PRÉPARATION À L'ORAL DE MATHÉMATIQUES

PSI 2 2025

Centrale Math 1

Centrale 1 (Edward CHARBONNIER)

1. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit p le projecteur sur $\mathrm{Vect}(e_1)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$.

a. Donner la matrice A canoniquement associée à p.

b. Trouver toutes les matrices B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = B$.

2. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, on pose $\psi_f(g) = f \circ g - g \circ f$. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\psi_f(g) = g$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel k, on a $\psi_f(g^k) = k\, g^k$.

b. En déduire que l'endomorphisme g est nilpotent.

- -

1.a. Le vecteur e_1 appartient à l'image de ce projecteur p donc est invariant par p. Le vecteur e_2 se décompose en $e_2 = -e_1 + (e_1 + e_2)$, donc $p(e_2) = -e_1$. On a donc $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. On recherche B sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. En détaillant le calcul des coefficients, on voit que la relation $AB - BA = B$ est satisfaite si et seulement si a, c et d sont nuls. Les solutions sont donc les matrices $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec b réel.

2.a. Petit calcul par récurrence, il s'agit de prouver que $f \circ g^k - g^k \circ f = k\, g^k$ pour tout k entier naturel. C'est immédiat pour $k = 0$, c'est l'hypothèse pour $k = 1$ et, si c'est vrai pour $k \in \mathbb{N}$ donné, alors

$$\begin{aligned} f \circ g^{k+1} - g^{k+1} \circ f &= \big((f \circ g^k - g^k \circ f) + g^k \circ f\big) \circ g - g^{k+1} \circ f \\ &= k\, g^{k+1} + g^k \circ (f \circ g - g \circ f) \\ &= k\, g^{k+1} + g^{k+1} \;=\; (k+1)\, g^{k+1}\,. \end{aligned}$$

b. L'application ψ_f est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{L}(E)$ et ne peut donc avoir qu'un nombre fini de valeurs propres. Or, si l'endomorphisme g de E n'était pas nilpotent, on aurait pour tout k entier naturel, $g^k \neq 0$ et $\psi_f(g^k) = k\, g^k$ donc tous les entiers naturels seraient valeurs propres de ψ_f ce qui est absurde. Finalement, g est nilpotent.

Centrale 2 (Raphaël JOHNSON)

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1 + x$.

2. Montrer qu'il existe une unique fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\textbf{(*):} \qquad \varphi(0) = \varphi'(0) = -1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi''(x) = \big|\varphi(x) + e^x\big|\,.$$

- -

1. Inégalité classique résultant de la convexité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

2. Notons d'abord que $y'' = \big|y + e^x\big|$ est une équation différentielle non linéaire, il n'existe aucun "théorème de Cauchy" (en tous cas à votre programme) énonçant des résultats d'existence ou d'unicité de solutions. Il faut donc tout faire "à la main".

Unicité ("analyse"): S'il existe une fonction φ vérifiant **(*)**, alors φ est de classe $\mathcal{C}^2$ avec $\varphi'' \geq 0$, donc φ est convexe sur $\mathbb{R}$. La courbe représentative de φ est donc au-dessus de chacune de ses tangentes, et notamment au-dessus de la tangente au point d'abscisse 0 qui est la droite d'équation $y = -x - 1$ vu les conditions initiales. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) \geq -(x+1) \geq -e^x \ .$$

Donc $\varphi(x) + e^x \geq 0$ et finalement φ est solution du problème de Cauchy plus classique

(P): $\begin{cases} y'' - y &= e^x \\ y(0) &= -1 \\ y'(0) &= -1 \end{cases}$, d'où l'unicité de φ.

Existence ("synthèse"): Résolvons le problème de Cauchy **(P)**. Les solutions de l'équation homogène $y'' - y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto Ae^x + Be^{-x}$, une solution particulière de **(E)**: $y'' - y = e^x$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}xe^x$ (*comme $x \mapsto e^x$ est solution de l'équation homogène, on "augmente le degré" en cherchant une solution particulière de la forme $x \mapsto Ax\,e^x$*). Avec les conditions initiales, on obtient $y(x) = -\dfrac{5}{4}e^x + \dfrac{1}{4}e^{-x} + \dfrac{1}{2}xe^x$.

Cette fonction (nommons-la φ) est l'unique solution du problème de Cauchy **(P)**.

Pour montrer qu'elle est solution du problème **(*)**, il suffit de vérifier que $\varphi(x) + e^x$ est positif pour tout x. Or,

$$\varphi(x) + e^x = -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x = \frac{(x-1)e^x + \mathrm{ch}(x)}{2} \geq \frac{-e^{-x}e^x + \mathrm{ch}(x)}{2} = \frac{\mathrm{ch}(x) - 1}{2} \geq 0 \ .$$

On a utilisé encore une fois l'inégalité résultant de la convexité de l'exponentielle, ici sous la forme $x - 1 \geq -e^{-x}$. On a donc prouvé l'existence d'une solution du problème **(*)**.

Centrale 3 (Mélissa CHERFAOUI et Bastien LACROIX)

1. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}$. Quel est le rayon de convergence R de cette série entière ?

Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Une particule se déplace sur l'axe des réels. À l'instant $t = 0$, elle est à l'origine (abscisse 0). À chaque instant k entier naturel non nul, elle avance de 1 (on pose alors $X_k = 1$) ou recule de 1 (on pose alors $X_k = -1$), de façon équiprobable et indépendante. On admet que l'on définit ainsi une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

a. Déterminer la loi de $Y_k = \dfrac{1 - X_k}{2}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, puis celle de $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b. En déduire la loi de S_n, son espérance et sa variance.

3. On note $T = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ le temps d'attente du premier retour à l'origine et on admet qu'il s'agit d'une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. On pose

$p_0 = 1$, $q_0 = 0$ et, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = P(S_n = 0)$ et $q_n = P(T = n)$. On considère les fonctions

$$F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n \qquad \text{et} \qquad G : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n \ .$$

a. Calculer $F(x)$ en précisant le domaine de validité.

b. Prouver, pour $n \geq 1$, la relation $p_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q_k p_{n-k}$.

c. Montrer que la fonction G est définie et continue sur $[-1, 1]$, et donner une expression de $G(x)$ en utilisant **b.**

d. De ce qui précède, déduire que $P(T = +\infty) = 0$.

Questions de cours. CNS pour qu'une matrice soit diagonalisable, formule de Taylor-Young.

- -

1. Posons $u_n(x) = \binom{2n}{n} \dfrac{x^{2n}}{4^n}$. Pour $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \dfrac{2n+1}{n+1} \dfrac{x^2}{2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x^2$, d'où l'on déduit facilement que $R = 1$. Pour $x \in \,]-1, 1[$, un calcul classique fait à partir des DSE usuels donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - n + 1 \right) (-x^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n \ n!} (-x^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \, x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n} = f(x) \ .
\end{aligned}$$

2.a. La variable Y_k prend pour valeurs 0 et 1 avec équiprobabilité, donc $Y_k \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Les variables X_k étant indépendantes, les Y_k le sont aussi (pour tout k, Y_k est fonction de X_k). Le cours de première année indique alors que $Z_n \sim \mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

b. Le cours donne $\mathrm{E}(Z_n) = \dfrac{n}{2}$ et $\mathrm{V}(Z_n) = \dfrac{n}{4}$. On a $Z_n = \dfrac{n - S_n}{2}$ ou encore $S_n = n - 2Z_n$.
On en déduit $\mathrm{E}(S_n) = 0$, la variable S_n est centrée, et $\mathrm{V}(S_n) = 4\,\mathrm{V}(Z_n) = n$.
Comme $Z_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$, on a $S_n(\Omega) = \big\{n - 2k \ ; \ 0 \leq k \leq n\big\} = \big\{ -n, -n+2, \cdots, n-2, n\big\}$ et, pour tout $l \in S_n(\Omega)$, en posant $k = \dfrac{n-l}{2}$ soit $l = n - 2k$, alors

$$P(S_n = l) = P(Z_n = k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \ .$$

3.a. De la question **2.b.** (ou de considérations élémentaires de dénombrement), on déduit que $p_{2n+1} = P(S_{2n+1} = 0) = 0$ et $p_{2n} = P(S_{2n} = 0) = \dfrac{1}{2^{2n}} \dbinom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^{2n}}{4^n}=f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

cette formule étant valable pour $x\in\,]-1,1[$ et ne pouvant être prolongée au-delà (limites infinies en -1 et 1).

b. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\{S_n=0\}=\bigsqcup_{1\leq k\leq n}\big(\{T=k\}\,\cap\,\{S_n=0\}\big)$. Donc

$$\begin{aligned}
p_n &= P(S_n=0)\;=\;\sum_{k=1}^{n}P(S_n=0\;,\;T=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}P(T=k\;,\;X_{k+1}+\cdots+X_n=0)\\
&= \sum_{k=1}^{n}P(T=k)\;P(X_{k+1}+\cdots+X_n=0)
\end{aligned}$$

par indépendance des événements $\{T=k\}$ et $\{X_{k+1}+\cdots+X_n=0\}$ (*cela résulte du lemme des coalitions puisque les variables aléatoires indicatrices de ces deux événements sont respectivement fonction de* $X_1,\ \cdots,X_k$ *et de* $X_{k+1},\ \cdots,\ X_n$)). Comme la variable $X_{k+1}+\cdots+X_n$ a la même loi que $X_1+\cdots+X_{n-k}=S_{n-k}$ (*par exemple parce que* $Y_{k+1}+\cdots+Y_n$ *suit la même loi* $\mathcal{B}\left(n-k,\dfrac{1}{2}\right)$ *que* $Y_1+\cdots+Y_{n-k}=Z_{n-k}$), on obtient

$$p_n=\sum_{k=1}^{n}q_kp_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}q_kp_{n-k}$$

(le terme pour $k=0$ est nul puisque $q_0=0$).

c. Posons $u_n(x)=q_nx^n=P(T=n)x^n$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in S=[-1,1]$, alors $\|u_n\|_{\infty,S}=q_n$ est sommable puisque $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}q_n=1-P(T=+\infty)=P(T<+\infty)\leq 1<+\infty$. Les fonctions u_n sont continues et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur S, la fonction somme G est donc définie et continue sur $S=[-1,1]$.

Pour $x\in\,]-1,1[$, les séries entières définissant $F(x)$ et $G(x)$ sont absolument convergentes. Par produit de Cauchy, on obtient

$$F(x)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}p_nx^n=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}q_kp_{n-k}\right)x^n=1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}q_kp_{n-k}\right)x^n=1+F(x)G(x)\ ,$$

donc

$$\forall x\in\,]-1,1[\qquad G(x)=\frac{F(x)-1}{F(x)}=\frac{f(x)-1}{f(x)}=1-\sqrt{1-x^2}\ .$$

La fonction G étant continue sur $[-1,1]$, cette relation est vraie pour $x\in[-1,1]$.

d. On a en particulier $G(1) = 1$, soit $\sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n) = 1$, donc $P(T < +\infty) = 1$. L'événement $\{T = +\infty\}$ est donc négligeable, un retour à l'origine est presque sûr.

Centrale 4 (Maëlys NORMAND)

1. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E, tel que $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda, \mu\}$ avec $\lambda \neq \mu$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement s'il existe deux projecteurs p et q tels que $p + q = \mathrm{id}_E$ et $\lambda p + \mu q = u$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $a \neq 0$. Montrer que A admet deux valeurs propres et qu'elle est diagonalisable.

Il y avait d'autres questions.

Question de cours. Inégalité de Markov.

- -

1. • Supposons d'abord qu'il existe deux projecteurs p et q tels que $p + q = \mathrm{id}_E$ et $\lambda p + \mu q = u$. Alors p et q sont des projecteurs "associés" ($p+q = \mathrm{id}_E$), ce qui signifie aussi que $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p)$, c'est un exercice très classique. Posons alors $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(q)$ et $G = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(q)$, puis $r = \dim(F) = \mathrm{rg}(p)$. On sait que F et G sont supplémentaires (géométriquement, p est le projecteur sur F parallèlement à G, et q est le projecteur sur G parallèlement à F). Dans une base $\mathcal{B}$ de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \ , \quad \text{donc} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda I_r & 0 \\ 0 & \mu I_{n-r} \end{pmatrix} .$$

La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale, donc u est diagonalisable.

• Réciproquement, supposons u diagonalisable, alors comme $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda, \mu\}$, on a $E = E_\lambda(u) \oplus E_\mu(u)$. En notant p le projecteur sur $E_\lambda(u)$ parallèlement à $E_\mu(u)$, et q le projecteur "associé", i.e. $q = \mathrm{id}_E - p$, on a bien $p+q = \mathrm{id}_E$ et, si x est un vecteur de E, on le décompose en $x = y+z$ avec $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$, alors $u(x) = \lambda y + \mu z = \lambda p(x) + \mu q(x)$, ce qui prouve l'identité $\lambda p + \mu q = u$.

2. Il est facile de voir que $\mathrm{Sp}(A) = \{b \ , \ b + na\}$ et que A est diagonalisable puisque les sous-espaces propres sont de dimensions $n - 1$ et 1 respectivement, mais je ne vois pas l'intérêt d'utiliser la question **1.** En s'y forçant un peu, on recherche deux matrices P et Q telles que $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$ (matrices de projecteurs), $P + Q = I_n$ et vérifiant $A = bP + (b+na)Q$, et on trouve

$$P = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n-1 & & & (-1) \\ & n-1 & & \\ & & \ddots & \\ (-1) & & & n-1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} .$$

Centrale 5 (Céleste PUGNIÈRE)

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **à diagonale propre** si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et si ses coefficients diagonaux sont ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité).

1. Pour $n = 2$, à quelle condition la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est-elle à diagonale propre ?

2. Déterminer les matrices symétriques réelles qui sont à diagonale propre.

3. Quelles sont les matrices antisymétriques réelles à diagonale propre ?

- -

1. On a ici $\chi_A = (X-a)(X-d)-bc$. Or, A est à diagonale propre si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) = \{a, d\}$ (*en convenant que, dans le cas particulier $a = d$, cela signifie que a est valeur propre double*), c'est-à-dire si et seulement si $\chi_A = (X-a)(X-d)$.

Finalement, A est à diagonale propre si et seulement si $bc = 0$, donc si et seulement si $b = 0$ ou $c = 0$.

Bilan. Une matrice carrée d'ordre 2 est à diagonale propre si et seulement si elle est triangulaire. La suite de l'exercice montrera que cette condition nécessaire et suffisante ne se généralisera pas à des dimensions supérieures.

2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ses valeurs propres (non nécessairement distinctes). On a alors la relation $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$. En effet, par le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $A = PDP^{-1} = PDP^\top$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Alors, par un calcul classique,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \mathrm{tr}(A^\top A) = \mathrm{tr}\big((PDP^\top)^\top PDP^\top\big) = \mathrm{tr}(PD^2P^\top) = \mathrm{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \ .$$

Celles et ceusses qui seraient un peu déroutés par ce "calcul classique" n'ont sans doute pas suffisamment manipulé le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par la formule $(A|B) = \mathrm{tr}(A^\top B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}$ *et la norme associée.*

Si A est à diagonale propre, on a alors $\lambda_i = a_{i,i}$ pour tout i (quitte à renuméroter les valeurs propres dans un ordre différent), on voit alors que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2 + \sum_{i\neq j} a_{i,j}^2 \ .$$

Par différence des termes extrêmes, on obtient $\displaystyle\sum_{i\neq j} a_{i,j}^2 = 0$ et, comme il s'agit d'une somme de termes positifs, on déduit que $a_{i,j} = 0$ pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$. La matrice A est alors diagonale.

La réciproque est immédiate: toute matrice diagonale est à diagonale propre.

Bilan. Une matrice symétrique réelle est à diagonale propre si et seulement si elle est diagonale.

3. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Ses coefficients diagonaux $a_{i,i}$ sont alors nuls. Si A est à diagonale propre, alors 0 est valeur propre de A de multiplicité n, soit encore $\chi_A = X^n$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = 0_n$, la matrice A est donc nilpotente. On a donc aussi $A^{2n} = (A^n)^2 = (A^2)^n = 0_n$. Mais la matrice $S = A^2$ est symétrique réelle donc diagonalisable, la relation $S^n = 0_n$ entraîne donc $S = 0_n$ (*facile*), soit $A^2 = 0_n$. Si X est un vecteur quelconque de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$, on a alors

$$\|AX\|^2 = (AX|AX) = X^\top A^\top AX = -X^\top A^2 X = -(X|A^2X) = 0$$

en notant ici $(\cdot|\cdot)$ et $\|\cdot\|$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et la norme qui lui est associée. Donc $A = 0_n$.

La réciproque est immédiate: la matrice nulle est à diagonale propre.

Bilan. Une matrice antisymétrique réelle est à diagonale propre si et seulement si elle est nulle.

Centrale 6 (Raphaël BESSONE)

1. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$.

On posera $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ pour tout n entier naturel.

2. Montrer que $R_n = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

3. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} R_n$.

4. Calculer $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

- -

1. C'est une série alternée et la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0, elle est donc convergente.

2. Fixons n entier naturel. Pour tout $N \geq n$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} &= \sum_{k=n}^{N} (-1)^{k+1} \int_0^1 x^{2k}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \sum_{k=n}^{N} (-x^2)^k\,\mathrm{d}x \qquad \text{(*)} \\
&= -\int_0^1 (-x^2)^n \sum_{k=0}^{N-n} (-x^2)^k\,\mathrm{d}x \qquad \text{(**)} \\
&= -\int_0^1 (-1)^n x^{2n}\,\frac{1-(-x^2)^{N-n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(***)} \\
&= (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{x^{2N+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,. \qquad \text{(****)}
\end{aligned}$$

En **(*)**, *on intervertit une intégrale et une somme finie.*
En **(**)**, *on factorise et on décale les indices.*
En **(***)**, *on applique une formule du cours sur les sommes géométriques.*
La deuxième intégrale dans **(****)** tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$ car sa valeur absolue est majorée par $\displaystyle\int_0^1 x^{2N+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2N+3}$. On en déduit l'égalité voulue.

3. Il est maintenant évident que $|R_n| = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ décroît et tend vers zéro, puisque $|R_n| \leq \displaystyle\int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1}$. De nouveau par le théorème des séries alternées, la série $\sum R_n$ est convergente.

4. On reprend les méthodes de la question **2.** Si N est un entier naturel, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} R_n &= \sum_{n=0}^{N}(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \sum_{n=0}^{N} \frac{(-x^2)^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \frac{1-(-x^2)^{N+1}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \;=\; -J + K_N \;,
\end{aligned}$$

avec $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$ et $K_N = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-x^2)^{N+1}}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$. La majoration $|K_N| \leq \displaystyle\int_0^1 x^{2N+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2N+3}$ montre que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} R_n\right) = -J$, il reste donc à calculer cette intégrale.
Le changement de variable $t = \mathrm{Arctan}(x)$ donne

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^2(t)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\,.$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = -\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)$.

Centrale 7 (Inès AÏT BRAHAM)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, soit $u : E \to E$ défini par $u(P) = Q$ avec $Q(X) = P(X+1)$, soit $v = u - \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que v est un endomorphisme de E. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v^n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, P(X+k)\ .$$

2. Soient n et p entiers naturels avec $p < n$. Prouver que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, k^p = 0\ .$$

3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, k^n$.

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, f(a+kh)\ .$$

- -

1. Il est clair que u et v sont des endomorphismes de E. On a facilement, pour tout k entier naturel et pour tout polynôme P, la relation $u^k(P)(X) = P(X+k)$. Comme les endomorphismes u et $-\mathrm{id}_E$ commutent, la formule du binôme donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v^n = (u - \mathrm{id}_E)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, u^k$$

ce qui, en l'appliquant à un polynôme P quelconque, donne bien la relation demandée.

2. On a $v(X^0) = v(1) = 0$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$v(X^p) = (X+1)^p - X^p = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} X^k$$

est de degré $p-1$. On en déduit facilement que, si P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$, on a $\deg\big(v(P)\big) = \deg(P) - 1$. Et, si P est un polynôme constant, $v(P) = 0$.

Par itération, si $\deg(P) = p \in \mathbb{N}$, alors $\deg\big(v^n(P)\big) = p - n$ si $0 \le n \le p$, puis $v^n(P) = 0$ si $n > p$.

Si $p < n$, alors $v^n(X^p)$ est le polynôme nul. Mais $v^n(X^p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, (X+k)^p$.

En évaluant pour $X = 0$, on obtient la relation demandée:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, k^p = 0 \qquad \text{si} \quad p < n\ .$$

3. Le polynôme $v(X^n)$ a pour terme dominant nX^{n-1}. Par récurrence, si $0 \le p \le n$, le polynôme $v^p(X^n)$ a pour terme dominant $n(n-1)\cdots(n-p+1)X^{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}\, X^{n-p}$. Finalement, le polynôme $v^n(X^n)$ a pour terme dominant $n!$, ce qui signifie que $v^n(X^n)$ est le polynôme constant de valeur $n!$.

Mais on a aussi $v^n(X^n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(X+k)^n$. En évaluant pour $X=0$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\,k^n=n!\ .$$

d. Pour h réel non nul, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\,f(a+kh) &= \frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\left(\sum_{p=0}^{n}\frac{(kh)^p}{p!}\,f^{(p)}(a)+h^n\,\varepsilon_k(h)\right)\\
&= \frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\,\frac{(kh)^p}{p!}\,f^{(p)}(a)+\varepsilon(h)\\
&= \frac{1}{h^n}\sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,(-1)^{n-k}\,k^p\right)\frac{h^p}{p!}\,f^{(p)}(a)+\varepsilon(h)\\
&= f^{(n)}(a)+\varepsilon(h)\ .
\end{aligned}$$

Commentaires: on a utilisé la formule de Taylor-Young pour développer $f(a+kh)$ à l'ordre n, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, en introduisant des fonctions $\varepsilon_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\lim_{h\to0}\varepsilon_k(h)=0$, on a ensuite posé $\varepsilon(h)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\varepsilon_k(h)$, c'est une combinaison linéaire de fonctions ayant des limites nulles en zéro donc on a aussi $\displaystyle\lim_{h\to0}\varepsilon(h)=0$, enfin on a interverti les sommations (sommes finies) et on a utilisé les questions **b.** et **c.** pour évaluer la somme restant entre parenthèses. La conclusion de tout cela est que

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\,f(a+kh)=f^{(n)}(a)\ .$$

Concours Mines-Ponts

CCMP 1 (Inès AÏT BRAHAM)

Exo 1. (15 min. de préparation). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

a. Exprimer $\det(M)$ en fonction de $\det(A)$.

b. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exo 2.a. Soit $a \in]0,1]$. Montrer que $x \mapsto \dfrac{(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}}{x}$ est continue par morceaux sur $[a,1]$.

b. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}}{x} \mathrm{d}x$ est convergente.

Indication: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on calculera $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}}{x} \mathrm{d}x$.

