

DIVERS EXERCICES d'ORAL

I. ALGÈBRE GÉNÉRALE (arithmétique, nombres complexes, polynômes)

ALG 1 (CMT).

- a. Soient α et β deux réels tels que $1 + e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 0$.
 Soit le polynôme $P = (X - 1)(X - e^{i\alpha})(X - e^{i\beta})$.
 i. Exprimer les coefficients de P à l'aide de ses racines.
 ii. Montrer que les coefficients de X^2 et de X sont nuls.
 iii. En déduire P .
- b. Soient x, y, z des réels tels que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$.
 i. Montrer que $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$.
 ii. Que dire de $e^{3ix} + e^{3iy} + e^{3iz}$? et de $e^{nix} + e^{niy} + e^{niz}$ pour n entier naturel ?

- a.i. On développe: $P = X^3 - (1 + e^{i\alpha} + e^{i\beta}) X^2 + (e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i(\alpha+\beta)}) X - e^{i(\alpha+\beta)}$.

Plus généralement, si a, b, c sont des nombres complexes,

$$(X - a)(X - b)(X - c) = X^3 - (a + b + c)X^2 + (ab + bc + ca)X - abc.$$

ii. Le coefficient $1 + e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ de X^2 est nul par hypothèse. Puis, en conjuguant, on obtient $1 + e^{-i\alpha} + e^{-i\beta} = 0$. En multipliant ensuite par $e^{i(\alpha+\beta)}$, on obtient $e^{i(\alpha+\beta)} + e^{i\beta} + e^{i\alpha} = 0$, le coefficient de X est donc nul aussi.

iii. En comparant les deux relations écrites dans le b., on obtient $e^{i(\alpha+\beta)} = 1$. On en déduit que $P = X^3 - 1$.

Commentaire. On a ainsi prouvé que $1, e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$ sont les trois racines cubiques de l'unité.

En posant comme d'habitude $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, on a, soit $e^{i\alpha} = j$ et $e^{i\beta} = j^2$, soit l'inverse. On déduit en particulier les relations $e^{3i\alpha} = 1, e^{3i\beta} = 1$, ou encore $e^{i\beta} = (e^{i\alpha})^2$ et $e^{i\alpha} = (e^{i\beta})^2$.

- b.i. Si $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$, si on multiplie par e^{-ix} , alors $1 + e^{i(y-x)} + e^{i(z-x)} = 0$. Du commentaire ci-dessus, on déduit que $e^{i(y-x)} = e^{2i(z-x)}$ et $e^{i(z-x)} = e^{2i(y-x)}$. On a donc aussi la relation $1 + e^{2i(y-x)} + e^{2i(z-x)} = 0$. Enfin, en multipliant par e^{2ix} , il vient $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$.

ii. Du commentaire ci-dessus, on déduit aussi que $e^{3i(y-x)} = e^{3i(z-x)} = 1$, donc

$$1 + e^{3i(y-x)} + e^{3i(z-x)} = 3, \quad \text{puis} \quad e^{3ix} + e^{3iy} + e^{3iz} = 3 e^{3ix},$$

cette dernière expression étant aussi égale à $3 e^{3iy}$ ou à $3 e^{3iz}$ par symétrie des rôles des variables x, y, z , ou bien parce que $e^{3ix} = e^{3iy} = e^{3iz}$ d'après les commentaires ci-dessus.

En réitérant les mêmes méthodes, on obtient

$$e^{nix} + e^{niy} + e^{niz} = \begin{cases} 3 e^{nix} = 3 e^{niy} = 3 e^{niz} & \text{si } n \text{ est multiple de } 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

ALG 2 (CCINP). Montrer que, pour tout n entier naturel, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P_n(X) + P_n(X+1) = 2 X^n.$$

Déterminer le degré de P_n . Montrer la relation $P'_n = n P_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'expression de P_n en fonction des $P_k(0)$, $0 \leq k \leq n$.

Recherchons P_n sous la forme $P_n = a_d X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$. Le polynôme $P_n(X) + P_n(X+1)$ a alors pour terme dominant $2a_d X^d$. Si P_n existe, il a donc nécessairement

pour terme dominant X^n , donc $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$. Par ailleurs, l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto P(X) + P(X+1)$, est un endomorphisme, injectif car elle conserve le degré, donc bijectif puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie. Le polynôme $2X^n$ a donc un unique antécédent par φ , d'où l'existence et l'unicité de P_n , et $\deg(P_n) = n$.

