Z' = -\Omega(Z)$, $Z = \Omega(Z')$. $(\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda}Z' = -\Omega((\overline{\lambda}I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda}Z) = -\Omega(0) = 0$ donc $Z' \in F_\lambda$ et $Z = \Omega(Z') \in \Omega(F_\lambda)$.

Q37. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0) \cap \mathbb{R}$. Alors F_λ est stable par Ω d'après Q36. On utilise Q35 pour établir que F_λ est somme directe de plans.
— Soit $Z_1 \in F_\lambda$. Alors, d'après Q35, $(Z_1, \Omega(Z_1))$ est libre. Si $F_\lambda = \mathrm{Vect}(Z_1, \Omega(Z_1))$, c'est terminé : $\dim F_\lambda = 2 \in 2\mathbb{N}$.

— Sinon, soit $Z_2 \in F_\lambda \setminus \mathrm{Vect}(Z_1, \omega(Z_1))$. Montrons que $(Z_1, \Omega(Z_1), Z_2, \Omega(Z_2))$ est libre : si $Z = \lambda_1 Z_1 + \mu_1 \Omega(Z_1) + \lambda_2 Z_2 + \mu_2 \Omega(Z_2) = 0$ alors $Z' = \Omega(Z) = -\overline{\mu}_1 Z_1 + \overline{\lambda}_1 \Omega(Z_1) - \overline{\mu}_2 Z_2 + \overline{\lambda}_2 \Omega(Z_2) = 0$ puis $\overline{\lambda}_2 Z - \mu_2 Z' = (\lambda_1 \overline{\lambda}_2 + \overline{\mu}_1 \mu_2) Z_1 + (\overline{\lambda}_2 \mu_1 - \mu_2 \overline{\lambda}_1) \Omega(Z_1) + (\lambda_2 \overline{\lambda}_2 + \mu_2 \overline{\mu}_2) Z_2 = 0$. Puisque $(Z_1, \Omega(Z_1), Z_2)$ est libre, on déduit que $\lambda_2 = \mu_2 = 0$ puis que $\lambda_1 = \mu_1 = 0$. Si $F_\lambda = \mathrm{Vect}(Z_1, \Omega(Z_1)) \oplus \mathrm{Vect}(Z_2, \Omega(Z_2))$, c'est terminé : $\dim F_\lambda = 4 \in 2\mathbb{N}$.

— Supposons construits $Z_1, \ldots, Z_k$ tels que $\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Vect}(Z_i, \Omega(Z_i)) \subset F_\lambda$. Si $F_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Vect}(Z_i, \Omega(Z_i))$, c'est terminé.

  Sinon soit $Z_{k+1} \in F_\lambda \setminus \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Vect}(Z_i, \Omega(Z_i))$. On prouve que $(Z_1, \Omega(Z_1), \ldots, Z_{k+1}, \Omega(Z_{k+1}))$ est libre comme précédemment. Si... sinon ...

Le processus s'arrête puisque $\dim F_\lambda < \infty$. Il existe donc $(Z_1, \ldots, Z_p)$ tel que $F_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}(Z_i, \Omega(Z_i))$ donc $\dim F_\lambda = 2p \in 2\mathbb{N}$.

Q38. Les vp réelles de C_0 sont d'ordres pairs et pour λ vp complexe non réelle, $\overline{\lambda}$ est également vp de même ordre. Ainsi, $\det(C_0) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0) \cap \mathbb{R}} (\lambda^2)^{m'_\lambda} \cdot \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0) \setminus \mathbb{R}} |\lambda|^{\alpha_\lambda} \in \mathbb{R}_+$.