- -

Exo 1.a. Par les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - L_{i-n}$ pour $i \in [\![n+1, 2n]\!]$, puis $C_j \leftarrow C_j - 4\, C_{j-n}$ pour $j \in [\![n+1, 2n]\!]$, on transforme M en $M' = \begin{pmatrix} A & 4A \\ 0_n & -3A \end{pmatrix}$, puis en $M'' = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & -3A \end{pmatrix}$, ceci sans modifier le déterminant, donc (*matrice diagonale par blocs*):

$$\det(M) = \det(M'') = \det(A) \times \det(-3A) = (-3)^n \ \det(A)^2 \,.$$

b. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ admet -1 et 3 comme valeurs propres, et un calcul classique permet d'obtenir sa diagonalisation: $B = QDQ^{-1}$ avec $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Un calcul analogue, dans lequel on remplace les coefficients scalaires par des blocs carrés d'ordre n, montre que

$$M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I_n & 2I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -A & 0_n \\ 0_n & 3A \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} I_n & -2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix} ,$$

le facteur de droite étant l'inverse du facteur de gauche. Autrement dit, M est semblable à la matrice diagonale par blocs $\Delta = \begin{pmatrix} -A & 0_n \\ 0_n & 3A \end{pmatrix}$. Il ne reste donc plus qu'à montrer que Δ est diagonalisable si et seulement si A l'est. Or,

- si A est diagonalisable, on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, et on a alors

$$\Delta = \begin{pmatrix} -PDP^{-1} & 0_n \\ 0_n & 3PDP^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0_n \\ 0_n & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -D & 0_n \\ 0_n & 3D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0_n \\ 0_n & P^{-1} \end{pmatrix} ,$$

donc Δ est diagonalisable puisque la matrice $\begin{pmatrix} -D & 0_n \\ 0_n & 3D \end{pmatrix}$ est diagonale ;

- si Δ est diagonalisable, il existe un polynôme R, scindé à racines simples, tel que $R(\Delta) = 0_{2n}$, soit $\begin{pmatrix} R(-A) & 0_n \\ 0_n & R(3A) \end{pmatrix} = 0_{2n}$. En particulier, $R(-A) = 0_n$ et la matrice $-A$ est alors diagonalisable, et A l'est aussi.

Exo 2.a. Soit $f : x \mapsto \dfrac{(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}}{x}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall x \in \left] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right] \qquad f(x) = \frac{(-1)^k}{x}\ .$$

En effet, si n est un entier naturel non nul, on a

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n \iff n \leq \frac{1}{x} < n+1 \iff \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}\ .$$

Sur $]0,1]$, les points de discontinuité de f sont les $\dfrac{1}{k}$ avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Il y en a un nombre fini dans le segment $[a,1]$ et, en chacun de ces points, la fonction f admet une limite à gauche finie qui est $f\left(\dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{(-1)^k}{k}$ et une limite à droite finie qui est $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$. La fonction f est donc continue par morceaux sur tout segment $[a,1]$, et en fait sur tout segment inclus dans $]0,1]$. Elle est donc continue par morceaux sur $]0,1]$.

b. Comme $\left|f(x)\right| = \dfrac{1}{x}$ (non intégrable sur $]0,1]$), l'intégrale I n'est pas absolument convergente. On va montrer toutefois qu'elle est "semi-convergente".

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^k \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{\mathrm{d}x}{x} = (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\ .$$

Donc, par la relation de Chasles, si $n \geq 2$,

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\ .$$

La suite de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$ est décroissante et tend vers 0, on déduit alors du théorème spécial que la série alternée $\displaystyle\sum_{k\geq 1} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ converge, notons S sa somme.

On a donc déjà obtenu que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = S$.

Pour la suite, posons $S_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = S$.

Pour montrer que l'intégrale I est convergente et a pour valeur S, il faudrait obtenir $\displaystyle\lim_{y\to 0} \int_{y}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = S$, où y est une variable réelle, ce qui est vrai mais un peu compliqué à rédiger. Soit $y \in]0,1]$, il existe alors un unique entier naturel n non nul tel que

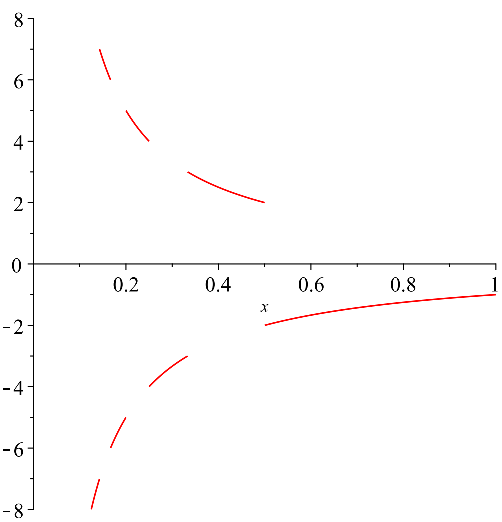
$\dfrac{1}{n+1} < y \leq \dfrac{1}{n}$, c'est $n = \left\lfloor \dfrac{1}{y} \right\rfloor$. Alors

$$\left| S - \int_y^1 f \right| = \left| S - \int_y^{\frac{1}{n}} f - S_n \right| \leq |S - S_n| + \left| \int_y^{\frac{1}{n}} f \right| = |S - S_n| + \int_y^{\frac{1}{n}} \frac{\mathrm{d}x}{x}\ .$$

Or, $\displaystyle\int_y^{\frac{1}{n}} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc $\displaystyle\left| S - \int_y^1 f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq |S - S_{n(y)}| + \ln\left(1 + \frac{1}{n(y)}\right)$ avec $n(y) = \left\lfloor \dfrac{1}{y} \right\rfloor \underset{y \to 0}{\longrightarrow} +\infty$. Par composition de limites et majoration de la valeur absolue, on déduit $\displaystyle\lim_{y \to 0} \int_y^1 f(x)\,\mathrm{d}x = S$, donc $\displaystyle I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = S$.

Voici une représentation graphique de cette fonction bizarre, le graphe étant constitué de morceaux des deux branches de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.



CCMP 2 (Alice PONCHEL)

Exo 1. (15 min. de préparation).

Soit E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on note $K(f)$ le plus petit réel positif k tel que f soit k-lipschitzienne sur $[0,1]$.

a. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b. Justifier l'existence de $K(f)$ pour tout $f \in E$.

c. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Montrer que $f \in E$ et déterminer $K(f)$.

d. L'application $K : E \to \mathbb{R}_+$ est-elle une norme ?

Exo 2. Pour quelles valeurs du nombre complexe k la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Indication: on pourra montrer que $\chi_A = X^2(X-\lambda)(X-\mu)$ *avec* $\begin{cases} \lambda+\mu & = k \\ \lambda^2+\mu^2 & = k^2+6 \end{cases}$.

- -

Exo 1.a. Il est clair que $0 \in E$. Soient $f \in E$, $g \in E$ et α réel. Si f est k-lipschitzienne et g est k'-lipschitzienne, alors pour $(x,y) \in [0,1]^2$,

$$\begin{aligned} \big|(\alpha f+g)(x)-(\alpha f+g)(y)\big| &= \Big|\alpha\big(f(x)-f(y)\big)+\big(g(x)-g(y)\big)\Big| \\ &\leq |\alpha|\,\big|f(x)-f(y)\big|+\big|g(x)-g(y)\big| \\ &\leq \big(|\alpha|k+k'\big)\,|x-y|\ . \end{aligned}$$

Donc $\alpha f+g$ est $\big(|\alpha|k+k'\big)$-lipschitzienne et $\alpha f+g \in E$. Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

b. Soit $f \in E$, soit l'ensemble $I(f) = \Big\{k \in \mathbb{R}_+ \;\Big|\; \forall (x,y) \in [0,1]^2 \quad \big|f(x)-f(y)\big| \leq k|x-y|\Big\}$. $I(f)$ est l'ensemble des "constantes de Lipschitz" pour f. Alors $I(f)$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (puisque $f \in E$) et minorée (par 0), elle admet donc une borne inférieure $K(f) = \inf\big(I(f)\big)$. Il reste à montrer que $K(f) \in I(f)$. Or, si (k_n) est une suite convergente d'éléments de $I(f)$, de limite $k \in \mathbb{R}_+$, en passant à la limite ($n \to +\infty$) dans les inégalités $\big|f(x)-f(y)\big| \leq k_n|x-y|$ avec $(x,y) \in [0,1]^2$ fixé, on obtient $\big|f(x)-f(y)\big| \leq k|x-y|$, donc $k \in I(f)$. Autrement dit, $I(f)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$. Sa borne inférieure, qui est un point adhérent à $I(f)$, est alors élément de $I(f)$, donc c'est le minimum (ou "plus petit élément") de $I(f)$, i.e. $K(f) = \min\big(I(f)\big)$.

Remarque. Il est facile alors de comprendre que $I(f) = \big[K(f),+\infty\big[$.

Remarque. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, si l'on note $T(f)$ l'ensemble des valeurs absolues des taux d'accroissement de f, i.e.

$$T(f) = \left\{\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\ ;\ (x,y) \in [0,1]^2\ ,\ x \neq y\right\},$$

alors f appartient à E si et seulement si la partie $T(f)$ est majorée, et $I(f)$ est alors l'ensemble des majorants de la partie $T(f)$. Du coup, $K(f)$ est la borne supérieure de l'ensemble $T(f)$ puisque c'est son plus petit majorant: $K(f) = \sup\big(T(f)\big)$.

c. Toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ appartient à E avec $K(f) = \max\limits_{x\in[0,1]} \big|f'(x)\big| = \|f'\|_\infty$.

En effet, les inégalités d'accroissements finis donnent, pour $(x,y) \in [0,1]^2$, la majoration $\big|f(x)-f(y)\big| \leq \|f'\|_\infty\,|x-y|$, donc **(*):** $\|f'\|_\infty \in I(f)$ (*notations de la question précédente*), et $I(f)$ est non vide donc $f \in E$.

Puis il existe $c \in [0,1]$ tel que $\big|f'(c)\big| = \|f'\|_\infty$. Par définition de la dérivée comme limite du taux d'accroissement, si (x_n) est une suite d'éléments de $[0,1]$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$

et $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \neq c$, on a **(**):** $\left|\dfrac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left|f'(c)\right| = \|f'\|_\infty$, il n'existe donc pas d'élément de la partie $I(f)$ qui soit strictement inférieur à $\|f'\|_\infty$, c'est donc le minimum.
Je développe un petit peu: **(*)** *montre que* $K(f) = \min I(f) \leq \|f'\|_\infty$, *et* **(**)** *montre que* $I(f) \subset \Big[\|f'\|_\infty, +\infty\Big[$ *puisque, si un réel* k *est strictement inférieur à* $\|f'\|_\infty$, *alors il existe* n *entier tel que* $\left|\dfrac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c}\right| > k$ *et* k *n'est alors pas une constante de Lipschitz pour* f, *autrement dit* $k \notin I(f)$. *Donc* $K(f) = \min I(f) \geq \|f'\|_\infty$.

d. Non, l'application K n'est pas une norme sur E puisque $K(f) = 0$ si et seulement si f est constante, l'axiome de séparation n'est donc pas satisfait.

Remarque. Les autres axiomes (homogénéité et inégalité triangulaire) sont vérifiés. Sur le sous-espace vectoriel $E' = \big\{f \in E \mid f(0) = 0\big\}$, on peut vérifier que la restriction de K est une norme. Plus généralement, si on note $U = \mathrm{Vect}(1)$ le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions constantes, si S est un supplémentaire de U dans E (c'est le cas du sous-espace E' mentionné précédemment), la restriction de K à S est une norme.

2. On constate que $\mathrm{rg}(A) = 2$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A) = E_0(A)$ est de dimension 2. La multiplicité de la valeur propre 0 est donc au moins 2, donc $X^2 \mid \chi_A$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors χ_A est unitaire de degré 4 et scindé, donc est de la forme $\chi_A = X^2(X-\lambda)(X-\mu)$ avec λ et μ compexes (éventuellement nuls). Le coefficient de X^3 vaut $-(\lambda+\mu)$, mais est aussi égal à $-\mathrm{tr}(A) = -k$ d'après le cours, donc **(1):** $\lambda + \mu = k$.

De plus, sur $\mathbb{C}$, la matrice A est trigonalisable, donc semblable à une matrice triangulaire T dont les coefficients diagonaux sont $0, 0, \lambda, \mu$. Alors A^2 est semblable à T^2 qui est triangulaire avec pour coefficients diagonaux sont $0, 0, \lambda^2, \mu^2$. En calculant A^2 (*calcul laissé au lecteur, seuls les coefficients diagonaux sont utiles*), on obtient $\quad(\mathbf{2}): \quad \lambda^2 + \mu^2 = \mathrm{tr}(T^2) = \mathrm{tr}(A^2) = k^2 + 6$.

De **(1)**, on tire $\mu = k - \lambda$ et on substitue dans **(2)**: après simplifications, on a $\lambda^2 - k\lambda - 3 = 0$, équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = k^2 + 12$. D'où la disjonction de cas:
- si $k^2 + 12 \neq 0$, i.e. si $k \neq \pm 2i\sqrt{3}$, alors A admet deux valeurs propres distinctes non nulles, chacune ayant un sous-espace propre non réduit à $\{0\}$, la somme des dimensions des sous-espaces propres de A vaut alors 4 (*elle ne peut pas dépasser cette valeur*), et A est donc diagonalisable ;
- si $k^2 + 12 = 0$, i.e. si $k = \pm 2i\sqrt{3}$, alors A admet une seule valeur propre autre que 0, à savoir $\lambda = \dfrac{k}{2}$, qui est donc valeur propre double, et on voit en écrivant la matrice $A - \dfrac{k}{2}I_4$ qu'elle est de rang au moins égal à 3 (les trois premières colonnes sont "échelonnées"... à condition de les mettre dans l'ordre C_2, C_3, C_1 et de les lire de bas en haut!), donc le sous-espace propre associé est de dimension 1, et la somme des dimensions des SEP vaut 3, ainsi A n'est pas diagonalisable.

Remarque. Si $k \in \mathbb{R}$, alors A est symétrique réelle, donc diagonalisable.

Remarque. J'ai rédigé cet exercice en utilisant les indications, mais il est aussi rapide de calculer directement le polynôme caractéristique, on obtient $\chi_A = X^4 - kX^3 - 3X^2$, on retrouve comme facteur donc le trinôme $X^2 - kX - 3$ et on reprend la même discussion.

CCMP 3 (Baptiste VINET)

Exo 1. Soient A et B deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme $u_{A,B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad u_{A,B}(M) = AMB\ .$$

a. Montrer que $u_{A,B}$ est l'endomorphisme nul si et seulement si $A = 0_n$ **ou** $B = 0_n$.

b. Montrer que l'endomorphisme $u_{A,B}$ est nilpotent si et seulement si A **ou** B est nilpotente.

c. Soient $(X_1, \cdots, X_n)$ et $(Y_1, \cdots, Y_n)$ deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (X_i Y_j^\top)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d. Montrer que, si A **et** B sont diagonalisables, alors l'endomorphisme $u_{A,B}$ est diagonalisable.

e. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable (sur $\mathbb{R}$), mais que l'endomorphisme $u_{A,A}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

Exo 2.a. Résoudre, sur $]-1,1[$, l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) : \qquad (1-t^2)y'' - 2ty' = 0\ .$$

b. Trouver les fonctions $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles qu'en posant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \qquad g(x,y) = f\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right)\ ,$$

la fonction g ait un laplacien nul.

- -

Exo 1.a. Si $A = 0_n$ ou $B = 0_n$, il est clair alors que $u_{A,B} = 0$.

Pour la réciproque, commençons par remarquer que, si $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ sont deux matrices-colonnes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la matrice carrée $M = UV^\top$ est nulle si et seulement si $U = 0$ ou $V = 0$. En effet, ici encore, si $U = 0$ ou $V = 0$, il est clair que $M = 0_n$ et, si $U \neq 0$ et $V \neq 0$, alors il existe un indice i tel que $u_i \neq 0$ et un indice j tel que $v_j \neq 0$ donc le coefficient d'indices (i,j) de M, qui vaut $u_i v_j$, est non nul, donc $M \neq 0_n$.

Donc, si $A \neq 0_n$ et $B \neq 0_n$, alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $U = AX \neq 0$ et il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $V = B^\top Y \neq 0$ donc, d'après la remarque ci-dessus, $UV^\top \neq 0$, soit $AXY^\top B \neq 0_n$, la matrice carrée $M = XY^\top$ vérifie donc $AMB \neq 0_n$, ce qui termine la preuve.

b. Notons d'abord que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $u_{A,B}^k(M) = A^k M B^k$.

Si A est nilpotente, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_n$, alors pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $u_{A,B}^k(M) = A^k M B^k = 0_n$ donc $u_{A,B}^k$ est l'endomorphisme nul et $u_{A,B}$ est donc nilpotent. Même conclusion si B est nilpotente.

Réciproquement, si l'endomorphisme $u_{A,B}$ est nilpotent, il existe k entier tel que $u_{A,B}^k = 0$, c'est-à-dire $u_{A^k,B^k} = 0$, donc $A^k = 0_n$ ou $B^k = 0_n$ d'après le **a.**, et au moins une des deux matrices A ou B est nilpotente.

c. La famille $\mathcal{F}$ étant de cardinal $n^2 = \dim\big(\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})\big)$, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit donc $(\alpha_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une famille de n^2 réels, supposons **(*)**: $\displaystyle\sum_{i,j}\alpha_{i,j}X_iY_j^\top = 0_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$. En notant $(E_1,\cdots,E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathrm{I\!R})$, on a $\displaystyle\sum_{i,j}\alpha_{i,j}X_iY_j^\top E_k = 0$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathrm{I\!R})$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ (ce qui revient à extraire la k-ième colonne de la relation matricielle **(*)** ci-dessus). Mais $Y_j^\top E_k = (Y_j|E_k)$ est un scalaire, on peut donc écrire

$$\forall k\in[\![1,n]\!]\qquad \sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n\alpha_{i,j}\,(Y_j|E_k)\Big)\,X_i = 0$$

et, la famille $(X_1,\cdots,X_n)$ étant libre, on déduit

$$\forall i\in[\![1,n]\!]\quad\forall k\in[\![1,n]\!]\qquad \sum_{j=1}^n\alpha_{i,j}(Y_j|E_k) = \left(\sum_{j=1}^n\alpha_{i,j}Y_j\ \Big|\ E_k\right) = 0\ .$$

Pour tout i, le vecteur $\displaystyle\sum_{j=1}^n\alpha_{i,j}Y_j$ est donc orthogonal à tous les vecteurs d'une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathrm{I\!R})$, il est donc nul. Comme la famille $(Y_1,\cdots,Y_n)$ est libre, on déduit enfin que tous les $\alpha_{i,j}$ sont nuls. La famille $\mathcal{F}$ est donc libre, et c'est donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathrm{I\!R})$.

d. Si A et B sont diagonalisables, alors il existe une base $(X_1,\cdots,X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathrm{I\!R})$ constituée de vecteurs propres de A, et une base $\mathcal{B}=(Y_1,\cdots,Y_n)$ constituée de vecteurs propres de $B^\top$ (qui est évidemment diagonalisable aussi). On a donc $AX_i=\lambda_iX_i$ pour tout i, et $B^\top Y_j=\mu_jY_j$, soit $Y_j^\top B=\mu_jY_j^\top$ pour tout j.

Pour tout couple (i,j), soit $M_{i,j}=X_iY_j^\top\in\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$, alors $M_{i,j}$ est vecteur propre de l'endomorphisme $u_{A,B}$ puisque $M_{i,j}\neq 0_n$ d'après **a.** ($X_i\neq 0$ et $Y_j\neq 0$) et

$$u_{A,B}(M_{i,j}) = AX_iY_j^\top B = (AX_i)\,(B^\top Y_j)^\top = (\lambda_iX_i)\,(\mu_jY_j^\top) = \lambda_i\mu_j\,M_{i,j}\ .$$

D'autre part, la famille $(M_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ d'après **c.** On dispose donc d'une base de $\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ constituée de vecteurs propres de l'endomorphisme $u_{A,B}$. Ainsi, $u_{A,B}$ est diagonalisable.

e. La matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathrm{I\!R}$ car elle n'a aucune valeur propre réelle.

En revanche, $A^2=-I_2$ et, comme $u_{A,A}(M)=AMA$ pour toute matrice $M\in\mathcal{M}_2(\mathrm{I\!R})$, on a $u_{A,A}^2(M)=A^2MA^2=M$ pour tout M, donc $u_{A,A}^2=\mathrm{id}_{\mathcal{M}_2(\mathrm{I\!R})}$, l'endomorphisme $u_{A,A}$ est une symétrie dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathrm{I\!R})$, il est donc diagonalisable par exemple puisqu'il admet pour polynôme annulateur $X^2-1=(X-1)(X+1)$ qui est scindé à racines simples. La réciproque de la question **d.** est donc fausse.

Exo 2.a. Sur $]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned}(1-t^2)y''-2ty'=0 &\iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big((1-t^2)y'\big)=0\\ &\iff (1-t^2)y'=C\\ &\iff y'=\frac{C}{1-t^2}=\frac{C}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\\ &\iff y(t)=\frac{C}{2}\,\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)+D\ ,\end{aligned}$$

où C et D sont deux constantes réelles arbitraires.

Remarque. La fonction de $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ \ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$ est la bijection réciproque de la fonction **tangente hyperbolique** $\mathrm{th} : x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ qui est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$. On l'appelle **argument tangente hyperbolique** et on la note Argth.

b. Pffou que de calculs!!

Notons d'abord que, si $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, alors $t = \dfrac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)} \in]-1,1[$ puisque $\left|\cos(2x)\right| \leq 1$ et $\mathrm{ch}(2y) > 1$. Si la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors la fonction g proposée par l'énoncé est bien définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet ouvert du plan comme composée et quotient de fonctions du même métal. Calculons ses dérivées partielles premières puis secondes. On posera dans certains calculs $t = \dfrac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}$ pour simplifier un peu l'écriture.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{2\ \sin(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\ f'\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right)\ ,$$

puis

$$\textbf{(*)} \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{4\ \cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\ f'(t) + \frac{4\ \sin^2(2x)}{\mathrm{ch}^2(2y)}\ f''(t)\ .$$

De façon analogue (mais en pire):

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-2\ \cos(2x)\ \mathrm{sh}(2y)}{\mathrm{ch}^2(2y)}\ f'\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right)\ ,$$

puis

$$\textbf{(**)} \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -2\cos(2x)\ \frac{2\,\mathrm{ch}^3(2y) - 4\,\mathrm{sh}^2(2y)\ \mathrm{ch}(2y)}{\mathrm{ch}^4(2y)}\ f'(t) + \frac{4\ \cos^2(2x)\ \mathrm{sh}^2(2y)}{\mathrm{ch}^4(2y)}\ f''(t)\ .$$

En exprimant le laplacien $\Delta g = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$, on voit quelques simplifications apparaître, surtout si l'on pense à remplacer le $\sin^2(2x)$ de **(*)** par $1 - \cos^2(2x)$, et le deuxième $\mathrm{sh}^2(2y)$ de **(**)** par $\mathrm{ch}^2(2y) - 1$, il reste alors

$$\begin{aligned} \Delta g(x,y) &= -8\ \frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}^3(2y)}\ f'(t) + \frac{4\ \left(\mathrm{ch}^2(2y) - \cos^2(2x)\right)}{\mathrm{ch}^4(2y)}\ f''(t) \\ &= \frac{4}{\mathrm{ch}^2(2y)}\ \Big[-2t\ f'(t) + (1-t^2)\ f''(t)\Big]\ . \end{aligned}$$

La fonction g est donc "harmonique", i.e. de laplacien nul, sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si f est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle résolue en **a.** (*quel exercice bien agencé!*), donc de la forme $t \mapsto C\ \mathrm{Argth}(t) + D = \dfrac{C}{2}\ \ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right) + D$.

CCMP 4 (Edward CHARBONNIER)

Exo 1. Soit l'équation différentielle **(E):** $xy'' + y' + y = 0$.

a. Montrer que **(E)** admet une unique solution développable en série entière vérifiant $y(0) = 1$, on notera f cette solution. Déterminer f et préciser le rayon de convergence de la série entière.

b. On pose $g(x) = x\, f'(x)^2 + f(x)^2$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exo 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer son rang. Montrer que A est diagonalisable et construire une base de vecteurs propres.

- -

Exo 1.a. Cherchons les solutions de **(E)** développables en série entière en posant $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur un certain intervalle $]-R, R[$ avec $R > 0$. Alors $y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$, puis $xy''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n$. On réinjecte dans l'équation. Après simplifications, on est ramené à

$$\forall x \in\,]-R, R[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \big((n+1)^2 a_{n+1} + a_n\big) x^n = 0\ .$$

Par unicité du développement en série entière, cela équivaut à

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+1} = -\frac{a_n}{(n+1)^2}\ .$$

Par une récurrence immédiate, cela donne $a_n = \dfrac{(-1)^n a_0}{(n!)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La condition $f(0) = 1$ entraîne $a_0 = 1$, donc $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n!)^2}$ pour tout n. La seule solution du problème posé est donc $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n!)^2}\, x^n$. Il est immédiat de vérifier que le rayon de convergence est $+\infty$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car elle est DSE, on en déduit immédiatement que g est aussi $\mathcal{C}^\infty$. Dérivons g:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)^2 + 2x\, f'(x)\, f''(x) + 2\, f(x)\, f'(x) \\ &= f'(x)\, \big(2x\, f''(x) + f'(x) + 2f(x)\big) \\ &= f'(x)\, \Big(2\, \big(x\, f''(x) + f'(x) + f(x)\big) - f'(x)\Big) \\ &= -f'(x)^2\ \leq\ 0 \end{aligned}$$

en utilisant le fait que f est solution de **(E)**. Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exo 2. • On constate que les colonnes C_2, $\cdots$, C_n sont linéairement indépendantes, grâce à l'échelonnement. Donc $\mathrm{rg}(A) \geq n-1$, et le rang de A vaut $n-1$ si et seulement si $C_1 \in \mathrm{Vect}(C_2, \cdots, C_n)$. La recherche de coefficients α_2, $\cdots$, α_n tels que $C_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \alpha_k C_k$ conduit au système

$$\left\{\alpha_2 = 1\ ,\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0\ ,\ \cdots\ ,\ \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0\ ,\ \alpha_n = 1\right\}\ ,$$

soit

$$\left\{\alpha_2 = 1\ ,\ \alpha_3 = -1\ ,\ \alpha_4 = 1\ ,\ \cdots\ ,\ \alpha_n = (-1)^n\ ,\ \alpha_n = 1\right\}\ .$$

On a alors une disjonction de cas:

- si n est impair, ce système est incompatible (*cf.* les deux dernières équations), donc $C_1 \notin \mathrm{Vect}(C_2, \cdots, C_n)$ et $\mathrm{rg}(A) = n$, i.e. la matrice A est inversible ;

- si n est pair, on a $C_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (-1)^k C_k$ donc $\mathrm{rg}(A) = n-1$.

• Posons $B = A - I_n$. On observe que B est une matrice de permutation (permutation circulaire), donc $B^n = I_n$. Le polynôme $X^n - 1$ est donc annulateur de la matrice B, d'où $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathcal{U}_n$ (ensemble des racines n-ièmes de l'unité). Ensuite, si $\omega \in \mathcal{U}_n$, on observe que le vecteur $X_\omega = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^n$ vérifie $BX_\omega = \omega X_\omega$, donc $\omega \in \mathrm{Sp}(B)$. Finalement, $\mathrm{Sp}(B) = \mathcal{U}_n$ et, pour tout $\omega \in \mathcal{U}_n$, $E_\omega(B) = \mathrm{Vect}(X_\omega)$.

Comme $A = B + I_n$, les valeurs propres sont décalées d'une unité, autrement dit $\mathrm{Sp}(A) = \big\{1 + \omega\ ;\ \omega \in \mathcal{U}_n\big\}$ et, pour tout $\omega \in \mathcal{U}_n$,

$$E_{1+\omega}(A) = E_\omega(B) = \mathrm{Vect}(X_\omega)\ .$$

Remarque. On retrouve le fait que A est non inversible si et seulement si $0 \in \mathrm{Sp}(A)$, i.e. **ssi** $-1 \in \mathrm{Sp}(B) = \mathcal{U}_n$, i.e. **ssi** n est pair.

CCMP 5 (Maëlys NORMAND)

Exo 1. Soit $E = \mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. Pour $f \in E$, on définit $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0,1] \qquad \tilde{f}(x) = \int_0^1 \min\{x, t\}\, f(t)\, \mathrm{d}t\ .$$

Soit l'application $F : f \mapsto \tilde{f}$.

a. Montrer que F est un endomorphisme de E.

b. Montrer que, pour tout $f \in E$, l'application $\tilde{f} = F(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, expliciter $(\tilde{f})'(x)$ et $(\tilde{f})''(x)$. On calculera $\tilde{f}(0)$ et $(\tilde{f})'(1)$.

c. Déterminer les éléments propres de F.

Exo 2. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

a. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

b. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

c. Calculer I.

- -

Exo 1.a. La linéarité de F résulte immédiatement de la linéarité de l'intégrale. Pour $f \in E$, on a

$$\forall x \in [0,1] \qquad \tilde{f}(x) = F(f)(x) = \int_0^x t\, f(t)\,\mathrm{d}t + x \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Ainsi écrit, il est évident que la fonction $\tilde{f} = F(f)$ est continue (donc F est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel E)...

b. ... et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ par le théorème fondamental de l'analyse, avec

$$\forall x \in [0,1] \qquad (\tilde{f})'(x) = x\, f(x) + \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t - x\, f(x) = \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Puis $(\tilde{f})'$ est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$, donc la fonction $\tilde{f} = F(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, avec $(\tilde{f})'' = -f$. On observe $\tilde{f}(0) = 0$ et $(\tilde{f})'(1) = 0$.

Remarque. La fonction $\tilde{f} = F(f)$ est **la** solution unique du problème **(P)** : $\begin{cases} y'' = -f \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$.

En effet, la fonction $\tilde{f}$ vérifie **(P)**, et on montre facilement que deux fonctions vérifiant **(P)** sont nécessairement égales (si $g'' = h'' = -f$, alors $g - h$ est une fonction affine, et je laisse le lecteur poursuivre le raisonnement). Attention, **(P)** n'est pas un "problème de Cauchy".

c. • Si $F(f) = 0$, alors $f = -\big(F(f)\big)'' = 0$, donc $\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$, et le réel 0 n'est pas valeur propre de F.

• Si λ est un réel non nul, en utilisant la remarque ci-dessus, on peut écrire

$$F(f) = \lambda\, f \iff \big(\lambda\, f \text{ est solution de } \mathbf{(P)}\big) \iff \begin{cases} f'' + \dfrac{1}{\lambda}\, f = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases}.$$

La forme des solutions de l'équation différentielle **(E)** : $f'' + \dfrac{1}{\lambda}\, f = 0$ dépend du signe de λ :

$\triangleright$ si $\lambda < 0$, posons $\lambda = -\dfrac{1}{\omega^2}$, les solutions de **(E)** sont $f(x) = A\ \mathrm{ch}(\omega x) + B\ \mathrm{sh}(\omega x)$; les conditions $f(0) = f'(1) = 0$ entraînent $A = 0$ et $B\,\omega\ \mathrm{ch}(\omega) = 0$, donc $B = 0$, puis $f = 0$, et λ n'est pas valeur propre de F ;

$\triangleright$ si $\lambda > 0$, posons $\lambda = \dfrac{1}{\omega^2}$ $(\omega > 0)$, les solutions de **(E)** sont $f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$; les conditions $f(0) = f'(1) = 0$ se traduisent par $A = 0$ et $B\,\omega\,\cos(\omega) = 0$: on trouve alors des solutions (“fonctions propres” f) non nulles si et seulement si $\cos(\omega) = 0$, autrement dit si et seulement si $\omega = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$ puisque l'on veut $\omega > 0$.

Conclusion. Les valeurs propres de l'endomorphisme F sont les réels $\lambda_k = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)^2}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k est la droite vectorielle engendrée par la fonction $f_k : x \mapsto \sin\left[\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)x\right]$.

Exo 2.a. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2 - 1}$ est continue sur $]0,1[$, elle est prolongeable par continuité au point 1 car $\ln(t) \underset{t\to1}{\sim} t - 1$, donc $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{(t-1)(t+1)} \underset{t\to1}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, et l'équivalent $f(t) \underset{t\to0}{\sim} -\ln(t)$ montre qu'elle est intégrable en 0, elle est donc finalement intégrable sur l'intervalle $]0,1[$, d'où la convergence de l'intégrale I.

b. Pour $t \in]0,1[$, on a $f(t) = -\dfrac{\ln(t)}{1 - t^2} = -\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}\,\ln(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)$ avec $f_k(t) = -t^{2k}\ln(t)$. Les fonctions f_k sont continues et intégrables sur $]0,1[$ (c'est du cours pour $k = 0$ et, pour $k \geq 1$, la fonction f_k est prolongeable en une fonction continue sur le **segment** $[0,1]$), la série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $]0,1[$ par construction et a pour somme la fonction f. Enfin, par une intégration par parties,

$$\int_0^1 \big|f_k(t)\big|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\ \ln(t)\right]_{t\to0}^{t=1} + \int_0^1 \frac{t^{2k}}{2k+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2k+1)^2}\ ,$$

qui est sommable. On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme qui, par le même calcul que ci-dessus puisque les fonctions sommées sont positives, donne

$$I = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\ .$$

c. En séparant les termes d'indices pairs et impairs, on a

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} = I + \frac{1}{4}\times\frac{\pi^2}{6}\ ,$$

donc $I = \dfrac{3}{4}\times\dfrac{\pi^2}{6} = \dfrac{\pi^2}{8}$.

Concours Mines-Télécom

CMT 1 (Hasna BENALI)

Exo 1. Soit la série entière $\sum_{n\geq 0} \ln(n+1)\, x^n$, on note $S(x)$ sa somme en cas de convergence.

a. Quel est le rayon de convergence R ?

b. Vérifier la relation $\forall x \in\,]-1,1[\qquad (1-x)\, S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^n$.

c. On pose $U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) x^n$. Montrer que la fonction U est définie et continue sur $[-1,1]$.

d. Exprimer $S(x)$ en fonction de $U(x)$ pour $x \in\,]-1,1[$.

e. En déduire le comportement asymptotique (limite éventuelle ou équivalent) de $S(x)$ lorsque $x \to 1^-$ et lorsque $x \to (-1)^+$.

Exo 2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension trois, soit $f \in \mathcal{L}(E)$, supposé non diagonalisable, tel que $(f^2 + \mathrm{id}_E) \circ (f - \mathrm{id}_E) = 0$.

a. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = E$.

b. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle l'endomorphisme f est représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- -

Exo 1.a. $R = 1$ par application directe de la régle de d'Alembert.

b. Pour $x \in\,]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
(1-x)\, S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(n+1)\, x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(n+1)\, x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n+1)\, x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)\, x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\ln(n+1) - \ln(n)\big)\, x^n \ ,
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu.

c. Posons $u_n(x) = a_n x^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$, avec $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$. Alors $\|u_n\|_{\infty,[-1,1]} = |a_n|$ et un petit DL montre que $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque $n \to +\infty$, donc la série numérique $\sum |a_n|$ converge. Il y a donc convergence normale sur $[-1,1]$ de la série de fonctions $\sum u_n$. Les fonctions monomiales u_n étant continues sur $[-1,1]$, la fonction somme U l'est aussi.

d. On sait que, pour $x \in]-1,1[$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ (*DSE usuel*). Pour $x \in]-1,1[$, on a donc $U(x) = (1-x)\,S(x) + \ln(1-x)$, soit encore

$$\forall x \in]-1,1[\qquad S(x) = \frac{U(x) - \ln(1-x)}{1-x}\ .$$

e. On peut déduire de ce qui précède des informations sur le comportement de la fonction S aux bornes de l'intervalle de convergence:

• La fonction S n'est pas définie en -1 puisque la série $\sum (-1)^n \ln(n+1)$ est grossièrement divergente. Néanmoins, la fonction S, définie sur $]-1,1[$ admet une limite à droite finie au point -1 puisque $U(x) \underset{x\to(-1)^+}{\longrightarrow} U(-1) \in \mathbb{R}$ d'après **c.**, donc

$$S(x) \underset{x\to(-1)^+}{\longrightarrow} \frac{U(-1) - \ln(2)}{2} \in \mathbb{R}\ .$$

• Lorsque $x \to 1^-$, $U(x)$ tend vers $U(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (on peut vérifier que $U(1) = -\gamma$, où γ est la constante d'Euler), donc $S(x) \underset{x\to1^-}{\sim} -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$, on a obtenu un équivalent de $S(x)$ en 1, et en particulier, $\displaystyle\lim_{x\to1^-} S(x) = +\infty$.

Exo 2.a. On procède par analyse-synthèse:

• **Analyse:** Soit $x \in E$, supposons **(1):** $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E)$ et $z \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, on a alors $f(z) = z$ et $f^2(y) = -y$. En appliquant deux fois f à **(1)**, on obtient $f(x) = f(y) + z$, puis **(2):** $f^2(x) = -y + z$. En ajoutant et retranchant **(1)** et **(2)**, on récupère

$$y = \frac{1}{2}\big(x - f^2(x)\big) \qquad \text{et} \qquad z = \frac{1}{2}\big(x + f^2(x)\big)\ .$$

Ceci prouve l'unicité de la décomposition du vecteur x.

• **Synthèse:** Soit $x \in E$, posons $y = \frac{1}{2}\big(x - f^2(x)\big)$ et $z = \frac{1}{2}\big(x + f^2(x)\big)$. Alors $y + z = x$ et

$$(f - \mathrm{id}_E)(z) = \frac{1}{2}\Big(\big(f - \mathrm{id}_E\big) \circ \big(f^2 + \mathrm{id}_E\big)\Big)(x) = 0_E$$

puisque $f - \mathrm{id}_E$ et $f^2 + \mathrm{id}_E$, qui sont des polynômes de l'endomorphisme f, commutent, donc leur composée est nulle par hypothèse. Donc $z \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$. Enfin,

$$\begin{aligned}
(f^2 + \mathrm{id}_E)(y) &= -\frac{1}{2}\Big((f^2 + \mathrm{id}_E) \circ (f^2 - \mathrm{id}_E)\Big)(x) \\
&= -\frac{1}{2}\Big((f^2 + \mathrm{id}_E) \circ (f - \mathrm{id}_E)\Big)\Big((f + \mathrm{id}_E)(x)\Big) \\
&= 0_E\ ,
\end{aligned}$$

donc $y \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E)$, ce qui termine la synthèse et prouve l'existence de la décomposition recherchée.

b. L'endomorphisme f admet comme polynôme annulateur $P = (X^2+1)(X-1)$ dont la seule racine réelle est 1, on a donc $\mathrm{Sp}(f) \subset \{1\}$. Comme un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire admet au moins une valeur propre, on a en fait $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$, donc le sous-espace propre associé $E_1(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

Comme f n'est pas diagonalisable, en particulier $f \neq \mathrm{id}_E$, donc $E_1(f) \neq E$, il résulte alors de **a.** que $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E)$ n'est pas non plus réduit à $\{0_E\}$.

Soit alors e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)$ et e_3 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)$, et posons $e_2 = f(e_1)$. On a alors $f(e_2) = f^2(e_1) = -e_1$. Le vecteur e_2 n'est pas colinéaire à e_1 car si l'on avait $e_2 = \lambda e_1$ avec λ réel, soit $f(e_1) = \lambda e_1$, alors $f^2(e_1) = \lambda^2 e_1 = -e_1$, d'où $\lambda^2 = -1$ ce qui est absurde. Le vecteur e_2 est aussi dans $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E)$ puisque $f^2(e_2) = f^3(e_1) = -f(e_1) = -e_2$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est libre puisqu'on a montré que e_1 et e_2 sont deux vecteurs non colinéaires de $F = \mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)$, e_3 est un vecteur non nul de $G = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et les sous-espaces F et G sont en somme directe. Finalement, $\mathcal{B}$ est une base de E car $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = 3$, et la matrice de f dans cette base est bien A.

CMT 2 (Inès TAGLIAFERRI)

Exo 1.a. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, continue et bornée. Montrer que les intégrales $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ convergent et ont la même valeur.

b. Calculer $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $B = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exo 2. Soit E un espace euclidien.

a. Soient u et v deux vecteurs non nuls de E. À quelle condition sur le produit scalaire $(u|v)$ l'angle des vecteurs u et v est-il obtus ?

b. Soit u un vecteur unitaire de E, soit $x \in E$. Donner une expression du projeté orthogonal de x sur l'hyperplan H de vecteur normal u.

c. Soient u, v, w trois vecteurs non nuls de E, formant deux à deux des angles obtus, avec u unitaire. On note v' et w' les projetés orthogonaux de v et w respectivement sur l'hyperplan $H = \big(\mathrm{Vect}(u)\big)^{\perp}$. Montrer que v' et w' forment un angle obtus.

- -

Exo 1.a. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et elle est majorée en valeur absolue par une fonction intégrable puisque $\big|g(x)\big| \leq \dfrac{\|f\|_\infty}{x^2+1}$, donc g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et l'intégrale généralisée I est convergente. Même chose pour J. Le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$ donne immédiatement $I = J$.

b. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^n}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$, on déduit alors du **a.** que $I = J$, soit ici $A = B$. Par ailleurs, $A + B = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$. Donc $A = B = \dfrac{\pi}{4}$ (*cette intégrale est indépendante de* n).

Exo 2.a. Notons $\theta \in [0, \pi]$ l'écart angulaire des vecteurs u et v, soit $\theta = \text{Arccos}\left(\dfrac{(u|v)}{\|u\|\,\|v\|}\right)$.

L'angle est "obtus" si sa mesure θ appartient à $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, donc si et seulement si $(u|v) < 0$.

b. Notons $D = \text{Vect}(u)$ et $H = D^{\perp}$. D'après le cours,

$$p_H(x) = x - p_D(x) = x - (u|x)\,u\ .$$

c. On a $v' = v - (u|v)\,u$ et $w' = w - (u|w)\,u$, puis

$$\begin{aligned}(v'|w') &= \big(v - (u|v)\,u \;\big|\; w - (u|w)\,u\big) \\ &= (v|w) - 2(u|v)\,(u|w) + (u|v)\,(u|w)\,\|u\|^2 \\ &= (v|w) - (u|v)\,(u|w)\ .\end{aligned}$$

Les trois produits scalaires $(u|v)$, $(u|w)$ et $(v|w)$ étant strictement négatifs, on en déduit facilement que $(v'|w') < 0$.

CMT 3 (Valentin BROC)

Exo 1. *Je ne suis pas sûr d'avoir bien compris l'énoncé fourni par Valentin, alors je pose un sujet proche, mais peut-être plus diificile.* On considère deux dés à six faces (numérotées de 1 à 6), tous les deux truqués. On note X la variable aléatoire donnant la somme des résultats obtenus lors du lancer simultané de ces deux dés. Est-il possible que X suive la loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$?

Exo 2.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Préciser $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n$.

b. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+1)!\,R_n = 1$.

c. Quelle est la nature de la série $\sum \sin(2\,n!\,\pi e)$?

- -

Exo 1. L'un des deux dés (appelé "le premier") porte sur ses faces les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, et les probabilités d'apparition de chaque numéro sont $p_1, \cdots, p_6$. Notons de même $q_1, \cdots, q_6$ les probabilités d'apparition des faces 1 à 6 pour le deuxième dé. Si l'on note respectivement U et V les variables aléatoires donnant le résultat de chacun des dés lors d'un lancer, alors les fonctions génératrices sont les polynômes (à coefficients réels)

$$G_U = \sum_{k=1}^{6} p_k X^k \qquad \text{et} \qquad G_V = \sum_{k=1}^{6} q_k X^k\ .$$

Les variables U et V étant indépendantes, on a $G_{U+V} = G_U G_V$. On voudrait que la variable $U + V$ suive la loi uniforme sur l'ensemble $[\![2, 12]\!]$, ce qui signifie que

$$G_{U+V} = \frac{1}{11}\left(X^2 + X^3 + \cdots + X^{11} + X^{12}\right) = \frac{X^2}{11}\left(1 + X + \cdots + X^9 + X^{10}\right)\ .$$

Il faudrait pour cela avoir, dans $\mathbb{R}[X]$, l'identité polynomiale

$$\left(\sum_{k=1}^{6} p_k X^k\right)\left(\sum_{k=1}^{6} q_k X^k\right) = \frac{X^2}{11}\left(1 + X + \cdots + X^9 + X^{10}\right),$$

soit, après simplification par X^2,

$$\textbf{(*)} \qquad \left(\sum_{k=0}^{5} p_{k+1} X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{5} q_{k+1} X^k\right) = \frac{1}{11}\left(1 + X + \cdots + X^9 + X^{10}\right).$$

Or, le polynôme $P = 1 + X + \cdots + X^9 + X^{10}$ de $\mathbb{R}[X]$ ne possède aucune racine réelle. En effet, on a $(X-1)P = X^{11} - 1$, les racines de P dans le plan complexe sont donc les racines onzièmes de l'unité autre que 1, et aucune d'elles n'est réelle. Les deux facteurs dans le premier membre de **(*)** sont des polynômes de degré 5 à coefficients réels, ils ont donc chacun au moins une racine réelle. L'égalité **(*)** dans $\mathbb{R}[X]$ n'est donc pas possible. Le truquage demandé est donc irréalisable.

Exo 2.a. R_n est le reste d'ordre n d'une série convergente, d'où son existence pour tout n et le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

b. Encadrons R_n. On a déjà $R_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \displaystyle\sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \geq \frac{1}{(n+1)!}$ car tous les termes sont positifs. Puis

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+k)} \leq \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{k-1}},$$

soit

$$R_n \leq \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)^k = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!}\,\frac{n+2}{n+1}.$$

Finalement, on a

$$1 \leq (n+1)!\,R_n \leq 1 + \frac{1}{n+1}$$

et, de cet encadrement, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)!\,R_n = 1$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$, on a alors $S_n + R_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$.

Posons aussi $u_n = \sin(2n!\pi e)$, alors $u_n = \sin(2\pi n! S_n + 2\pi n! R_n)$ et, comme $n! S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ est un entier naturel, $u_n = \sin(2\,\pi\,n!\,R_n)$. Comme $n!\,R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ d'après la question précédente, avec l'équivalent classique $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\pi}{n}$. Par comparaison de séries à termes positifs, on déduit la divergence de $\sum u_n$. *En effet, l'équivalent trouvé ci-dessus montre que u_n est positif, au moins pour n assez grand.*

CMT 4 (Raphaël JOHNSON)

Exo 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1]$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{x}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1\right).$$

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Montrer que l'intégrale I_n est convergente.

b. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \times k!}$.

Exo 2. Soient a et b deux réels, soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $\begin{cases} u : E & \to & E \\ \quad M & \mapsto & aM + bM^\top \end{cases}$.

a. Montrer que u est un endomorphisme de E.

b. Déterminer ses valeurs propres. Montrer que u est diagonalisable.

c. Calculer $\det(u)$ et $\mathrm{tr}(u)$.

- -

Exo 1.a. Lorsque x tend vers 0 (n fixé), on a $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = 1 + n\,\dfrac{x}{n} + o(x) = 1 + x + o(x)$, donc

$$f_n(x) = \frac{1}{x}\big(1 + x + o(x) - 1\big) = 1 + o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1\,.$$

La fonction f_n est donc prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est intégrable sur $]0,1]$et l'intégrale ("faussement impropre") I_n est convergente.

b. Posons $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ pour $x \in]0,1]$. Alors la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur $]0,1]$ (*classique*) et, en utilisant l'inégalité de convexité $\ln(1+u) \leq u$, on obtient la domination

$$\forall x \in]0,1] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leq f_n(x) \leq f(x)\,.$$

La fonction f est intégrable sur $]0,1]$ puisqu'elle est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$, cela permet d'appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Or, du développement en série entière de l'exponentielle, on déduit que $f : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ (prolongée par $f(0) = 1$) est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{k-1}}{k!}\,.$$

Comme on peut intégrer terme à terme la fonction somme d'une série entière sur tout segment inclus dans son intervalle de convergence (ici $\mathbb{R}$ puisque le rayon de convergence est infini), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_{[0,1]} f = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}\right) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{k!}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\times k!}\ .$$

Exo 2.a. Pure formalité!

b. • Si $b=0$, alors $u=a\,\mathrm{id}$ est une homothétie, donc est diagonalisable, et la seule valeur propre est a.

• Sinon: si M est symétrique, alors $u(M)=(a+b)M$. Si M est antisymétrique, alors $u(M)=(a-b)M$. Comme les sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a trouvé deux valeurs propres telle que la somme des dimensions des sous-espaces propres associés vaut au moins n^2, donc u est diagonalisable et il n'y a pas d'autre valeur propre. **Bilan:** $\mathrm{Sp}(u)=\{a+b,a-b\}$, $E_{a+b}(u)=\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $E_{a-b}(u)=\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

c. La trace est la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité (qui est aussi la dimension du SEP associé dans le cas diagonalisable), donc

$$\mathrm{tr}(u)=\frac{n(n+1)}{2}\,a+\frac{n(n-1)}{2}\,b\ .$$

De même, $\det(u)=a^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot b^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

CMT 5 (Bastien LACROIX)

Exo 1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique ($T>0$), soit a un réel non nul. Montrer que l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}):\quad y'+ay=f$$

admet une unique solution T-périodique.

Indication: on pourra considérer la fonction $g:x\mapsto e^{-ax}\displaystyle\int_0^x f(t)\,e^{at}\,\mathrm{d}t$.

Exo 2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$, suivant la même loi géométrique de paramètre $p\in\,]0,1[$. Déterminer la loi de $Y=X_1-X_2$.

- -

Exo 1. On vérifie d'abord, en utilisant le théorème fondamental, que la fonction g proposée en indication est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution de l'équation **(E)**, c'est donc une "solution particulière". Comme la solution générale de l'équation homogène est $y=C\,e^{-ax}$ avec C réel, on déduit que les solutions de **(E)** sont les fonctions

$$y:x\mapsto e^{-ax}\left(C+\int_0^x f(t)\,e^{at}\,\mathrm{d}t\right)\qquad\text{avec}\qquad C\in\mathbb{R}\ .$$

Il reste donc à montrer qu'il existe une seule valeur de la constante C pour laquelle cette fonction est T-périodique. Or, on calcule

$$y(x+T)=Ce^{-ax}e^{-aT}+e^{-ax}e^{-aT}\int_0^{x+T} e^{at}\,f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

On décompose cette dernière intégrale en

$$\int_0^{x+T} e^{at}\, f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T e^{at}\, f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{x+T} e^{at}\, f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T e^{at}\, f(t)\,\mathrm{d}t + e^{aT} \int_0^x e^{at}\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

par la relation de Chasles, puis le changement de variable $t = u + T$ dans la deuxième intégrale, et en tenant compte de la T-périodicité de f. Finalement, après réorganisation et simplification,

$$y(x+T) - y(x) = e^{-ax} \left((e^{-aT} - 1)\, C + e^{-aT} \int_0^T e^{at}\, f(t)\,\mathrm{d}t \right).$$

Il y a donc une unique valeur de la constante C pour laquelle la fonction y est T-périodique, à savoir $C = \dfrac{1}{e^{aT}-1} \displaystyle\int_0^T e^{at}\, f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exo 2. Posons $q = 1 - p$. On a clairement $Y(\Omega) = \mathbf{Z}$.

Si n est un entier naturel, alors $\{Y = n\} = \displaystyle\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*} \big(\{X_2 = k\} \cap \{X_1 = k+n\}\big)$ donc, les variables X_1 et X_2 étant indépendantes,

$$\begin{aligned} P(Y=n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k+n)\, P(X_2 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{n+k-1}\, pq^{k-1} = p^2\, q^n \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k \\ &= \frac{p^2\, q^n}{1-q^2} = \frac{pq^n}{1+q}. \end{aligned}$$

Par symétrie des rôles de X_1 et X_2, les variables Y et $-Y$ ont la même loi, donc $P(Y = -n) = P(Y = n)$ pour tout n entier relatif. Finalement,

$$\forall n \in \mathbf{Z} \qquad P(Y=n) = \frac{p\, q^{|n|}}{1+q} = \frac{p(1-p)^{|n|}}{2-p}.$$

CMT 6 (Céleste PUGNIÈRE) (un seul exo récupéré)

Exo 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Justifier que A est diagonalisable.

b. Déterminer $\mathrm{rg}(A + I_n)$. En déduire une valeur propre de A et sa multiplicité.

c. Déterminer tous les éléments propres de A.

d. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2.

- -

1.a. La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable par le théorème spectral.

b. La matrice $J = A + I_n$, dont tous les coefficients valent 1, est de rang 1. On en déduit que -1 est valeur propre de A et, par le théorème du rang, que $\dim E_{-1}(A) = n-1$. Comme A est diagonalisable, la dimension du sous-espace propre est aussi la multiplicité de la valeur propre, donc $m_{-1} = n-1$.

c. Il reste une valeur propre λ, autre que -1, à trouver. On a par ailleurs

$$0 = \mathrm{tr}(A) = \sum_{\alpha \in \mathrm{Sp}(A)} m_\alpha \alpha = (n-1) \times (-1) + \lambda \ ,$$

donc $\lambda = n-1$ est valeur propre simple de A. Le sous-espace propre $E_{-1}(A)$ est l'hyperplan $\mathrm{Ker}(J)$ d'équation cartésienne $x_1 + \cdots + x_n = 0$ ou encore, si $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, de vecteur normal $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme A est symétrique réelle, les sous-espaces propres sont orthogonaux et, plus précisément ici,

$$E_{n-1}(A) = \big(E_{-1}(A)\big)^{\perp} = \mathrm{Vect}(U) \ .$$

d. Comme la matrice A est diagonalisable, elle admet pour polynôme annulateur

$$P = \prod_{\alpha \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \alpha) = (X+1)(X-n+1) \ .$$

CMT 7 (Wassime ATEK)

Exo 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Soit l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ u & \mapsto & \dfrac{1}{2}\,(s \circ u + u \circ s) \end{array} \right. .$$

a. Montrer que φ est un endomorpisme de $\mathcal{L}(E)$.

b. Exprimer $\varphi^3(u)$ pour $u \in \mathcal{L}(E)$. En déduire un polynôme annulateur de φ.

c. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exo 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a. Trouver un équivalent de H_n lorsque $n \to +\infty$.

b. Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum H_n x^n$.

c. Pour $x \in]-R, R[$, exprimer $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$.

- -

1.a. C'est une formalité!

b. En utilisant $s^2 = \mathrm{id}_E$, on obtient
$$\varphi^2(u) = \frac{1}{2}\big(s \circ \varphi(u) + \varphi(u) \circ s\big) = \frac{1}{2}\,(u + s \circ u \circ s)\ ,$$
puis
$$\varphi^3(u) = \frac{1}{2}\big(s \circ \varphi^2(u) + \varphi^2(u) \circ s\big) = \frac{1}{2}\,(s \circ u + u \circ s) = \varphi(u)\ .$$
On a donc $\varphi^3 - \varphi = 0$, autrement dit φ admet pour polynôme annulateur $P = X^3 - X$.

c. Le polynôme annulateur $P = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ est scindé à racines simples, on en déduit que l'endomorphisme φ est diagonalisable.

2.a. En encadrant par des intégrales (*question hyper classique*), on obtient $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

b. La série entière $\sum H_n x^x$ a le même rayon de convergence que $\sum \ln(n) x^n$, donc $R = 1$ par la règle de d'Alembert puisque $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

c. Posons $H_0 = 0$. Posons aussi $a_0 = 0$ et $a_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout n entier naturel non nul, puis $b_n = 1$ pour tout n entier naturel. On a alors $H_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ pour tout n entier naturel, on reconnaît donc un produit de Cauchy, les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ étant toutes les deux de rayon de convergence égal à 1. Le cours indique alors que
$$\forall x \in\,]-1,1[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p\right)\left(\sum_{q=1}^{+\infty} b_q x^q\right) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}\ .$$

CMT 8 (Raphaël BESSONE) (un seul exo récupéré)

Exo 1. Soit $A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ a_n & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit P_n son polynôme caractéristique.

a. Calculer P_2 et P_3.

b. Déterminer le rang de A_n. En déduire que P_n est divisible par X^{n-2}.

c. Montrer que $P_n = X^{n-2}(X^2 - a_1 X - b_1)$, avec $b_1 = a_2^2 + \cdots + a_n^2$.

d. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

- -

1.a. On obtient $P_2 = X^2 - a_1X - a_2^2$ et $P_3 = X^3 - a_1X^2 - (a_2^2 + a_3^2)X$, par exemple par la règle de Sarrus.

b. On peut déjà dire que $\mathrm{rg}(A_n) \leq 2$, les colonnes numérotées de 2 à n étant visiblement colinéaires (proportionnelles) puisqu'elles sont colinéaires à E_1 (premier vecteur de la base canonique). Plus précisément:

- si les a_i, $1 \leq i \leq n$, sont tous nuls, i.e. si $A_n = 0_n$, alors $\mathrm{rg}(A_n) = 0$ évidemment ;

- si $a_1 \neq 0$ et $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$, alors $\mathrm{rg}(A_n) = 1$;

- sinon, c'est-à-dire si $\exists i \in [\![2, n]\!]$ $a_i \neq 0$, alors $\mathrm{rg}(A_n) = 2$. *En effet, dans ce cas, la colonne 1 et la colonne i sont non proportionnelles.*

Par le théorème du rang, on déduit que $\dim\big(\mathrm{Ker}(A_n)\big) \geq n-2$, donc (si $n \geq 3$), le nombre 0 est valeur propre de A_n avec un sous-espace propre de dimension au moins égale à $n-2$. La multiplicité de la valeur propre 0 est donc aussi supérieure ou égale à $n-2$, ce qui signifie que le polynôme caractéristique P_n est divisible par X^{n-2}.

c. Dans le calcul de $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$, développons par rapport à la dernière ligne, on obtient

$$P_n(x) = x\,P_{n-1}(x) + (-1)^{n+1}(-a_n)\,\delta_n(x)\ ,$$

avec $\delta_n(x) = \begin{vmatrix} -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \\ x & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & x & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)}$. Dans ce dernier déterminant d'ordre $n-1$, on redéveloppe par rapport à la dernière colonne, cela donne $\delta_n(x) = (-1)^n\,(-a_n)\,x^{n-2}$, on en déduit la relation de récurrence

$$\forall n \geq 3 \quad \forall x \in \mathbb{C} \qquad P_n(x) = x\,P_{n-1}(x) - a_n^2\,x^{n-2}\ .$$

Avec cela, la relation

$$\forall n \geq 2 \qquad P_n = X^{n-2}\left(X^2 - a_1X - \sum_{k=2}^{n} a_k^2\right)$$

se montre facilement par récurrence, l'initialisation étant faite en **a.**

d. La discussion n'est pas simple. Notons d'abord que la condition $b_1 = 0$ n'entraîne pas nécessairement que tous les a_i, $2 \leq i \leq n$, sont nuls, si ceux-ci sont des nombres complexes. Examinons plusieurs cas:

- si $b_1 = 0$ et $a_1 = 0$, alors $P_n = X^n$ donc $\mathrm{Sp}(A_n) = \{0\}$ et la matrice A_n n'est diagonalisable que si elle est la matrice nulle ;

- si $b_1 = 0$ et $a_1 \neq 0$, alors $P_n = X^{n-1}(X - a_1)$, donc A_n admet deux valeurs propres **distinctes**, 0 et a_1. La valeur propre a_1 étant simple, le sous-espace propre associé est de dimension 1. La matrice A_n est alors diagonalisable si et seulement si la dimension de $E_0(A_n) = \mathrm{Ker}(A_n)$ est égale à la multiplicité $n-1$ de cette valeur propre, i.e. si et seulement si $a_2 = \cdots = a_n = 0$ (*cf.* étude du rang faite en **b.**) ;

- si $b_1 \neq 0$, alors $P_n = X^{n-2}(X^2 - a_1X - b_1)$, et les a_i $(2 \leq i \leq n)$ ne sont pas tous nuls, donc $\mathrm{rg}(A_n) = 2$ et la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est égale à la multiplicité $n-2$ de cette valeur propre. Si λ est une valeur propre non nulle de A_n, la matrice $A_n - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_1-\lambda & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & -\lambda & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ a_n & (0) & & -\lambda \end{pmatrix}$ est de rang au moins $n-1$ (donc exactement $n-1$ si λ est valeur propre) car on voit l'échelonnement des $n-1$ dernières colonnes (ou lignes), donc le sous-espace propre associé à λ est de dimension 1. La matrice A_n est donc diagonalisable si et seulement si elle admet deux valeurs propres non nulles (distinctes), i.e. si et seulement si le discriminant $\Delta = a_1^2 + 4b_1$ du trinôme $X^2 - a_1X - b_1$ est non nul.

Bilan. La matrice A_n est donc diagonalisable si et seulement si

$$(a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0) \quad \text{ou} \quad (b_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad a_1^2 + 4b_1 \neq 0)\ .$$

CMT 9 (Thomas TANNEUR)

Exo 1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,i} = 0$, et $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exo 2. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, \ln(t)\, \mathrm{d}t$.

a. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Trouver une équation différentielle satisfaite par F.

c. On pose $\gamma = -F(1)$. Exprimer $F(x)$ pour $x > 0$ à l'aide de γ et de fonctions usuelles.

- -

1. On peut par exemple écrire $A = J - I$, avec $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ et $I = I_n$. De $J^2 = nJ$, on déduit (comme I et J commutent) que

$$\textbf{(*)} \qquad A^2 = (J-I)^2 = J^2 - 2J + I = (n-2)J + I = (n-2)A + (n-1)I\ .$$

Le polynôme $P = X^2 - (n-2)X - (n-1) = (X+1)\big(X-(n-1)\big)$ est donc annulateur de la matrice A, d'où $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathcal{Z}(P) = \{-1, n-1\}$. En particulier, 0 n'est pas valeur propre de A donc A est inversible. De la relation **(*)**, on déduit que

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1}\big(A - (n-2)I\big) = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2-n \end{pmatrix}\ .$$

2.a. Posons $g(x,t) = e^{-xt}\, \ln(t)$. Pour $x > 0$, l'application partielle $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $g(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\, g(x,t) = 0$ par croissances comparées), l'application partielle $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -t\, e^{-xt}\, \ln(t)$. Si $S = [a,b]$ est un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, on a la domination

$$\forall (x,t) \in S \times \mathbb{R}_+^* \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq t\, e^{-at}\, \left|\ln(t)\right| ,$$

cette fonction majorante étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour des raisons semblables à celles mentionnées plus haut. On en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad F'(x) = -\int_0^{+\infty} t\, e^{-xt}\ \ln(t)\, \mathrm{d}t\ .$$

b. Une intégration par parties donne, le terme entre crochets étant nul, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{1}{x}\left[t\, e^{-xt}\ \ln(t)\right]_{t=0}^{t\to+\infty} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\big(1+\ln(t)\big)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\, F(x)\ .$$

La fonction F est donc solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle **(E):** $xy' + y = -\dfrac{1}{x}$.

c. On a donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(xF(x)\big) = -\dfrac{1}{x}$, ce qui s'intègre en $xF(x) = -\ln(x) + C$ où C est une constante réelle, donc $F(x) = \dfrac{C-\ln(x)}{x}$. Pour $x = 1$, on obtient immédiatement $C = F(1) = -\gamma$, donc $F(x) = -\dfrac{\gamma+\ln(x)}{x}$.

Remarque 1. Cette constante γ n'est autre que la fameuse constante d'Euler

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) ,$$

mais la démonstration en est un peu plus longue.

Remarque 2. On peut arriver au résultat demandé beaucoup plus rapidement par un changement de variable (après s'être assuré de la convergence des intégrales), il suffit de poser $u = xt$.

CMT 10 (Maïwen HAMON)

Exo 1. Soit $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t-1}$.

a. Montrer que $\forall t \in]0,1[\quad f(t) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\ \ln(t)$.

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Exo 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension trois, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

a. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = \big(x, f(x), f^2(x)\big)$ soit une base de E.

b. Montrer qu'il existe une unique droite vectorielle de E stable par f.

- -

Exo 1.a. Pour $t \in]0,1[$, on a $\dfrac{1}{t-1} = -\dfrac{1}{1-t} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$, la relation demandée en découle immédiatement.

b. En posant $f_n(t) = -t^n \ \ln(t)$, on voit que chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0,1[$ (c'est un résultat du cours pour $n=0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,1]$). La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$ et a pour somme f. Enfin, une intégration par parties donne

$$\int_0^1 |f_n| = \int_0^1 f_n = -\Big[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ \ln(t)\Big]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n \ \mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{(sommable)}\ ,$$

le théorème d'intégration terme à terme s'applique donc et donne

$$\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\ .$$

Exo 2.a. Il existe un vecteur x de E tel que $f^2(x) \neq 0_E$, un tel x convient alors: en effet, si a, b, c sont trois réels tels que $a\,x+b\,f(x)+c\,f^2(x) = 0_E$, en appliquant f^2, on obtient $a\,f^2(x) = 0_E$ d'où $a=0$ puisque $f^2(x)$ n'est pas le vecteur nul. On a alors $b\,f(x)+c\,f^2(x) = 0_E$ et, en appliquant f, on obtient $b=0$ par le même raisonnement, puis il reste $c\,f^2(x) = 0_E$ donc $c=0$. Ainsi, la famille $\mathcal{B} = \big(x, f(x), f^2(x)\big)$ est libre et, comme elle est de cardinal trois, c'est une base de E.

b. Le cours dit que les droites vectorielles stables par un endomorphisme sont celles qui sont engendrées par un vecteur propre. Or, f est nilpotent et admet comme polynôme annulateur $P = X^3$, donc $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathcal{Z}(P) = \{0\}$ et, comme f n'est pas injectif, 0 est effectivement valeur propre donc $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$. Il est immédiat que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on voit donc que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M) = 2$, le sous-espace propre $E_0(f) = \mathrm{Ker}(f)$ est donc de dimension 1, et c'est la seule droite vectorielle de E stable par f.

CMT 11 (Olivier CHEN)

Exo 1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

a. Rappeler la fonction génératrice $G_X(t)$.

b. Montrer que

$$\forall t \in [1,+\infty[\qquad P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}}\ .$$

c. En déduire que $P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}$.

d. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exo 2. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E$ non nul. Pour $x \in E$, on pose $f(x) = x + x \wedge u$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de E et que $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$.

b. Déterminer le sous-espace propre associé.

c. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

d. Est-il inversible ? Sinon, déterminer son rang.

- -

Exo 1.a. D'après le cours, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ pour $t \in [-1, 1]$, et même pour tout t réel puisqu'ici le rayon de convergence est infini.

b. Soit $N = \lceil 2\lambda \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à 2λ, alors

$$P(X \geq 2\lambda) = P(X \geq N) = \sum_{n=N}^{+\infty} P(X = n) \ .$$

Pour $t \in [1, +\infty[$, les termes de la série étant tous positifs, on a la minoration

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)\, t^n \geq \sum_{n=N}^{+\infty} P(X = n)\, t^n \geq \sum_{n=N}^{+\infty} P(X = n)\, t^{2\lambda} = t^{2\lambda}\ P(X \geq 2\lambda) \ .$$

On a utilisé le fait que, pour $t \geq 1$, la fonction $x \mapsto t^x$ est croissante. On a donc

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}} \ .$$

Remarque. On pouvait aussi appliquer l'inégalité de Markov à la variable $Y = t^X$.

c. Pour $t \in [1, +\infty[$, posons $f(t) = \dfrac{G_X(t)}{t^{2\lambda}} = t^{-2\lambda}\ e^{\lambda(t-1)}$. Alors f est dérivable sur $[1, +\infty[$ avec $f'(t) = \lambda\, t^{-2\lambda-1}\ e^{\lambda(t-1)}\ (t-2)$, on en déduit que f est minimale pour $t = 2$ avec $f(2) = 2^{-2\lambda} e^{\lambda} = \left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}$. En appliquant l'inégalité du **b.** avec $t = 2$, on obtient la majoration demandée de $P(X \geq 2\lambda)$.

d. Comme $\mathrm{E}(X) = \mathrm{V}(X) = \lambda$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne, pour tout $\varepsilon > 0$, la majoration $P\big(|X - \lambda| \geq \varepsilon\big) \leq \dfrac{\lambda}{\varepsilon^2}$, et notamment $P\big(|X - \lambda| \geq \lambda\big) \leq \dfrac{1}{\lambda}$.

Or, $\big\{|X - \lambda| \geq \lambda\big\} = \{X = 0\} \sqcup \{X \geq 2\lambda\}$. Comme $P(X = 0) = e^{-\lambda}$, on a finalement

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda} - e^{-\lambda} \ .$$

La majoration obtenue en **c.** est nettement meilleure que celle obtenue par Bienaymé-Tchebychev, notamment pour λ grand.

Exo 2.a. et b. La linéarité de f est immédiate. On observe facilement que

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = \{x \in E \mid x \wedge u = 0_E\} = \mathrm{Vect}(u) \neq \{0_E\} \ ,$$

donc 1 est valeur propre de f et $E_1(f) = \mathrm{Vect}(u)$ est une droite.

Si λ est un réel différent de 1, la relation $f(x) = \lambda x$ peut s'écrire $x \wedge u = (\lambda - 1)x$ et, comme on sait que $x \wedge u$ est orthogonal à x, elle entraîne $0 = (x \wedge u \mid x) = (\lambda - 1)\, \|x\|^2$, donc $x = 0_E$, finalement λ n'est pas valeur propre de f.

En résumé, $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$ et $E_1(f) = \mathrm{Vect}(u)$.

c. La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 1, donc f n'est pas diagonalisable.

d. Oui, f est inversible puisque 0 n'est pas valeur propre. Donc $\mathrm{rg}(f) = 3$.

CMT 12 (Wième MATOUSSI)

Exo 1. Soient a et b deux réels, soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}[X]$ qui, à tout polynôme P, associe le polynôme

$$Q = (aX + b)\,P + X(X-1)\,P' \ .$$

Déterminer les éléments propres de u. *On s'intéressera à la fonction polynomiale associée à P pour obtenir une équation différentielle.*

Exo 2. On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x + n}$.

a. Domaine de définition de S.

b. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Donner un équivalent de S en $+\infty$.

- -

Exo 1. Il est clair que u est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel E, nous noterons $\mathrm{VP}(u)$ l'ensemble de ses valeurs propres. Un réel λ appartient à $\mathrm{VP}(u)$ si et seulement s'il existe un polynôme P non nul tel que $u(P) = \lambda P$, soit

$$\textbf{(*)}: \qquad X(X-1)\,P' + (aX + b - \lambda)\,P = 0 \ .$$

La fonction polynomiale associée à un tel polynôme P est alors solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}): \qquad x(x-1)\,y' + (ax + b - \lambda)\,y = 0 \ .$$

Le cours permet de résoudre l'équation **(E)** sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ en la mettant d'abord sous forme normale: $y' = -\dfrac{ax + b - \lambda}{x(x-1)}\, y$, soit encore, par une décomposition en éléments simples:

$$y' = \left(\frac{b - \lambda}{x} - \frac{a + b - \lambda}{x - 1}\right) y \ .$$

Les solutions, sur chacun des intervalles mentionnés, sont les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto C\, |x|^{b-\lambda}\, |x-1|^{-(a+b-\lambda)} \ , \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R} \ .$$

On en déduit que λ est valeur propre de u si et seulement si les exposants $b - \lambda$ et $-(a+b-\lambda)$ sont tous deux des entiers naturels. *En effet, si c'est le cas, le polynôme non nul* $P = X^{b-\lambda}(X-1)^{-(a+b-\lambda)}$ *vérifie* **(*)** *et, si ce n'est pas le cas, comme l'équation différentielle*

(E) *n'admet aucune solution polyomiale non nulle sur* $]0,1[$ *par exemple, il en résulte qu'aucun polynôme non nul ne vérifie* **(*)**. Ainsi,

$$\lambda \in \mathrm{VP}(u) \iff \begin{cases} b-\lambda \in \mathbb{N} & (\mathbf{1}) \\ -(a+b-\lambda) \in \mathbb{N} & (\mathbf{2}) \end{cases} .$$

Ces deux conditions entraînent (condition **nécessaire**), en les ajoutant, que $-a \in \mathbb{N}$.

Supposons donc $a = -k$ avec k entier naturel. La condition **(1)** permet d'écrire $\lambda = b - n$ avec $n \in \mathbb{N}$, et la condition **(2)** est alors satisfaite si et seulement si $n \leq k = -a$.

Bilan:

- si $-a$ n'est pas un entier naturel, alors $\mathrm{VP}(u) = \emptyset$;
- si $a = -k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $\mathrm{VP}(u) = \big\{b - n\ ;\ n \in [\![0,k]\!]\big\} = \big\{b, b-1, b-2, \cdots, b-k\big\}$.

De plus, pour tout $\lambda \in \mathrm{VP}(u)$, le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $P = X^{b-\lambda}(X-1)^{-(a+b-\lambda)}$.

Exo 2. Posons $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2x+n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et x réel.

a. La série de terme général $u_n(0) = \dfrac{1}{n}$ est divergente, mais si x est non nul, l'équivalent $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2x}$, avec un terme général de signe constant, permet de conclure à la convergence. Donc $D_S = \mathbb{R}^*$.

b. Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a prouvé la convergence simple de la série $\sum u_n$ sur cet intervalle. On a $u_n'(x) = -\dfrac{n^2}{(n^2x+n)^2}$ et, si $I = [a,b]$ est un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, $\|u_n'\|_{\infty,I} = \dfrac{n^2}{(n^2a+n)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{a^2n^2}$ est sommable, on a donc prouvé la convergence normale de la série $\sum u_n'$ sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction somme S est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après le cours.

c. Posons $v_n(x) = x\,u_n(x) = \dfrac{x}{n^2x+n}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n(x) = \dfrac{1}{n^2}$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $0 \leq v_n(x) \leq \dfrac{x}{n^2x} = \dfrac{1}{n^2}$ (sommable et indépendant de x), on a donc prouvé la convergence normale de la série de fonctions $\sum v_n$ sur $\mathbb{R}_+$, ce qui autorise à intervertir somme et limite en $+\infty$ (théorème de la double limite):

$$\lim_{x\to+\infty} x\,S(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ ,$$

soit encore $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6x}$.

CCINP

CCINP 1 (Inès TAGLIAFERRI)

Exo 1. (30 min. de préparation + 20 min. de présentation)

Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^p \left(\ln(x)\right)^n \,\mathrm{d}x$. On pose aussi $f(x) = \dfrac{1}{x^x}$ pour $x \in \,]0,1]$.

a. Vérifier que chaque intégrale $I_{n,p}$ est convergente.

b. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, prouver la relation $I_{n,p} = -\dfrac{n}{p+1}\, I_{n-1,p}$.

c. Vérifier que f est intégrable sur $]0,1]$.

d. Prouver la relation $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Exo 2. (sans préparation, 10 min. de présentation)

Énoncé partiellement retenu: il s'agit d'énoncer des conditions pour qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admette des "racines carrées".

- -

Exo 1. C'est l'exercice 12 de la feuille de TD "calcul intégral" de cette année.

Exo 2. Une condition **nécessaire** est que $\det(A) \geq 0$.

CCINP 2 (Raphaël GASC)

Exo 1. Soit (a_n) la suite réelle définie par

$$a_0 = a_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2}\ .$$

a. Montrer que la suite (a_n) est strictement positive.

b. **i.** Sens de variation de la suite (a_n).

ii. En déduire la divergence de la série $\sum (a_{n+2} - a_{n+1})$. Limite de la suite (a_n) ?

c. On considère la série entière $\sum a_n x^n$, on note $S(x)$ sa somme.

i. Quel est son rayon de convergence R ?

ii. Montrer que S vérifie, sur $I =]-R,R[$, l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) : \qquad (x-1)y' + (x+1)y = 0\ .$$

d. En déduire une expression de $S(x)$ pour $x \in \,]-R,R[$.

Exo 2.a. Cours: Décomposition d'une matrice carrée comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

b. On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \varphi(M) = M - M^\top\ .$$

Déterminer ses éléments propres. Est-il diagonalisable ? Quelle est sa trace ?

- -

Exo 1.a. Immédiat par récurrence double (i.e. par le même type de récurrence qui celui utilisé pour définir la suite).

b. i. Pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n+1} > 0$. Comme $a_0 = a_1$, la suite (a_n) est croissante, et elle l'est strictement à partir du rang 1.

ii. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{a_n}{n+2} \geq \frac{a_0}{n+2} = \frac{1}{n+2}\ .$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on déduit la divergence de la série télescopique $\sum(a_{n+2} - a_{n+1})$. Par le lien entre suites et séries, on déduit la divergence de la suite (a_n). Comme cette suite est croissante, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

c. i. On a $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{a_n}{(n+2)a_{n+1}}$. Or, la suite (a_n) étant strictement positive et croissante, on a $0 \leq \dfrac{a_n}{(n+2)a_{n+1}} \leq \dfrac{1}{n+2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{(n+2)a_{n+1}} = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1$.

Donc $R = 1$ par la règle de d'Alembert.

ii. Pour $x \in]-1,1[$, on calcule

$$\begin{aligned}
(x-1)\,S'(x) + (x+1)\,S(x) &= (x-1)\,\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + (x+1)\,\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= (-a_1 + a_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((n+1)a_n - (n+1)a_{n+1} + a_{n-1}\big)\,x^n \\
&= 0
\end{aligned}$$

puisque $a_1 = a_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a_n - (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$.

d. On résout l'équation différentielle sur $]-1,1[$:

$$(\mathbf{E}) \iff y' = \frac{1+x}{1-x}\,y \iff y' = \left(\frac{2}{1-x} - 1\right) y \iff y = C\,e^{-2\ln(1-x)-x} = C\,\frac{e^{-x}}{(1-x)^2}\ .$$

En tenant compte de $S(0) = a_0 = 1$, on trouve que $S(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1-x)^2}$.

Exo 2. a. Rappel de cours: on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la seule décomposition est $M = S + A$ avec $S = \dfrac{1}{2}(M + M^\top)$ et $A = \dfrac{1}{2}(M - M^\top)$. Preuve par analyse-synthèse.

b. Clairement, $E_0(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $E_2(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi - 2\,\mathrm{id}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la somme (directe) de ces deux sous-espaces propres, cela prouve que φ est diagonalisable et que φ n'admet pas d'autres valeurs propres, donc $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{0,2\}$. Enfin, la trace de φ

est la somme de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités (qui sont aussi les dimensions des SEP puisque φ est diagonalisable), donc

$$\operatorname{tr}(\varphi) = \dim\big(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big) \times 0 + \dim\big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big) \times 2 = n(n-1)\ .$$

CCINP 3 (Alistair RENAUD)

Exo 1.a. Rayon de convergence et ensemble de définition de la fonction f somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $x_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)\, t^{3n}\, \mathrm{d}t$.

c. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k$ de deux façons différentes.

d. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$.

e. Calculer enfin $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.

Exo 2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\chi_A = \chi_B = P \in \mathbb{C}[X]$.

a. On suppose que P admet n racines distinctes. Que peut-on dire des matrices A et B ?

b. Trouver deux matrices A et B, non semblables, telles que $\chi_A = \chi_B$.

- -

Exo 1.a. $R = 1$ par la règle de d'Alembert. En posant $a_n = \dfrac{1}{(3n+1)(3n+2)}$, la série $\sum a_n$ est à termes positifs convergente puisque $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{9n^2}$, donc $D_f = [-1, 1]$ (la série converge absolument pour $x = \pm 1$). Il y a même continuité de f sur $[-1, 1]$ puisque, si l'on pose $u_n(x) = a_n x^n$, on a $\|u_n\|_{\infty,[-1,1]} = a_n$ (sommable), d'où la convergence normale de la série entière sur le segment $[-1, 1]$.

b. $x_n = \displaystyle\int_0^1 (t^{3n} - t^{3n+1})\, \mathrm{d}t = \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2} = \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = a_n$.

c. D'une part, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}$. D'autre part,

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k = \int_0^1 (1-t)\left(\sum_{k=0}^{n-1} (t^3)^k\right) \mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)\, \frac{1-(t^3)^n}{1-t^3}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-t^{3n}}{1+t+t^2}\, \mathrm{d}t\ .$$

d. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k$. Alors $S_n = I - R_n$ avec $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$ et $R_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t+t^2}$.

Comme $0 \leq R_n \leq \displaystyle\int_0^1 t^{3n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3n+1}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$, donc $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = I$.

e. On met le trinôme du dénominateur sous forme canonique:

$$S = f(1) = I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u}{\frac{3}{4}\,(1+u^2)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\big[\operatorname{Arctan}(u)\big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

On a posé le changement de variable affine $t + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,u$.

Exo 2. a. Dans ce cas, les matrices A et B sont diagonalisables puisqu'elles admettent n valeurs propres distinctes. De plus, elles ont les mêmes valeurs propres, qui sont simples (puisqu'elles ont le même polynôme caractéristique qui est scindé à racines simples), elles sont donc semblables à une même matrice diagonale D. Par transitivité de la relation de similitude, elles sont semblables entre elles.

b. Par exemple $A = 0_n$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$, on a $\chi_A = \chi_B = X^n$.

Mais elles ne sont pas semblables, par exemple parce qu'elles n'ont pas le même rang.

CCINP 4 (Ahmed SAIED)

Exo 1. Soit $E = \mathcal{C}^2\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \int_0^1 \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$$

$$N'(f) = \left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \int_0^1 \big|f'(t)\big|\,\mathrm{d}t$$

$$N''(f) = \left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t\right|\,.$$

a. Calculer $N(f)$, $N'(f)$ et $N''(f)$ pour $f : t \mapsto \sin(2\pi t)$.

b. Les applications N' et N'' sont-elles des normes sur E ?

c. Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)$.

d. Montrer que $\forall f \in E \quad N(f) \leq N'(f)$.

e. Les normes N et N' sur E sont-elles équivalentes ?

Exo 2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = I_n$, $M \neq I_n$ et $MM^\top = M^\top M$.

a. Montrer que $M^\top M$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

b. Montrer que $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

c. On suppose $n = 3$, déterminer les valeurs propres de M.

- -

Exo 1.a. Des calculs, laissés à l'improbable lecteur, montrent que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

et $\displaystyle\int_0^1 \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}$, ainsi que $\displaystyle\int_0^1 \big|f'(t)\big|\,\mathrm{d}t = 4$.

Donc $N(f) = \dfrac{2}{\pi}$, $N'(f) = 4$ et $N''(f) = 0$.

b. • Ce qui précède montre que N'' ne vérifie pas l'axiome de séparation et n'est donc pas une norme sur E.

• Montrons que N' est une norme. Si $N'(f) = 0$, alors $\displaystyle\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 \big|f'(t)\big|\,\mathrm{d}t = 0$ (*une somme de termes positifs est nulle* **ssi** *chaque terme est nul*). Comme $|f'|$ est continue et positive sur $[0,1]$, le théorème de stricte positivité entraîne que $f' = 0$ sur $[0,1]$ donc f est constante, $f = C$, puis la nullité de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ entraîne $C = 0$ donc $f = 0$. La réciproque est immédiate, on a prouvé l'axiome de séparation. Il est facile de prouver l'homogénéité $N'(\lambda f) = |\lambda|\,N'(f)$ et l'inégalité triangulaire $N'(f+g) \leq N'(f) + N'(g)$. Donc N' est une norme sur E.

• Ce n'est pas demandé, mais N est une norme sur E, on l'a étudiée en cours, c'est la "norme de la convergence en moyenne" souvent notée N_1 ou $\|\cdot\|_1$.

c. Soit F une primitive de f sur $[0,1]$. Comme F est dérivable sur $[0,1]$, l'égalité des accroissements finis affirme l'existence de $c \in\,]0,1[$ tel que $F(1) - F(0) = (1-0) \times F'(c)$, soit $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)$.

d. Soit $f \in E$, soit $c \in [0,1]$ tel que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)$. Du théorème fondamental de l'analyse, on déduit, pour tout $t \in [0,1]$, l'égalité $\displaystyle f(t) = f(c) + \int_c^t f'(u)\,\mathrm{d}u$, puis la majoration

$$\big|f(t)\big| \leq \big|f(c)\big| + \left|\int_c^t \big|f'(u)\big|\,\mathrm{d}u\right| \leq \big|f(c)\big| + \int_0^1 \big|f'(u)\big|\,\mathrm{d}u = N'(f)\ .$$

Commentaires: Dans la première majoration, "deux niveaux" de valeurs absolues sont nécessaires car on ne sait pas si t est inférieur ou supérieur à c. Pour la deuxième majoration, comme $|f'|$ est une fonction positive, son intégrale sur un segment $[c,t]$ ou $[t,c]$ inclus dans $[0,1]$ est majorée par son intégrale sur $[0,1]$ (résulte de la relation de Chasles). On a ainsi majoré $\big|f(t)\big|$ par la valeur constante $N'(f)$. Il ne reste plus qu'à intégrer cette inégalité sur $[0,1]$ pour déduire l'inégalité $N(f) \leq N'(f)$.

e. Soit la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0,1]$. On a bien $f_n \in E$, on calcule $N(f_n) = \dfrac{1}{n+1}$ et $N'(f_n) = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ pour tout n. Le rapport $\dfrac{N'(f_n)}{N(f_n)}$ tend vers l'infini, donc n'est pas borné, ce qui contredit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $\forall f \in E \quad N'(f) \leq C\,N(f)$. Les normes N et N' sur E ne sont donc pas équivalentes.

Exo 2.a. Clairement, la matrice $S = M^\top M$ est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable (sur $\mathbb{R}$). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une de ses valeurs propres. Comme $S^3 = (M^\top M)^3 = (M^\top)^3 M^3 = (M^3)^\top M^3 = I_3$, le réel λ^3 est valeur propre de I_3, donc $\lambda^3 = 1$ et finalement $\lambda = 1$ puisque λ est réel. Donc $\mathrm{Sp}(S) = \{1\}$.

b. Comme $S = M^\top M$ est diagonalisable avec la seule valeur propre 1, on a donc $M^\top M = I_3$, donc M est une matrice orthogonale.

c. Comme M est orthogonale, les seules valeurs propres possibles sont 1 et -1. Mais si -1 était valeur propre de M, alors $(-1)^3 = -1$ serait aussi valeur propre de $M^3 = I_3$, ce qui n'est pas le cas. Donc $\mathrm{Sp}(M) \subset \{1\}$. Comme une matrice réelle d'ordre impair admet au moins une valeur propre, $\mathrm{Sp}(M) = \{1\}$.

CCINP 5 (Ilias TALEB)

Exo 1. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent, soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a. Soient $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblables, soit $R \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme. Montrer que les matrices $R(U)$ et $R(V)$ sont semblables.

b. Calculer M^2, M^3, puis M^k pour k entier naturel. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme. Exprimer la matrice $P(M)$ à l'aide des matrices $P(A)$, $P'(A)$ et B.

c. Si A est diagonalisable et $B = 0_n$, montrer que M est diagonalisable.

d. Montrer la réciproque de la question **c.**

Exo 2. a. Cours: rappeler l'énoncé du théorème spécial des séries alternées.

b. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$, avec $a_n = \cos\left(\pi\, n^2\, \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$.

- -

Exo 1. C'est l'exo 34 de la feuille de TD "réduction des endomorphismes" de cette année.

Exo 2.a. Relire le cours!

b. On développe un peu:

$$\begin{aligned} a_n &= \cos\left(\pi\, n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\right)\right) \\ &= \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{3n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) \\ &= (-1)^n \frac{\pi}{3n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\,. \end{aligned}$$

On a utilisé les formules $\cos(n\pi + x) = (-1)^n\, \cos(x)$ *avec* x *réel et* n *entier relatif, ainsi que*

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)\ .$$

On a décomposé a_n en $a_n=b_n+c_n$, avec $b_n=(-1)^n\dfrac{\pi}{3n}$ et $c_n=O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum b_n$ converge car elle vérifie les hypothèses du TSSA, la série $\sum c_n$ converge absolument d'après le cours. Par somme, la série $\sum a_n$ est convergente.

CCINP 6 (Valentin BROC)

Exo 1. Soit $E=\mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$ muni du produit scalaire

$$<f,g>=\int_{-1}^{1}f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

On considère les sous-espaces vectoriels

$$F=\{f\in E\mid\forall x\in[0,1]\quad f(x)=0\}\qquad\text{et}\qquad G=\{f\in E\mid\forall x\in[-1,0]\quad f(x)=0\}\ .$$

a. Montrer que les sous-espaces F et G sont orthogonaux.

b. A-t-on $E=F\oplus G$?

c. Justifier que $G\subset F^{\perp}$.

d. (*ne figurait pas dans la planche initiale*). On souhaite maintenant montrer que $G=F^{\perp}$. On se donne $g\in F^{\perp}$. En considérant la fonction $u:[-1,1]\to\mathbb{R}$, nulle sur $[0,1]$ et telle que $u(t)=-t\,g(t)$ pour $t\in[-1,0[$, montrer que $g\in G$ et conclure.

e. *En fait, pour conclure que $G=F^{\perp}$, l'énoncé d'origine proposait une autre méthode, mais qui me semble plus compliquée, la voici:*

Soit $g\in F^{\perp}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction de E qui est constante de valeur $g(0)$ sur $\left[-1,-\dfrac{1}{n}\right]$, qui est affine sur $\left[-\dfrac{1}{n},0\right]$ et qui est nulle sur $[0,1]$.

i. Exprimer $<f_n,g>$, puis montrer que $g(0)\displaystyle\int_{-1}^{0}g(t)\,\mathrm{d}t=0$.

ii. En considérant la fonction f de E, nulle sur $[0,1]$ et telle que $f(x)=g(x)-g(0)$ pour tout $x\in[-1,0[$, conclure.

f. *Comme cet exercice m'a intéressé, je rajoute une question que cela m'a inspiré*. Montrer que $F \oplus F^{\perp}$, c'est-à-dire $F \oplus G$, est un hyperplan dense dans l'espace préhilbertien E.

Exo 2. Soit l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) \ : \qquad x(1-x)\, y'' + (1-3x)\, y' - y = 0\ .$$

a. Trouver les solutions de **(E)** développables en série entière.

b. Pourquoi l'équation **(E)** admet-elle, sur $]0,1[$, d'autres solutions que celles obtenues ci-dessus ?

c. Résoudre **(E)** sur $]0,1[$ en utilisant le changement de fonction inconnue $y(x) = \dfrac{z(x)}{1-x}$.

- -

Exo 1.a. Si $f \in F$ et $g \in G$, alors le produit fg est nul sur $[-1,1]$, donc $< f, g >= 0$.

b. L'orthogonalité des sous-espaces entraîne $F \cap G = \{0\}$ (ils sont en somme directe). En revanche, $F + G \neq E$: en effet, si $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$, alors $h(0) = 0$. La fonction constante de valeur 1, par exemple, est un élément de E qui n'appartient pas à $F + G$.

c. L'orthogonalité des sous-espaces F et G se traduit par $G \subset F^{\perp}$ (ou, de façon symétrique, $F \subset G^{\perp}$).

d. Soit $g \in F^{\perp}$, on doit montrer que $g \in G$, i.e. g est nulle sur $[-1,0]$. Soit la fonction u introduite par l'énoncé. On a alors $\lim\limits_{t \to 0^-} u(t) = 0 = u(0)$, donc u est continue sur $[-1,1]$ et $u \in F$. Comme $g \in F^{\perp}$, on a

$$0 =< g, u >= \int_{-1}^{1} u(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-t)\, g(t)^2\, \mathrm{d}t\ .$$

Comme la fonction $t \mapsto -t\, g(t)^2$ est continue et positive sur $[-1,0]$, on en déduit qu'elle est nulle sur ce segment, donc g est nulle sur $[-1,0[$ puis sur $[-1,0]$ par continuité, i.e. $g \in G$. On a donc montré l'autre inclusion $F^{\perp} \subset G$.

Remarque. Vu la symétrie, on a bien sûr aussi $G^{\perp} = F$. On a donc construit, dans un espace préhilbertien E, un exemple de sous-espace F tel que $(F^{\perp})^{\perp} = F$, mais pourtant $F \oplus F^{\perp} \neq E$.

e. i. Chaque fonction f_n appartient à F, on peut vérifier la formule $f_n(t) = -n\, g(0)\, t$ valable pour $t \in \left[-\dfrac{1}{n}, 0\right]$. Comme $g \in F^{\perp}$, on a

$$\textbf{(*)} \qquad 0 =< f_n, g >= \int_{-1}^{0} f_n(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = g(0) \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} g(t)\, \mathrm{d}t - n\, g(0) \int_{-\frac{1}{n}}^{0} t\, g(t)\, \mathrm{d}t\ .$$

Le premier des deux termes tend vers $g(0) \displaystyle\int_{-1}^{0} g(t)\, \mathrm{d}t$ lorsque $n \to +\infty$, le deuxième tend vers zéro car

$$\left| n\, g(0) \int_{-\frac{1}{n}}^{0} t\, g(t)\, \mathrm{d}t \right| \leq n\, \big|g(0)\big|\, \|g\|_\infty \int_{-\frac{1}{n}}^{0} |t|\, \mathrm{d}t \leq \frac{\big|g(0)\big|\, \|g\|_\infty}{2n}\ .$$

En passant à la limite ($n \to +\infty$) dans **(*)**, on obtient la relation $g(0) \displaystyle\int_{-1}^{0} g(t)\, \mathrm{d}t = 0$.

ii. La fonction f proposée appartient aussi à F (observer qu'elle est bien continue en 0), on a donc

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} g(t)\, \big(g(t) - g(0)\big)\, \mathrm{d}t = 0\ .$$

En développant, on a donc

$$\int_{-1}^{0} g(t)^2\, \mathrm{d}t = g(0)\ \int_{-1}^{0} g(t)\, \mathrm{d}t = 0\ .$$

Comme g^2 est continue et positive sur $[-1, 0]$, le théorème de stricte positivité permet d'affirmer que g est nulle sur cet intervalle, donc $g \in G$, `quod erat demonstrandum`.

f. On a $F \oplus G = H = \big\{h \in E \mid h(0) = 0\big\}$: l'inclusion $F + G \subset H$ a été expliquée en **b.** Et réciproquement, si $h \in H$, alors $h = f + g$, où f et g sont définies par

$$\forall x \in [-1, 1] \qquad f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 0 & \text{si } \quad x \in \,]0, 1] \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 0[\\ h(x) & \text{si } \quad x \in [0, 1] \end{cases}.$$

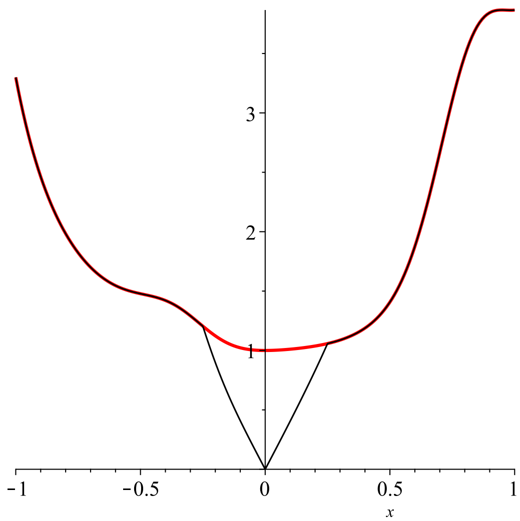
On vérifie facilement que f et g sont continues sur $[-1, 1]$, puis que $f \in F$ et $g \in G$. Le sous-espace H est bien un hyperplan de E puisque c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $\varphi : \begin{cases} E & \to \mathbb{R} \\ f & \mapsto f(0) \end{cases}$.

Montrons que H est dense dans E. Pour cela, soit $f \in E$, on va construire une suite d'éléments de H qui converge vers f dans l'espace vectoriel normé $\big(E, \|\cdot\|\big)$, où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. Pour cela, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $h_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec f sur $\left[-1, -\dfrac{1}{n}\right]$ et sur $\left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$, qui est nulle en 0 et qui est affine sur $\left[-\dfrac{1}{n}, 0\right]$ et sur $\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$, *cf.* schéma. On s'assure de la continuité de h_n sur $[-1, 1]$ et on a alors $h_n \in H$ pour tout n. Il faut montrer que $\|h_n - f\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or,

$$\|h_n - f\|^2 = \int_{-1}^{1} \big(h_n(t) - f(t)\big)^2\, \mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \big(h_n(t) - f(t)\big)^2\, \mathrm{d}t$$

et, comme sur $\left[-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right]$, on a $\big|h_n(t)\big| \leq \max\left\{\left|f\Big(-\dfrac{1}{n}\Big)\right|, \left|f\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\right|\right\} \leq \|f\|_\infty$, on majore grossièrement $\big|h_n(t) - f(t)\big| \leq \big|h_n(t)\big| + \big|f(t)\big| \leq 2\|f\|_\infty$, d'où $\|h_n - f\|^2 \leq \dfrac{8\,\|f\|_\infty^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qu'il fallait prouver.

Le schéma représente, en rouge, une fonction quelconque de E et en noir la fonction h_n pour $n = 4$, qui coïncide donc avec f en dehors de l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$ et qui vérifie $h_n(0) = 0$, donc $h_n \in H$.



Exo 2. a. En posant $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$ avec $R > 0$ que l'on déterminera ultérieurement, on dérive deux fois, on réinjecte et on obtient, après calculs (laissés bien évidemment à l'improbable lecteur/trice)... et simplifications, la relation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 (a_n - a_{n+1}) x^n = 0 \ .$$

Par identification des coefficients (unicité du développement en série entière), il reste tout simplement $a_{n+1} = a_n$ pour tout n. Les solutions de **(E)** développables en série entière sont donc de la forme $y = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{a_0}{1-x}$, avec un rayon de convergence $R = 1$, donc sur l'intervalle de convergence $]-1, 1[$.

b. Le théorème de Cauchy nous dit que, sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$, l'ensemble des solutions de **(E)** est un plan vectoriel, et nous disposons pour le moment d'une solution exprimée à l'aide d'une seule constante arbitraire, l'ensemble des solutions obtenues en **a.** forme donc un espace vectoriel de dimension 1, il y a donc d'autres solutions de **(E)** sur $]0, 1[$.

c. On a obtenu en **a.** une solution de **(E)** qui ne s'annule pas sur $]0, 1[$, à savoir la fonction $y_0 = \frac{1}{1-x}$. On recherche alors toutes les solutions par une méthode de variation de la constante, en posant donc $y = z\, y_0$, où z est une nouvelle fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$. Après calculs, on obtient $x(1-x)\,(z''\, y_0 + 2z' y_0') + (1-3x)\, z'\, y_0 = 0$, soit, en posant $u = z'$, $u' = \left(-2\frac{y_0'}{y_0} - \frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} \right) u$, d'où $u = \frac{C}{y_0^2\, x(x-1)^2} = \frac{C}{x}$, puis $z = C\, \ln(x) + D$, où C et D sont deux constantes arbitraires. Finalement, sur $]0, 1[$, les solutions de **(E)** sont les fonctions de la forme $y = \frac{C\, \ln(x) + D}{1-x}$.

CCINP 7 (Pierre-Marie SANTUCCI)

Exo 1. Soit E un espace préhilbertien réel, soit $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. On suppose que les vecteurs e_k sont unitaires et que

$$\forall x \in E \qquad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (e_k|x)^2 \ .$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est une base orthonormale de E.

Exo 2. Soient a et b deux réels strictement positifs.

a. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$.

b. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

- -

Exo 1. Fixons un indice $j \in [\![1, n]\!]$, on a alors

$$1 = \|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i|e_j)^2 = 1 + \sum_{i \neq j} (e_i|e_j)^2 \ ;$$

les $(e_i|e_j)^2$, avec $i \neq j$, étant tous positifs et de somme nulle, on en déduit qu'ils sont nuls. La famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est donc orthogonale, et finalement orthonormale.

La famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre car orthonormale, il reste à prouver qu'elle est génératrice. Et cela est immédiat si l'on se souvient du cas d'égalité dans l'inégalité de Bessel: en effet, le cours dit (*mais il est vrai que ce n'est pas explicitement au programme*) que, pour tout vecteur x de E, si $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une famille orthonormale, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (e_k|x)^2 \leq \|x\|^2$ et que l'égalité est satisfaite si et seulement si $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$. On voit donc ici que tous les vecteurs de E appartiennent à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour un raisonnement plus développé, soit le sous-espace $V = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$, il s'agit de prouver que $V = E$. Or, si $x \in E$, d'après le cours, le projeté orthogonal de x sur V a pour expression $\displaystyle p_V(x) = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x) e_i$ et on a alors $\big\|p_V(x)\big\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (e_i|x)^2$, soit $\big\|p_V(x)\big\|^2 = \|x\|^2$ vu l'hypothèse. Mais la relation de Pythagore donne aussi $\|x\|^2 = \big\|p_V(x)\big\|^2 + \big\|x - p_V(x)\big\|^2$. On a donc ici $\big\|x - p_V(x)\big\| = 0$, donc $x = p_V(x) \in V$. Ainsi, $E \subset V$, donc $V = E$.

Exo 2.a. Notons d'abord que:

- l'intégrale du premier membre est bien convergente puisque $\displaystyle\frac{t^{a-1}}{1+t^b} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-a}}$ avec $1 - a < 1$;

- la série du second membre est bien convergente, en vertu du théorème spécial des séries alternées, puisque la suite $\displaystyle\left(\frac{1}{a+nb}\right)$ est décroissante et tend vers zéro.

Toutefois, cette série n'est pas absolument convergente, et ceci nous empêche d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme pour conclure. En effet, pour $t \in \,]0, 1[$, on peut écrire $\dfrac{t^{a-1}}{1+t^b}=t^{a-1}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-t^b)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,t^{a+nb-1}$ et, si l'on pose $f_n(t)=(-1)^n\,t^{a+nb-1}$, alors la série de terme général $\displaystyle\int_0^1\big|f_n(t)\big|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a+nb}$ est divergente!

Travaillons alors sur une somme partielle de la série: Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{a+kb}=\sum_{k=0}^{n}\int_0^1(-1)^k t^{a+kb-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{a+kb-1}\right)\mathrm{d}t=\int_0^1 t^{a-1}\left(\sum_{k=0}^{n}(-t^b)^k\right)\mathrm{d}t$$

(il n'y aucun problème pour intervertir somme et intégrale, tant qu'il s'agit d'une somme finie!). On reconnaît maintenant sous l'intégrale une somme partielle d'une série géométrique, et cela on sait l'expliciter. Donc

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{a+kb}=\int_0^1 t^{a-1}\,\frac{1-(-t^b)^{n+1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t+(-1)^n\int_0^1\frac{t^{a+nb+b-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t\;.$$

Pour parvenir à nos fins, il ne reste plus qu'à prouver que l'intégrale $R_n=\displaystyle\int_0^1\frac{t^{a+nb+b-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque $n\to+\infty$. C'est facile puisque

$$0\le R_n=\int_0^1\frac{t^{a+nb+b-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t\le\int_0^1 t^{a+nb+b-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a+nb+b}\quad\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\quad 0\;.$$

Remarque. Une variante consistait à appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (s_n) des sommes partielles, avec $s_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f_k$.

b. • Avec $a=b=1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\big[\ln(1+t)\big]_0^1=\ln(2)$, on retrouve la somme de la "série harmonique alternée".

• Avec $a=1$ et $b=2$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\big[\operatorname{Arctan}(t)\big]_0^1=\frac{\pi}{4}$.

CCINP 8 (Alice PONCHEL)

Exo 1. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.

a. Montrer que, si f est diagonalisable, alors $f^2=f\circ f$ l'est aussi.

b. Montrer que, si f est diagonalisable, alors $\mathrm{Ker}(f^2)=\mathrm{Ker}(f)$.

c. Soit λ une valeur propre complexe non nulle de f^2, soit μ une racine carrée complexe de λ. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f^2-\lambda\,\mathrm{id}_E)=\mathrm{Ker}(f-\mu\,\mathrm{id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(f+\mu\,\mathrm{id}_E)\;.$$

d. Montrer que, si f^2 est diagonalisable et inversible, alors f est aussi diagonalisable et inversible.

e. On suppose f^2 diagonalisable. Montrer alors que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(f^2)=\mathrm{Ker}(f)$.

Exo 2. On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\ \sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c. Donner l'expression de $g(x)$.

- -

Exo 1.a. Si l'endomorphisme f est diagonalisable, il est représenté dans une certaine base $\mathcal{B}$ de E par une matrice diagonale D, l'endomorphisme f^2 est alors représenté par la matrice D^2 qui est aussi diagonale, donc f^2 est diagonalisable.

b. Avec les mêmes notations, D^2 est de même rang que D (puisque le rang d'une matrice diagonale est le nombre de coefficients diagonaux non nuls), on a donc $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$ puis $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$ car on connaît l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et on a égalité des dimensions par le théorème du rang.

c. De l'égalité $f^2 - \lambda\,\mathrm{id}_E = (f - \mu\,\mathrm{id}_E)\circ(f + \mu\,\mathrm{id}_E) = (f + \mu\,\mathrm{id}_E)\circ(f - \mu\,\mathrm{id}_E)$, on déduit d'abord que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f - \mu\,\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f + \mu\,\mathrm{id}_E)$ sont inclus dans $\mathrm{Ker}(f^2 - \lambda\,\mathrm{id}_E)$, d'où l'inclusion

$$\mathrm{Ker}(f - \mu\,\mathrm{id}_E) + \mathrm{Ker}(f + \mu\,\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f^2 - \lambda\,\mathrm{id}_E)\ .$$

Procédons ensuite par analyse-synthèse:

- Analyse: soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2 - \lambda\,\mathrm{id}_E)$, supposons **(1):** $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(f - \mu\,\mathrm{id}_E)$ et $z \in \mathrm{Ker}(f + \mu\,\mathrm{id}_E)$. Alors $f(x) = f(y) + f(z) = \mu(y - z)$, donc **(2):** $y - z = \dfrac{1}{\mu}\,f(x)$.

De **(1)** et **(2)**, on tire

$$y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{\mu}f(x)\right) \qquad \text{et} \qquad z = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{\mu}f(x)\right)\ ,$$

ce qui termine la partie analyse et prouve l'unicité de la décomposition.

- Synthèse: soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2 - \lambda\,\mathrm{id}_E)$, posons $y = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{\mu}f(x)\right)$ et $z = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{\mu}f(x)\right)$.
On a bien alors $y + z = x$ et, en utilisant que $f^2(x) = \lambda x = \mu^2 x$, on vérifie que

$$f(y) = \frac{1}{2}\big(f(x) + \mu x\big) = \mu y \qquad \text{et} \qquad f(z) = \frac{1}{2}\big(f(x) - \mu x\big) = -\mu z\ ,$$

donc $y \in \mathrm{Ker}(f - \mu\,\mathrm{id}_E)$ et $z \in \mathrm{Ker}(f + \mu\,\mathrm{id}_E)$, ce qui achève la partie synthèse et montre l'existence de la décomposition. On a donc prouvé que

$$\mathrm{Ker}(f^2 - \lambda\,\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mu\,\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mu\,\mathrm{id}_E)\ .$$

d. Supposons f^2 diagonalisable et inversible. Alors $\det(f^2) \neq 0$, donc $\det(f)^2 \neq 0$ donc $\det(f) \neq 0$ et f est aussi inversible. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes (alors non nulles) de f^2 et, pour $i \in [\![1, k]\!]$, soit μ_i une des deux racines carrées complexes de λ_i.
Comme f^2 est diagonalisable, $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(f^2 - \lambda_i\,\mathrm{id}_E)$. La question **c.** donne

$$\forall i \in [\![1, k]\!] \qquad \mathrm{Ker}(f^2 - \lambda_i\,\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mu_i\,\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mu_i\,\mathrm{id}_E)\ .$$

L'associativité de la somme directe permet alors d'obtenir

$$E = \Big(\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(f - \mu_i \, \mathrm{id}_E)\Big) \bigoplus \Big(\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(f + \mu_i \, \mathrm{id}_E)\Big) \,.$$

Donc E est la somme (directe) des sous-espaces propres de f, ce qui signifie que f est diagonalisable.

Autre rédaction possible (mais sans utiliser la question **c.**). Notons toujours $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes (alors non nulles) de f^2 et, pour $i \in [\![1,k]\!]$, soit μ_i une des deux racines carrées complexes de λ_i. Comme f^2 est diagonalisable, on sait que le polynôme $P = \prod_{\alpha \in \mathrm{Sp}(f^2)} (X - \alpha) = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)$ annule f^2, i.e. on a la relation $\prod_{i=1}^{k} (f^2 - \lambda_i \, \mathrm{id}_E) = 0$ dans $\mathcal{L}(E)$. Cette relation se factorise en $\left(\prod_{i=1}^{k} (f - \mu_i \, \mathrm{id}_E)\right) \circ \left(\prod_{i=1}^{k} (f + \mu_i \, \mathrm{id}_E)\right) = 0$.
Notons que les endomorphismes intervenant dans ces calculs sont tous des polynômes de l'endomorphisme f, ils commutent donc entre eux.

Ceci montre que le polynôme $Q = \prod_{i=1}^{k} \big((X - \mu_i)(X + \mu_i)\big)$ est annulateur de f. Comme le polynôme Q est scindé à racines simples, on déduit que f est diagonalisable.

e. On a déjà vu en **b.** que , **si** f est diagonalisable, **alors** $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$.

Réciproquement, supposons $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$. Si f est inversible, alors f est diagonalisable d'après **d.** Supposons maintenant f non inversible, alors f^2 n'est pas inversible non plus, donc 0 est valeur propre de f et de f^2. En notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes **et non nulles** de f^2, comme f^2 est diagonalisable, on a

$$E = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{Sp}(f^2)} E_\alpha(f^2) = \mathrm{Ker}(f^2) \bigoplus \Big(\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(f^2 - \lambda_i \, \mathrm{id}_E)\Big) \,.$$

En procédant comme en **d.**, on en déduit que

$$E = \mathrm{Ker}(f^2) \bigoplus \Big(\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(f - \mu_i \, \mathrm{id}_E)\Big) \bigoplus \Big(\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(f + \mu_i \, \mathrm{id}_E)\Big) \,.$$

Et comme $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$, on dispose d'une décomposition de E en somme (directe) de sous-espaces propres de f, donc f est diagonalisable.

Exo 2.a. Posons $f(x,t) = \dfrac{e^{-t} \, \sin(xt)}{t}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Alors $\big|f(x,t)\big| \leq e^{-t}$ pour $t \geq 1$, ce qui garantit l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ en $+\infty$ (et ceci pour tout x réel). Par ailleurs, $\lim\limits_{t \to 0} f(x,t) = x$ donc $t \mapsto f(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0, cela garantit la convergence de l'intégrale $g(x)$ pour tout x réel.

b. L'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ a été démontrée en **a.**

L'application partielle $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-t}\,\cos(xt)$. La domination

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-t}$$

permet d'appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre ($t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$) et d'affirmer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\mathrm{d}t$.

c. En écrivant que $\cos(xt) = \mathrm{Re}\left(e^{ixt}\right)$, on obtient

$$g'(x) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(-1+ix)t}}{-1+ix}\right]_{t=0}^{t\to+\infty}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{x^2+1}$$

puis, comme $g(0) = 0$, on conclut enfin que $g(x) = \mathrm{Arctan}(x)$ pour tout x réel.

CCINP 9 (Céleste PUGNIÈRE)

Exo 1. Soit f un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ tel que $f^3 = \mathrm{id}_E$ et $f \neq \mathrm{id}_E$.

a. Montrer que 1 est valeur propre de f.

b. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E) = E$.

c. Construire une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exo 2. Soit α réel. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et x réel, on pose

$$f_n(x) = x\,(1 + n^\alpha\,e^{-nx})\,.$$

a. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que $g : y \mapsto ye^{-y}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. En déduire la convergence uniforme de (f_n) pour $\alpha < 1$.

c. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

- -

Exo 1.a. Le polynôme $P = X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$ est annulateur de f, on a donc $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}(P) = \{1\}$, i.e. le nombre 1 est la seule valeur propre possible de f. Or, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire donc $\mathrm{Sp}(f) \neq \emptyset$. Finalement, $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$.

b. Procédons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $x \in E$, supposons **(1):** $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $z \in \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$. En appliquant f deux fois, on obtient successivement **(2):** $f(x) = y + f(z)$, puis **(3):** $f^2(x) = y + f^2(z)$. En ajoutant les trois équations numérotées, comme $z \in \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$, on obtient $x + f(x) + f^2(x) = 3y$, donc

$$y = \frac{1}{3}\left(x + f(x) + f^2(x)\right) , \quad \text{puis} \quad z = x - y = \frac{1}{3}\left(2x - f(x) - f^2(x)\right) ,$$

ce qui termine la partie analyse et prouve l'unicité de la décomposition.

Synthèse. Soit $x \in E$, posons $y = \frac{1}{3}\left(x + f(x) + f^2(x)\right)$ et $z = \frac{1}{3}\left(2x - f(x) - f^2(x)\right)$, on a bien alors $y + z = x$, et

$$f(y) = \frac{1}{3}\left(f(x) + f^2(x) + f^3(x)\right) = \frac{1}{3}\left(f(x) + f^2(x) + x\right) = y ,$$

donc $y \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, et enfin

$$(f^2 + f + \mathrm{id}_E)(z) = \frac{1}{3}\left(2f^2(x) - f^3(x) - f^4(x) + 2f(x) - f^2(x) - f^3(x) + 2x - f(x) - f^2(x)\right) = 0_E$$

en tenant compte de $f^3(x) = x$ et $f^4(x) = f(x)$, donc $z \in \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$. Ceci termine la partie synthèse et prouve l'existence d'une décomposition. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$ sont donc supplémentaires dans E.

c. On sait que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$, soit donc e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.

Comme $f \neq \mathrm{id}_E$, on a $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \neq E$, donc $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$ d'après **b.** Soit e_2 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$. Soit enfin $e_3 = f(e_2)$.

Le vecteur e_3 n'est pas colinéaire à e_2, sinon e_2 serait vecteur propre de f, donc $e_2 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ puisque 1 est la seule valeur propre de f, donc e_2 serait nul puisqu'il serait dans l'intersection des deux sous-espaces supplémentaires de la question **b.** La famille (e_2, e_3) est donc libre, enfin $e_1 \notin \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ toujours d'après **b.**, donc $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est libre et c'est une base de E car elle est de cardinal 3.

On a $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_3$ par construction et, comme $e_2 \in \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$,

$$f(e_3) = f^2(e_2) = -e_2 - f(e_2) = -e_2 - e_3 ,$$

donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

C'est un peu parachuté, mais posons maintenant $\varepsilon_1 = e_1 + e_2$, $\varepsilon_2 = e_1 - e_2 - e_3$ et $\varepsilon_3 = e_1 + e_3$. On vérifie que la famille $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est aussi une base de E et que $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_3$, $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$ et $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exo 2.a. Pour $x = 0$, on a toujours $f_n(x) = 0$ et, pour $x > 0$, par croissances comparées $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha e^{-nx} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = x$.

La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto x$.

b. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$, elle est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$ (*à expliquer!*), ou alors un tableau de variations montre que $\|g\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = g(1) = e^{-1}$.

Si $\alpha < 1$, on a, pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$0 \leq f_n(x) - f(x) = n^\alpha x\, e^{-nx} = n^{\alpha - 1}\, g(nx) \leq e^{-1}\, n^{\alpha - 1}$$

(majoration uniforme) donc $\|f_n - f\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = e^{-1}\, n^{\alpha-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il y a bien convergence uniforme de (f_n) vers f sur $\mathbb{R}_+$ dans ce cas.

c. Si $\alpha < 1$, la convergence uniforme de la suite de fonctions continues (f_n) vers f sur le **segment** $[0, 1]$ permet l'interversion limite-intégrale, donc $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Remarque. Par une intégration par parties, on peut calculer explicitement l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + n^{\alpha-2} - n^{\alpha-1}e^{-n} - n^{\alpha-2}e^{-n}\ .$$

Les deux derniers termes tendent vers zéro lorsque $n \to +\infty$ par croissances comparées. On discute alors suivant le second terme:

- si $\alpha < 2$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{2}$;

- si $\alpha = 2$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{3}{2}$;

- si $\alpha > 2$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

CCINP 10 (Wassime ATEK)

Exo 1. Soit $n \geq 2$, soient $X,\, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ supposés tous les deux non nuls. Pour tout α réel, on pose $M_\alpha = I_n - \alpha\, XY^\top$. Soit l'ensemble $H = \{M_\alpha\ ;\ \alpha \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que l'ensemble H est stable par produit matriciel.

b. Préciser le rang de $XY^\top$.

c. Pour quels réels α la matrice M_α est-elle inversible ?

d. On suppose les vecteurs X et Y non orthogonaux, i.e. $X^\top Y \neq 0$.

i. Montrer que $XY^\top$ est diagonalisable.

ii. En déduire que M_α est diagonalisable pour tout α réel.

Exo 2. Pour tout $t \in]0, 1]$, on pose $f(t) = e^t\, \ln(t)$.

a. Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$.

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}$.

- -

1. Notons d'abord que, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors $XY^\top$ est la matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficients d'indices (i, j) est $x_i y_j$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

En revanche, $X^\top Y = Y^\top X = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un réel: c'est le produit scalaire canonique des vecteurs X et Y, que l'on peut noter aussi $(X|Y)$, et on notera que c'est aussi la trace de la matrice carrée $XY^\top$.

a. Un calcul élémentaire donne, si α et β sont des réels,

$$\begin{aligned} M_\alpha M_\beta &= (I_n - \alpha XY^\top)(I_n - \beta XY^\top) \\ &= I_n - (\alpha+\beta)XY^\top + \alpha\beta X\,(Y^\top X)\,Y \\ &= I_n - \big(\alpha+\beta-\alpha\beta(X|Y)\big)XY^\top \\ &= M_\gamma \end{aligned}$$

en posant $\gamma = \alpha+\beta-\alpha\beta(X|Y)$. Donc $M_\alpha M_\beta \in H$, l'ensemble H est stable par produit.

b. La matrice $XY^\top$ n'est pas nulle: en effet, comme $X \neq 0$ et $Y \neq 0$, il existe des indices i_0 et j_0 dans $[\![1,n]\!]$ tels que $x_{i_0} \neq 0$ et $y_{j_0} \neq 0$. Alors le coefficient d'indices (i_0, j_0) de la matrice $XY^\top$ vaut $x_{i_0}y_{j_0}$, donc est non nul.

La matrice $XY^\top$ est de rang au plus 1 puisque ses colonnes sont toutes colinéaires au vecteur X: en effet, sa j-ième colonne est $\begin{pmatrix} x_1y_j \\ \vdots \\ x_ny_j \end{pmatrix} = y_j\,X$.

Finalement, $XY^\top$ est de rang 1 exactement.

c. Si $\alpha = 0$, alors $M_\alpha = M_0 = I_n$ est inversible.

Si $\alpha \neq 0$, on peut écrire

$$\det(M_\alpha) = \det(I_n - \alpha XY^\top) = \det\left(\alpha\left(\frac{1}{\alpha}I_n - XY^\top\right)\right) = \alpha^n\,\chi_{XY^\top}\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

donc M_α est non-inversible si et seulement si $\dfrac{1}{\alpha}$ est valeur propre de $XY^\top$.

Comme $XY^\top$ est de rang 1, elle admet 0 comme valeur propre avec un sous-espace propre de dimension $n-1$ par le théorème du rang, donc avec une multiplicité au moins égale à $n-1$. Comme $\mathrm{tr}(XY^\top) = (X|Y) = X^\top Y$, on déduit la disjonction de cas suivante:

- si $X^\top Y = 0$, alors $\mathrm{Sp}(XY^\top) = \{0\}$, donc $\mathrm{Sp}(M_\alpha) = \{1\}$ pour tout α réel, et la matrice M_α est alors toujours inversible ;
- si $X^\top Y \neq 0$, alors $\mathrm{Sp}(XY^\top) = \{0\,,\,X^\top Y\}$, et la matrice M_α est alors inversible si et seulement si $\alpha \neq \dfrac{1}{X^\top Y}$.

d. i. Si $X^\top Y \neq 0$, alors d'après la question précédente, $XY^\top$ admet deux valeurs propres distinctes qui sont 0 et $X^\top Y$, la première avec un sous-espace propre de dimension $n-1$, et la seconde nécessairement avec un sous-espace propre de dimension 1, donc $XY^\top$ est diagonalisable puisque la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut n.

ii. La matrice $XY^\top$ étant semblable à $D = \mathrm{diag}\big(0,\cdots,0,X^\top Y\big)$, il est immédiat que $M_\alpha = I_n - \alpha XY^\top$ est semblable à $\Delta = I_n - \alpha D = \mathrm{diag}\big(1,\cdots,1,1-\alpha X^\top Y\big)$, donc M_α est diagonalisable quel que soit le réel α.

2.a. La fonction f est continue sur $]0,1]$ et l'équivalent $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$ montre qu'elle est intégrable en 0.

b. On développe l'exponentielle en série entière: $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ en posant $f_n(t) = \dfrac{t^n \ln(t)}{n!}$.
Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0,1]$ (c'est du cours pour $n=0$ et, pour $n \geq 1$, la fonction f_n est prolongeable en une fonction continue sur le **segment** $[0,1]$), la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1]$ par construction et a pour somme la fonction f. Enfin, par une intégration par parties, le "terme enre crochets" étant nul,

$$\int_0^1 \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{t^n \ln(t)}{n!} \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n}{(n+1)\times n!} \mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2 \times n!} \ ,$$

qui est clairement sommable, ce qui autorise à intégrer terme à terme. On obtient alors, en terminant par une translation d'indice:

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2 \times n!} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 (n-1)!} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!} \ .$$

CCINP 11 (Hasna BENALI)

Exo 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $\varphi_A : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto AM \end{cases}$.

a. Cours. Rappeler une CNS en termes de polynôme annulateur pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable.

b. Montrer que φ_A est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

c. Montrer que φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

d. Montrer que $\mathrm{Sp}(\varphi_A) = \mathrm{Sp}(A)$.

e. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, soit $(X_1, \cdots, X_k)$ une base de $E_\lambda(A)$. Construire à l'aide des X_i $(1 \leq i \leq k)$ une base de $E_\lambda(\varphi_A)$.

Exo 2. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables de Bernoulli de même paramètre $p \in]0,1[$, soit N une variable géométrique de paramètre p. On suppose que les X_i et N sont mutuellement indépendantes. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$.

On écrira alors $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

a. Un entier $n \in \mathbb{N}^*$ étant donné, on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Quelle est la loi de la variable S_n ?

b. Soit $k \in \mathbb{N}$, soit $x \in]-1,1[$, donner une expression simple de $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$.

c. En déduire la loi de Y.

- -

1.a. Il y a deux énoncés à retenir:

• Une matrice est diagonalisable si et seulement si elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

• $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement le polynôme $P = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ est annulateur de A.

b. C'est une pure formalité!

c. On vérifie immédiatement que $(\varphi_A)^k = \varphi_{A^k}$ pour tout k entier naturel, que $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.

On vérifie aussi immédiatement que l'endomorphisme φ_A est nul si et seulement si A est la matrice nulle.

De tout cela, il résulte les équivalences

$$P(\varphi_A) = 0 \iff \varphi_{P(A)} = 0 \iff P(A) = 0_n \ ,$$

autrement dit les polynômes annulateurs de l'endomorphisme φ_A sont exactement ceux de la matrice A. De **a.**, on déduit que φ_A est diagonalisable si et seulement si A est elle-même diagonalisable.

d. • Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, il existe alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nul, tel que $AX = \lambda X$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice carrée dont toutes les colonnes valent X, alors $M \neq 0_n$ et $\varphi_A(M) = AM = \lambda M$. En effet, on peut écrire $M = XU^\top$ avec $U = (\,1 \quad \cdots \quad 1\,)^\top$, donc

$$\varphi_A(M) = AM = AXU^\top = \lambda XU^\top = \lambda M \ .$$

Donc λ est valeur propre de φ_A. On a prouvé l'inclusion $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Sp}(\varphi_A)$.

• Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi_A)$, il existe alors $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $\varphi_A(M) = \lambda M$, soit $AM = \lambda M$. Cette matrice M contient au moins une colonne non nulle, disons la j-ième, notons-la C_j. On a alors $AC_j = \lambda C_j$. En effet, on peut écrire $C_j = ME_j$, où E_j est le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, donc $AC_j = AME_j = \lambda ME_j = \lambda C_j$. Donc λ est valeur propre de A. On a prouvé l'inclusion $\mathrm{Sp}(\varphi_A) \subset \mathrm{Sp}(A)$.

e. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} M \in E_\lambda(\varphi_A) \quad &\iff \quad AM = \lambda M \iff (A - \lambda I_n)M = 0_n \iff \mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \\ &\iff \quad \mathrm{Im}(M) \subset E_\lambda(A) \\ &\iff \quad \forall j \in [\![1, n]\!] \quad C_j(M) \in \mathrm{Vect}(X_1, \cdots, X_k) \ . \end{aligned}$$

En clair, une matrice carrée M appartient à $E_\lambda(\varphi_A)$ si et seulement si chacune de ses colonnes appartient à $E_\lambda(A)$. Le sous-espace propre $E_\lambda(\varphi_A)$ est donc naturellement isomorphe à $\big(E_\lambda(A)\big)^n$: *Pour construire une matrice appartenant à $E_\lambda(\varphi_A)$, on choisit n vecteurs-colonnes appartenant à $E_\lambda(A)$ et on les assemble pour obtenir une matrice carrée d'ordre n.* On en déduit que, si $\dim E_\lambda(A) = k$, alors $\dim E_\lambda(\varphi_A) = nk$.

Exhiber une base de $E_\lambda(\varphi_A)$ à l'aide des X_i, $1 \leq i \leq k$, est un peu moins agréable, on peut toutefois proposer la famille $(X_i E_j^\top)_{(i,j) \in [\![1,k]\!] \times [\![1,n]\!]}$.

En effet, pour tout $(i, j) \in [\![1, k]\!] \times [\![1, n]\!]$, $X_i E_j^\top$ est la matrice carrée d'ordre n dont la j-ième colonne vaut X_i, les autres colonnes étant nulles.

2.a. La variable S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, c'est du cours.

b. Pour $x \in]-1,1[$, on peut écrire (on peut dériver terme sur cet intervalle la somme d'une série entière de rayon de convergence 1):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} &= \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^n) \\
&= \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \\
&= \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) \\
&= \frac{1}{k!} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} .
\end{aligned}$$

c. On a clairement $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et, comme $\big(\{N=n\}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, on a pour tout $y \in \mathbb{N}$,

$$\{Y=y\} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} \big(\{N=n\} \cap \{Y=y\}\big) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} \big(\{N=n\} \cap \{S_n=y\}\big) .$$

Par le lemme des coalitions, les variables N et S_n sont indépendantes pour tout n. On obtient donc, en posant $q = 1-p$ et en observant que $1-q^2 = p(2-p)$, tout d'abord

$$P(Y=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)\, P(S_n=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1} \times q^n = pq \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{1-p}{2-p} .$$

Ensuite, pour $y \in \mathbb{N}^*$, comme $y \geq 1$, on peut démarrer la somme à $n = y$ puisque l'événement $\{S_n = y\}$ ne peut se produire que si $n \geq y$:

$$\begin{aligned}
P(Y=y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)\, P(S_n=y) \\
&= \sum_{n=y}^{+\infty} pq^{n-1} \times \binom{n}{y} p^y q^{n-y} \\
&= p^{y+1} q^{y-1} \sum_{n=y}^{+\infty} \binom{n}{y} (q^2)^{n-y} \\
&= p^{y+1} q^{y-1} \frac{1}{(1-q^2)^{y+1}} = \frac{(1-p)^{y-1}}{(2-p)^{y+1}} .
\end{aligned}$$

Remarque. Le lecteur inquiet vérifiera que $\displaystyle\sum_{y=0}^{+\infty} P(Y=y) = \frac{1-p}{2-p} + \sum_{y=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^{y-1}}{(2-p)^{y+1}} = 1$, ce qui le rassurera.

CCINP 12 (Raphaël BESSONE)

Exo 1. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Soit l'ensemble

$$\mathcal{C}_u = \left\{ v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u \right\} .$$

a. Montrer que $\mathcal{C}_u$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

b. Déterminer $\dim\big(E_{\lambda_k}(u)\big)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

c. Soit $v \in \mathcal{C}_u$. Montrer que les sous-espaces $E_{\lambda_k}(u)$ sont stables par v.

d. Soit $v \in \mathcal{C}_u$. Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres communs à u et v.

Exo 2.a. Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\ln(x)}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$. Montrer sa convergence.

b. *Il y avait d'autres questions... Mon logiciel de calcul formel me dit que $I = \pi$, mais je ne sais pas comment le démontrer. Si quelqu'un a une idée...*

- -

1.a. C'est une pure formalité.

b. Si $\mathrm{Card}\big(\mathrm{Sp}(u)\big) = \dim(E) = n$, alors les sous-espaces propres sont de dimension 1.

c. C'est du cours!

d. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, notons e_k un vecteur directeur de la droite $D_k = E_{\lambda_k}(u)$. Alors la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E (*famille libre car constituée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes*) formée de vecteurs propres de u. Comme D_k est stable par v, il existe un scalaire μ_k tel que $v(e_k) = \mu_k e_k$, donc e_k est aussi vecteur propre de l'endomorphisme v. Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres communs à u et v.

2.a. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}\,\ln(x)}{(1+x)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Enfin, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x^{3/2}}$, donc il existe $\alpha > 1$ (choisir par exemple $\alpha = \dfrac{5}{4}$) tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} f(x) = 0$. Cela entraîne l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la convergence de l'intégrale I.

CCINP 13 (Maïwen HAMON)

Exo 1. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

a. Domaine de définition de f.

b. Dérivabilité de f et expression de $f'(x)$.

Indication: Pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ fixé, rechercher des réels a et b tels que

$$\textbf{(*)} \qquad \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{a}{1+t^2} + \frac{b}{1+x^2t^2} .$$

c. Expression de $f(x)$.

d. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t}\right)^2 \,\mathrm{d}t$.

Exo 2. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On suppose que u admet un polynôme annulateur $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que 0 soit racine simple de P.

a. Interpréter "0 est racine simple de P" avec les coefficients de P.

b. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.

c. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$.

d. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont en somme directe.

- -

1.a. Posons $g(x,t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t\,(1+t^2)}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Pour tout réel x fixé, l'application partielle $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifie $\lim\limits_{t\to 0} g(x,t) = x$ (donc elle est prolongeable par continuité en 0), et on a $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{sgn}(x)\,\dfrac{\pi}{2t^3}$. On en déduit que cette application partielle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, quel que soit le réel x. Donc $D_f = \mathbb{R}$.

b. On a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$, l'application $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}^2$ et on a la domination $0 \leq \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ par une fonction intégrable de la variable t seulement, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, par dérivation sous le signe intégrale,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)\,(1+x^2t^2)}\ .$$

Pour rechercher les réels a et b satisfaisant la relation **(*)**, on réduit au même dénominateur puis on identifie, on aboutit au système $\begin{cases} a+b &= 1 \\ x^2a+b &= 0 \end{cases}$. Si $x \neq \pm 1$, cela donne $a = \dfrac{1}{1-x^2}$ et $b = -\dfrac{x^2}{1-x^2}$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ (*le changement de variable $u = xt$ que l'on fera dans la première intégrale ci-dessous exige que x soit strictement positif*), on a alors

$$f'(x) = \frac{x^2}{x^2-1}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2t^2} - \frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2(x^2-1)}(x-1) = \frac{\pi}{2(x+1)}\ .$$

Comme f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors f' est continue et la relation reste vraie pour $x = 0$ et pour $x = 1$. Comme enfin, f' est paire, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \frac{\pi}{2\,(1+|x|)}\ .$$

c. Comme $f(0) = 0$, on déduit (*en discutant suivant le signe de x*)

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\,\ln(1+x) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}\,\ln(1-x) & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}\ .$$

d. L'intégrale I est convergente car la fonction $h : t \mapsto \left(\dfrac{\mathrm{Arctan}(t)}{t}\right)^2$ est continue sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 (avec la valeur 1) et est un $O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$.

Partons de $f(1) = \dfrac{\pi}{2} \ln(2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{Arctan}(t)}{t(1+t^2)} \, \mathrm{d}t$, et intégrons par parties, en remarquant que $\dfrac{\mathrm{Arctan}(t)}{1+t^2}$ est de la forme uu', c'est donc la dérivée de $\dfrac{1}{2} \mathrm{Arctan}(t)^2$:

$$\frac{\pi}{2} \ln(2) = \left[\frac{\mathrm{Arctan}(t)^2}{2} \times \frac{1}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(t)^2}{2} \times \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{2} I \; ,$$

donc $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\dfrac{\mathrm{Arctan}(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \pi \ln(2)$.

Exo 2.a. Si on pose $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, le fait que 0 soit racine simple de P signifie que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$, autrement dit $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$.

b. On a déjà l'inclusion triviale $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2)$.

Soit P un polynôme annulateur de u de la forme $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k X^k$, avec $a_1 \neq 0$. On a donc

$$a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_d u^d = 0 \quad \text{avec} \quad a_1 \neq 0 \; .$$

Si $x \in \mathrm{Ker}(u^2)$, alors $u^2(x) = u^3(x) = \cdots = u^d(x) = 0_E$, puis

$$u(x) = -\frac{1}{a_1} \left(a_2 u^2(x) + \cdots + a_d u^d(x)\right) = 0_E \; ,$$

donc $x \in \mathrm{Ker}(u)$.

On a donc prouvé l'égalité $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.

c. L'inclusion $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$ est triviale.

Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, il existe alors $x \in E$ tel que $u(x) = y$. Comme $P(u) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k u^k = 0$ avec $a_1 \neq 0$, on a en particulier $P(u)(x) = 0_E = a_1 \, y + \displaystyle\sum_{k=2}^{d} a_k u^k(x)$, donc

$$y = -\frac{1}{a_1} \sum_{k=2}^{d} a_k u^k(x) = u^2\left(-\frac{1}{a_1} \sum_{k=2}^{d} a_k u^{k-2}(x)\right) \in \mathrm{Im}(u^2) \; ,$$

ce qui prouve l'inclusion $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u^2)$.

d. Soit $x \in \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$, alors $u(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$. On a donc $u^2(y) = 0_E$, soit $y \in \mathrm{Ker}(u^2)$. La question **b.** montre alors que $y \in \mathrm{Ker}(u)$, donc $x = 0_E$. On a ainsi montré que $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Remarque. Si E est de dimension finie, le théorème du rang permet de montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont supplémentaires dans E.

CCINP 14 (Albert WLODKOWSKI)

Exo 1. Une puce se déplace entre trois points notés A, B, C. À l'instant $t = 0$, elle se trouve au point A. À chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$, elle saute de façon équiprobable, sur l'un des deux points en lesquels elle ne se trouvait pas à l'instant $n - 1$.

Pour tout n entier naturel, on note A_n l'événement "la puce est au point A à l'instant n", et de même on définit les événements B_n et C_n.

On introduit les matrices $I = I_3$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = J - I$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit la matrice-colonne $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$.

a. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.

b. Montrer que M est diagonalisable, donner ses éléments propres. Déduire le calcul de M^n.

c. Expliciter $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$ en fonction de n.

d. Trouver un polynôme annulateur de J. Calculer le reste de la division euclidienne de $(X-1)^n$ par $X(X-3)$. Retrouver ainsi les expressions de $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$ en fonction de n.

Exo 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ et $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

a. Prouver l'existence de R_n pour tout n, et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

b. Soit $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} R_n$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

c. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} w_n$, avec $w_n = (-1)^n \dfrac{S_n}{n}$.

d. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x_n$, avec $x_n = \dfrac{S_n}{n}$.

- -

Exo 1.a. Comme (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n)\, P(A_{n+1}|A_n) + P(B_n)\, P(A_{n+1}|B_n) + P(C_n)\, P(A_{n+1}|C_n) \\ &= \frac{1}{2}\left(P(B_n) + P(C_n)\right). \end{aligned}$$

De la même façon,

$$P(B_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(P(A_n) + P(C_n)\right) \qquad \text{et} \qquad P(C_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(P(A_n) + P(B_n)\right),$$

ce que l'on résume en $U_{n+1} = \dfrac{1}{2} M U_n$.

b. La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle donc diagonalisable. Comme $M+I_3 = J$ est de rang 1, on déduit que le réel -1 est valeur propre de M, le sous-espace propre $E_{-1}(M) = \mathrm{Ker}(J)$ étant de dimension 2, plus précisément $E_{-1}(M)$ est le plan d'équation $x+y+z=0$, ou encore $E_{-1}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

De plus, $\mathrm{tr}(M) = 0$, donc la valeur propre manquante est 2, et $E_2(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Ainsi, la diagonalisation de M s'écrit $M = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(-1,-1,2)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule $P^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout n entier naturel, on a alors $M^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \mathrm{diag}\big((-1)^n, (-1)^n, 2^n\big)$, cela donne

$$M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2 \times (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n + 2 \times (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2 \times (-1)^n \end{pmatrix} .$$

c. Le contexte initial donne $P(A_0) = 1$ et $P(B_0) = P(C_0) = 0$, soit $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, une récurrence immédiate à partir du résultat de la question **a.** donne $U_n = \dfrac{1}{2^n} M^n U_0$. En prenant la première colonne de M^n, et en la divisant par 2^n, on déduit

$$P(A_n) = \frac{2^n + 2 \times (-1)^n}{3 \times 2^n} \ , \quad P(B_n) = P(C_n) = \frac{2^n - (-1)^n}{3 \times 2^n} \ .$$

Le lecteur vérifiera que $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1$, *ce qui le rassurera.*

d. La matrice J est diagonalisable avec pour valeurs propres 0 (double) et 3 (simple), elle admet donc pour polynôme annulateur $X(X-3)$. *C'est son "polynôme minimal", i.e. polynôme non nul unitaire et de degré minimal parmi tous les polynômes annulateurs de* M.

Écrivons la division euclidienne demandée sous la forme **(*):** $(X-1)^n = X(X-3)\,Q + R$ avec $\deg(R) < 2$, soit $R = aX + b$. En évaluant pour $X = 0$, on obtient $b = (-1)^n$. En évaluant pour $X = 3$, on obtient $3a + b = 2^n$, d'où $a = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$. Donc

$$R = \frac{2^n - (-1)^n}{3}\, X + (-1)^n \ .$$

En substituant la matrice J à l'indéterminée X dans la relation polynomiale **(*)**, on obtient

$$M^n = (J - I_3)^n = R(J) = \frac{2^n - (-1)^n}{3}\, J + (-1)^n\, I_3 \ ,$$

ce qui permet de retrouver les expressions de $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$ obtenues plus haut.

Exo 2.a. La suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ tend vers 0 en décroissant, la série $\sum \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ est donc convergente par le théorème spécial des séries alternées. Donc R_n existe comme reste d'ordre n d'une série convergente et R_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

b. Le théorème spécial des séries alternées nous dit aussi que $|R_n| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. On a donc la majoration $|v_n| \leq \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$. Comme $\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{3/2}}$, on déduit par comparaison à une série de Riemann la convergence absolue de la série $\sum v_n$, d'où sa convergence.

c. Posons $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, on a alors $S_n + R_n = S$ pour tout n, donc $S_n = S - R_n$, puis $w_n = S \cdot \dfrac{(-1)^n}{n} - v_n$. Donc la série $\sum w_n$ converge car elle est somme (ou différence) de deux séries convergentes.

d. On a $S < 0$, strictement car $S = -1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + R_2$ avec $R_2 \leq 0$ (toujours d'après le théorème des séries alternées), donc comme S est non nul, on peut écrire $\dfrac{S_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{S}{n}$, et le critère des équivalents s'applique (terme général de signe constant). La série $\sum x_n$ est donc divergente.

CCINP 15 (Olivier CHEN)

Exo 1. On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer $f'(x)$.

b.i. Montrer que $\forall x > 0 \quad 0 \leq f(x) \leq \dfrac{e^{-x}}{x}$.

ii. Montrer que $\forall x > 0 \quad f(x) = -e^{-x}\ \ln(x) + \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\ \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

iii. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ par une intégration par parties.

Exo 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A et $A^\top$ commutent.

a. Montrer que $\mathrm{Ker}(A^\top) = \mathrm{Ker}(A)$.

b. Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$.

- -

Exo 1.a. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable en $+\infty$, une relation de Chasles permet d'écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = \int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Le théorème fondamental de l'analyse permet alors d'affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(x) = -g(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x}$.

b.i. Pour tout $x > 0$, on a

$$0 \leq f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\big[-e^{-t}\big]_x^{+\infty} = \frac{e^{-x}}{x}\ .$$

ii. Immédiat par une hipépé, justifiée par le fait que le terme $e^{-t}\ \ln(t)$ "entre crochets" a une limite finie (nulle) en $+\infty$.

iii. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, intégrable en $+\infty$ d'après **b.i.**, il reste à étudier son comportement en 0.

L'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente: en effet, l'étude en $+\infty$ est immédiate, et au voisinage de 0 on a $e^{-t}\ \ln(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$ et on sait que la fonction ln est intégrable en 0.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{+\infty} e^{-t}\ \ln(t)\,\mathrm{d}t = J \in \mathbb{R}$ et la relation obtenue en **b.ii.** montre alors que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$, d'où l'intégrabilité de f en 0 et finalement sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a envie d'écrire

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \big[t\ f(t)\big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} t\,f'(t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

mais ceci n'est justifié que si le terme entre crochets a des limites finies en 0 et en $+\infty$.

De **b.i.**, on déduit déjà que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t\ f(t) = 0$, et de **b.ii.** on déduit que $\displaystyle\lim_{t\to 0} t\ f(t) = 0$ en utilisant $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. L'intégration par parties est donc légitime, le crochet étant nul, et il reste

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} t\,f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1\ .$$

Exo 2.a. Soit $X \in \mathrm{Ker}(A)$, alors $AX = 0$ puis

$$\|A^\top X\|^2 = (A^\top X)^\top (A^\top X) = X^\top A A^\top X = X^\top A^\top A X = 0\ ,$$

donc $A^\top X = 0$. On a ainsi prouvé l'inclusion $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^\top)$, l'inclusion inverse se prouve de façon similaire.

b. Soit $X \in \mathrm{Ker}(A)\ \cap\ \mathrm{Im}(A)$, on a aussi $X \in \mathrm{Ker}(A^\top)$ d'après **a.** Ainsi, $A^\top X = 0$ et il existe $Y \in \mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X = AY$. De ces deux relations, on tire $A^\top AY = 0$, puis $Y^\top A^\top AY = 0$, soit $\|AY\|^2 = 0$ donc $AY = 0$, c'est-à-dire $X = 0$.

On a ainsi prouvé que $\mathrm{Ker}(A)\ \cap\ \mathrm{Im}(A) = \{0\}$, i.e. ces deux sous-espaces "sont en somme directe".

Par ailleurs, le théorème du rang donne

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)\big) = \dim(\mathrm{Ker}\,A) + \dim(\mathrm{Im}\,A) = \dim(\mathbb{R}^n) = n\ ,$$

les deux sous-espaces sont donc supplémentaires.

CCINP 16 (Wième MATOUSSI)

Exo 1. Soit u un endomorphisme non nul de $E = \mathbb{R}^3$ vérifiant $u^3 = -u$.

a. Montrer que $\mathrm{Im}(u^2 + \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

b. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u)$.

c. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$ et que $\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$.

d. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exo 2.a. Montrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

b. Montrer que $J = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$.

- -

Exo 1.a. C'est une conséquence immédiate de la relation $u^3 + u = 0$, soit $u \circ (u^2 + \mathrm{id}_E) = 0$.

b. Par analyse-synthèse.

- Analyse: soit $x \in E$, supposons $x = y+z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id}_E)$ et $z \in \mathrm{Ker}(u)$. Appliquons u deux fois, on obtient $u(x) = u(y)$, puis $u^2(x) = u^2(y) = -y$. Donc $y = -u^2(x)$ et $z = x + u^2(x)$, ce qui prouve l'uncité de la décomposition du vecteur x.

- Synthèse: soit $x \in E$, posons $y = -u^2(x)$ et $z = x + u^2(x) = (u^2 + \mathrm{id}_E)(x)$. On a bien $y + z = x$, $z \in \mathrm{Im}(u^2 + \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u)$, et enfin

$$(u^2 + \mathrm{id}_E)(y) = -(u^4 + u^2)(x) = (u^3 + u)\big(-u(x)\big) = 0_E ,$$

donc $y \in \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id}_E)$, ce qui prouve l'existence de la décomposition du vecteur x.

c. • L'endomorphisme u admet pour polynôme annulateur $X^3 + X = X(X^2 + 1)$, dont la seule racine réelle est 0, donc $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0\}$ d'après le cours. D'autre part, un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire admet au moins une valeur propre, donc $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$. On a donc $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0_E\}$.

• De la question **b.**, on déduit que, comme u n'est pas l'endomorphisme nul, on a $\mathrm{Ker}(u) \neq E$ donc $\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$.

d. Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(u)$, e_2 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id}_E)$, soit $e_3 = u(e_2)$. On vérifie immédiatement que $e_3 \in \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id}_E)$ et que e_3 n'est pas colinéaire à e_2 (sinon, e_2 serait vecteur propre de u et, la seule valeur propre de u étant 0, on aurait $e_2 \in \mathrm{Ker}(u)$ donc $e_2 = 0_E$ d'après **b.**, ce qui est contradictoire). Comme $e_1 \notin \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ toujours d'après **b.**, on déduit que la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est libre, c'est donc une base de E puisqu'elle est de cardinal 3, et il est immédiat que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$.

Exo 2.a. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{e^x - 1}$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$, puisque $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, et $x^2 f(x) = \dfrac{x^4}{e^x - 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^4 e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc f est intégrable en $+\infty$. Finalement, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'où la convergence de l'intégrale J.

b. Pour $x > 0$, on peut écrire

$$f(x) = \frac{x^2\, e^{-x}}{1 - e^{-x}} = x^2\, e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

en posant $u_n(x) = x^2 e^{-nx}$. Les fonctions u_n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque prolongeables par continuité en 0 et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 u_n(x) = 0$, la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ converge simplement (*par construction*) et a pour somme f. Enfin, une double intégration par parties, que le lecteur se fera un plaisir de détailler, donne

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} |u_n| = \int_{\mathbb{R}_+^*} u_n = \int_0^{+\infty} x^2\, e^{-nx}\, \mathrm{d}x = \frac{2}{n^3} \qquad \text{(sommable)} .$$

Le théorème d'intégration terme à terme permet alors d'affirmer que

$$J = \int_{\mathbb{R}_+^*} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3} .$$

CCINP 17 (Inès AÏT BRAHAM)

Exo 1. Soit $f : \begin{cases} [1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x} + \cos(x)} \end{cases}$.

a. Donner des réels a, b, c, d tels que, au voisinage de $+\infty$, on ait

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sin(x)}\, f(x) = a + b\, u(x) + c\, u(x)^2 + d\, u(x)^3 + o\big(u(x)^3\big) \quad \text{avec} \quad u(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{x}} .$$

b. Étudier les convergences des intégrales suivantes:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}}\, \mathrm{d}x \ ; \quad J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)\ \cos(x)}{\big(\sqrt[3]{x}\big)^2}\, \mathrm{d}x \ ; \quad K = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)\ \cos^2(x)}{x}\, \mathrm{d}x .$$

c. En déduire la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$.

Exo 2. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ des réels distincts. Montrer que

$$\varphi : (P, Q) \mapsto (P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)\, Q(a_k)$$

définit un produit scalaire sur E.

b. Soit $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Préciser sa dimension et son orthogonal.

c. Calculer la distance de X^n à F.

- -

Exo 1.a. Comme $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$, le développement limité $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$ lorsque u tend vers zéro permet d'écrire, lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sin(x)}\ f(x) = \frac{1}{1+u(x)} = 1 - u(x) + u(x)^2 - u(x)^3 + o\big(u(x)^3\big)\ .$$

Cela donne le résultat avec $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$ et $d = -1$.

Remarque. Des esprits grincheux pourront faire remarquer que multiplier $f(x)$ par $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sin(x)}$ n'est pas très rigoureux dans la mesure où le dénominateur $\sin(x)$ s'annule "au voisinage de $+\infty$", en l'occurrence en tous les points de la forme $k\pi$ avec k entier. Pour satisfaire tout le monde, il suffit en fait de remultiplier tout par $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}}$ et d'écrire, lorsque $x \to +\infty$:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}}\ \Big(1 - u(x) + u(x)^2 - u(x)^3 + o\big(u(x)^3\big)\Big)\ .$$

b. Posons $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}}$, $h(x) = \dfrac{\sin(x)\ \cos(x)}{\big(\sqrt[3]{x}\big)^2}$ et $k(x) = \dfrac{\sin(x)\ \cos^2(x)}{x}$.

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, on le voit par une intégration par parties: si $x \in [1, +\infty[$, on a

$$\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \sin(t) \times t^{-1/3}\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{\cos(t)}{\sqrt[3]{t}}\Big]_1^x - \frac{1}{3}\int_1^x \frac{\cos(t)}{t^{\frac{4}{3}}}\,\mathrm{d}t\ .$$

Le terme entre crochets tend vers $\cos(1)$ lorsque x tend vers $+\infty$, et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\frac{4}{3}}}\mathrm{d}t$ est absolument convergente grâce à la majoration $\left|\dfrac{\cos(t)}{t^{\frac{4}{3}}}\right| \leq \dfrac{1}{t^{\frac{4}{3}}}$, les intégrales partielles $\displaystyle\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t$ admettent donc une limite finie lorsque $x \to +\infty$.

On procède de façon similaire pour montrer la convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} k(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque. Ces trois intégrales sont semi-convergentes: en effet, il est connu que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\big|\sin(t)\big|}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge. On en déduit facilement, par comparaison, que les intégrales de $|g|$, $|h|$ et $|k|$ sur $[1, +\infty[$ sont divergentes, autrement dit les fonctions g, h et k ne sont pas intégrables sur $[1, +\infty[$.

c. En posant $l(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}}\ u(x)^3 = \dfrac{\cos^3(x)\ \sin(x)}{x^{\frac{4}{3}}}$, la question **a.** montre que

$$f(x) - \big(g(x) - h(x) + k(x)\big) \underset{x\to+\infty}{\sim} l(x)\ .$$

Or, la majoration de la valeur absolue $\left|l(x)\right| \leq \dfrac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$ montre que la fonction l est intégrable sur $[1,+\infty[$. Par critère des équivalents, la fonction $f-(g-h+k)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, ce qui entraîne la convergence de son intégrale sur $[1,+\infty[$. Enfin, par combinaison linéaire de fonctions d'intégrales convergentes, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Exo 2.a. Bilinéarité et symétrie sont des formalités. On a $(P|P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 \geq 0$ et, si cette somme de réels positifs est nulle, chaque terme est nul ce qui entraîne que P admet au moins $n+1$ racines, donc $P=0$ puisque $\deg(P) \leq n$, on a donc le caractère défini positif.

b. L'application $\lambda : E \to \mathbb{R}$ définie par $\lambda(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)$ est une forme linéaire non nulle sur E (non nulle par exemple car $\lambda(U) = n+1 \neq 0$ si on note U le polynôme constant de valeur 1), donc $F = \mathrm{Ker}(\lambda)$ est un hyperplan de E, i.e. un sous-espace vectoriel de dimension n. Pour tout polynôme $P \in E$, on note que $\lambda(P) = (U|P)$ donc le polynôme constant $U = 1$ est un vecteur normal à l'hyperplan F, donc $F^{\perp} = \mathrm{Vect}(U) = \mathbb{R}_0[X]$.

c. Appliquons les formules du cours:

$$d(X^n, F) = \frac{\left|(U|X^n)\right|}{\|U\|} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k^n \right| .$$

ENSEA

ENSEA 1 (Ilias TALEB)

Exo 1. Pour tout $a \in \mathbb{R}^3$, on définit $f_a : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \ \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto \ x + a \wedge x \end{cases}.$

a. Vérifier que, si a, b, c sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on a

$$a \wedge (b \wedge c) = (a|c)\, b - (a|b)\, c\ .$$

b. Montrer que f_a est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

c. Trouver une CNS pour que f_a soit diagonalisable.

Exo 2.a. Montrer que $\mathrm{Arccos}(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$. **b.** Nature de la série $\sum \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n+3}\right)$.

- -

Exo 1.a. C'est la formule du double produit vectoriel, *cf.* cours. À noter d'ailleurs qu'à ma connaissance, il n'existe pas de démonstration "élégante" de ce résultat.

b. La linéarité de f_a est immédiate, donc f_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Si $x \in \mathrm{Ker}(f_a)$, alors $x + a \wedge x = 0$, puis en faisant le produit scalaire avec x, on obtient $\|x\|^2 = 0$ (puisque $(x|a \wedge x) = [x, a, x] = 0$) donc $x = 0$. On a montré que $\mathrm{Ker}(f_a) = \{0\}$ donc f_a est injectif, donc bijectif car on est en dimension finie.

c. Recherchons les valeurs propres de f_a. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f_a)$, alors il existe x non nul tel que $f(x) = x + a \wedge x = \lambda x$. De nouveau en faisant le produit scalaire avec x, on obtient $\lambda \|x\|^2 = \|x\|^2$ donc $\lambda = 1$. La seule valeur propre possible de f_a est donc 1. Comme un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire a toujours au moins une valeur propre, on déduit que $\mathrm{Sp}(f_a) = \{1\}$.

Comme $f_a(x) = x \iff a \wedge x = 0$, on voit que:

- si $a \neq 0$, alors $E_1(f_a) = \mathrm{Vect}(a)$ est de dimension 1 et, comme c'est le seul sous-espace propre de f_a, l'endomorphisme f_a n'est pas diagonalisable ;

- si $a = 0$, alors $f_a = \mathrm{id}_E$ est évidemment diagonalisable.

2.a. Rappelons que Arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$. Posons $\theta = \mathrm{Arccos}(x)$, alors $x = \cos(\theta)$ et $\theta \in [0, \pi]$. Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} \mathrm{Arccos}(x) = 0$ et que $\theta^2 \underset{\theta\to 0}{\sim} \sin^2(\theta)$, on a

$$\big(\mathrm{Arccos}(x)\big)^2 \underset{x\to 1^-}{\sim} \sin^2\big(\mathrm{Arccos}(x)\big) = 1-\cos^2\big(\mathrm{Arccos}(x)\big) = 1-x^2 = (1-x)(1+x) \underset{x\to 1^-}{\sim} 2(1-x)\ .$$

Comme $\mathrm{Arccos}(x) \geq 0$, on déduit $\mathrm{Arccos}(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$.

b. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+n+1}{n^2+n+3} = 1$ ("par valeurs inférieures", ce qui garantit la bonne définition du terme général de la série), on a

$$\mathrm{Arccos}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\left(1-\frac{n^2+n+1}{n^2+n+3}\right)} = \sqrt{\frac{4}{n^2+n+3}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{4}{n^2}} = \frac{2}{n}\ .$$

Par comparaison à la série harmonique, la série proposée est donc divergente.

ENSEA 2 (Catherine KUCZ)

Exo 1. Soit E un espace euclidien, soient a et b deux vecteurs unitaires de E, non colinéaires. Pour $x \in E$, on pose $f(x) = (a|x)\, b + (b|x)\, a$.

a. Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E.

b. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

c. Calculer $f(a+b)$ et $f(a-b)$. En déduire une diagonalisation de f.

Exo 2. Pour $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \ln(n) \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \ln(n)\ .$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

- -

Exo 1.a. La linéarité de f est immédiate, puis

$$\big(f(x)|y\big) = (a|x)\,(b|y) + (b|x)\,(a|y) = \big(x \mid (a|y)\, b + (b|y)\, a\big) = \big(x|f(y)\big)\ ,$$

donc f est autoadjoint.

b. La famille (a,b) étant libre, la combinaison linéaire $(a|x)\,b+(b|x)\,a$ est nulle si et seulement si les coefficients $(a|x)$ et $(b|x)$ sont tous deux nuls, on en déduit que

$$\mathrm{Ker}(f)=\big(\mathrm{Vect}(a)\big)^{\perp}\ \cap\ \big(\mathrm{Vect}(b)\big)^{\perp}=\big(\mathrm{Vect}(a,b)\big)^{\perp}\ .$$

Si $\dim(E)=n$, on voit que $\mathrm{Ker}(f)$, qui est l'orthogonal d'un plan, est de dimension $n-2$. On a donc $0\in\mathrm{Sp}(f)$ si $n\geq 3$, avec $\dim E_0(f)=n-2$.

c. On calcule

$$f(a+b)=(a|a+b)\,b+(b|a+b)\,a=\big((a|b)+1\big)\cdot(a+b)$$

et, de même, $f(a-b)=\big((a|b)-1\big)\cdot(a-b)$. Les vecteurs $a+b$ et $a-b$ (qui sont non nuls puisque a et b ne sont pas colinéaires) sont donc vecteurs propres de f pour les valeurs propres $(a|b)+1$ et $(a|b)-1$, qui sont distinctes et non nulles. *En effet, comme a et b sont unitaires et non colinéaires, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est stricte donc* $\big|(a|b)\big|<1$.

On a donc trouvé trois sous-espaces propres de f dont la somme des dimensions vaut n, donc f est diagonalisable, et il n'y a pas d'autre valeur propre que celles déjà mentionnées.

Bilan. Les éléments propres de f sont:

- la valeur propre 0, avec $E_0(f)=\big(\mathrm{Vect}(a,b)\big)^{\perp}$ de dimension $n-2$;
- la valeur propre $\lambda=(a|b)+1$ avec $E_\lambda(f)=\mathrm{Vect}(a+b)$ de dimension 1 ;
- la valeur propre $\mu=(a|b)-1$ avec $E_\mu(f)=\mathrm{Vect}(a-b)$ de dimension 1.

2. Déjà $v_n-u_n=\dfrac{2}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Ensuite,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}-\big(\ln(n+1)-\ln(n)\big)\quad\text{et}\quad u_{n+1}-u_n=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\big(\ln(n+1)-\ln(n)\big)\right).$$

De l'encadrement classique

$$\frac{1}{n+1}\leq\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln(n+1)-\ln(n)\leq\frac{1}{n}\ ,$$

on déduit facilement que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante. Les suites sont donc adjacentes.

Remarque. En posant $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, on a $v_n=H_n-\ln(n)$. On a donc montré que cette suite (v_n) admet une limite γ, le lecteur averti (qui en vaut deux) aura reconnu la constante d'Euler.

ENSEA 3 (Olivier CHEN)

Exo 1. Soit $a\in\,]1,+\infty[$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\displaystyle\int_1^a\big(\ln(t)\big)^n\,\mathrm{d}t$.

a. Étudier $f_n:t\mapsto\big(\ln(t)\big)^n$ sur $[1,+\infty[$.

b. Pour quels réels $t\geq 1$ a-t-on $\big|f_n(t)\big|>1$?

c. On suppose $a\neq e$. Étudier la nature de la série $\sum u_n$.

d. On suppose $a=e$. Étudier la nature de la série $\sum u_n$. *On recherchera un équivalent de u_n.*

Exo 2. Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, inversible, telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0_5$ et $\mathrm{tr}(A) = 8$.

a. Montrer que A est diagonalisable.

b. Quelle conséquence chacune des hypothèses suivantes a-t-elle sur les valeurs propres de A ?

i. $A^3 - 3A^2 + 2A = 0_5$;

ii. A est inversible ;

iii. $\mathrm{tr}(A) = 8$.

c. Déterminer $D \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ diagonale telle que A soit semblable à D.

d. Déterminer tous les polynômes annulateurs de A.

- -

Exo 1.a. Si $n = 0$, alors $f_n = f_0$ est constante de valeur 1, et si $n \in \mathbb{N}^*$, alors f_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ avec $f_n(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

b. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|f_n(t)\right| > 1 \iff f_n(t) > 1 \iff t > e$.

c. • Si $1 < a < e$, alors $0 \leq u_n \leq \displaystyle\int_1^a \big(\ln(a)\big)^n \,\mathrm{d}t = a\,\big(\ln(a)\big)^n$, donc la série à termes positifs $\sum u_n$ converge, par comparaison avec une série géométrique de raison $\ln(a) \in\,]0, 1[$.

• Si $a > e$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement puisque

$$u_n \geq \int_e^a \big(\ln(t)\big)^n \,\mathrm{d}t \geq \int_e^a 1 \,\mathrm{d}t = a - e > 0\,.$$

d. Si $a = e$, alors pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \int_1^e \big(\ln(t)\big)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^1 x^n\, e^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 y^{1/n} \exp\left(y^{1/n}\right) \mathrm{d}y$$

en posant $x = \ln(t)$ puis $y = x^n$. Posons $J_n = \displaystyle\int_0^1 y^{1/n} \exp\left(y^{1/n}\right) \mathrm{d}y = \int_0^1 g_n(y) \,\mathrm{d}y$, où l'on introduit $g_n : y \mapsto y^{1/n} \exp\left(y^{1/n}\right)$ sur $[0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction constante de valeur e, et on a la domination

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall y \in [0, 1] \qquad 0 \leq g_n(y) \leq e\,,$$

la fonction constante $y \mapsto e$ étant intégrable sur le segment $[0, 1]$. Par le théorème de convergence dominée, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \displaystyle\int_0^1 e \,\mathrm{d}y = e$, puis que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e}{n}$. La série $\sum u_n$ est donc, dans ce cas, divergente.

Exo 2.a. Le polynôme $P = X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ est scindé à racines simples et il annule A, donc A est diagonalisable.

b.i. Si P annule A, alors $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathcal{Z}(P) = \{0, 1, 2\}$.

ii. Si A est inversible, alors $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$.

iii. Si $\mathrm{tr}(A) = 8$, alors la somme des valeurs propres de A (comptées avec leur multiplicité) vaut 8.

c. On a finalement $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1,2\}$, donc A est semblable à $D = \mathrm{diag}(a,b,c,d,e)$ avec $(a,b,c,d,e) \in \{1,2\}^5$ et $a+b+c+d+e=8$. La diagonale de D comporte donc deux 1 et trois 2, soit par exemple $D = \mathrm{diag}(1,1,2,2,2)$.

d. Les polynômes annulateurs de A sont ceux de D, ce sont donc les multiples du polynôme $Q = (X-1)(X-2)$. *En effet, ce polynôme Q annule D, donc ses multiples sont aussi annulateurs de D. Réciproquement, si un polynôme P annule D, il admet nécessairement comme racines les valeurs propres de D, il est donc multiple de $Q = (X-1)(X-2)$.*