En dérivant la relation $P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P'_n(X) + P'_n(X+1) = 2nX^{n-1}$. Le polynôme $Q = \frac{P'_n}{n}$ vérifie donc $Q(X) + Q(X+1) = 2X^{n-1}$. Par l'unicité obtenue ci-dessus, on déduit que $Q = P_{n-1}$, soit $P'_n = n P_{n-1}$.

Par récurrence immédiate, on obtient $P_n^{(k)} = n(n-1) \cdots (n-k+1) P_{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} P_{n-k}$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Comme P_n est de degré n , la formule de Taylor pour les polynômes donne

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_{n-k}(0) X^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k(0) X^{n-k},$$

la dernière égalité résultant de la symétrie des coefficients binomiaux $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

ALG 3 (CMT). Factoriser, dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $P = X^4 + 1$.

- Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$: on peut utiliser des identités remarquables.

$$X^4 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 - X\sqrt{2} + 1)(X^2 + X\sqrt{2} + 1)$$

et les deux facteurs du second degré obtenus sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

- Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$: on recherche les racines complexes de P , qui sont les racines quatrièmes du nombre $-1 = e^{i\pi}$, à savoir $z^4 = -1 \iff z = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)}$ avec $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$. On a alors

$$P = \left(X - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \left(X - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \left(X - e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \left(X - e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right).$$

NB: Le produit des deux premiers facteurs redonne

$$X^2 - 2X \cos \frac{\pi}{4} + 1 = X^2 - X\sqrt{2} + 1,$$

le produit des deux derniers donne évidemment $X^2 + X\sqrt{2} + 1$ (regroupement des racines complexes conjuguées).

ALG 4 (CCINP). Pour tout n entier naturel, soit le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$. Montrer que le polynôme P_n a toutes ses racines simples.

On constate que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P'_n = P_{n-1}$ (calcul facile) et donc $P_n - P'_n = \frac{X^n}{n!}$. Si P_n admettait une racine multiple $z \in \mathbb{C}$, on aurait $P_n(z) = P'_n(z) = 0$ et, par différence, $\frac{z^n}{n!} = 0$, d'où $z = 0$ mais le nombre 0 n'est jamais racine de P_n donc c'est absurde!

ALG 5 (CMT). Soit $n \geq 2$. Calculer les nombres

$$A = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{i \frac{2k\pi}{n}}\right) \quad \text{puis} \quad B = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}.$$

On a $A = P(1)$, en introduisant le polynôme $P = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{i \frac{2k\pi}{n}}\right)$. Or, on connaît

l'identité polynomiale $\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i \frac{2k\pi}{n}}\right) = X^n - 1$ (les nombres complexes $e^{i \frac{2k\pi}{n}}$, avec $0 \leq k \leq n-1$, sont les racines n -ièmes de l'unité, c'est-à-dire les n racines du polynôme $X^n - 1$ qui est de degré n et unitaire). On en déduit que $X^n - 1 = (X - 1)P(X)$, donc le polynôme P est le quotient exact du polynôme $X^n - 1$ par le polynôme $X - 1$, ce qui donne

$P(X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ (on l'obtient, soit en posant une division euclidienne, soit en utilisant une "identité remarquable" qui est la factorisation de $a^n - b^n$). Ainsi, $A = P(1) = n$.

Considérons les modules des expressions ci-dessus : $A = n$, donc

$$n = |n| = |A| = \left| \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{i \frac{2k\pi}{n}}\right) \right| = \prod_{k=1}^{n-1} \left| 1 - e^{i \frac{2k\pi}{n}} \right|.$$

Mais $1 - e^{i \frac{2k\pi}{n}} = e^{i \frac{k\pi}{n}} \left(e^{-i \frac{k\pi}{n}} - e^{i \frac{k\pi}{n}} \right) = -2i \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \cdot e^{i \frac{k\pi}{n}}$, donc

$$\left| 1 - e^{i \frac{2k\pi}{n}} \right| = 2 \left| \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right| = 2 \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right)$$

puisque, pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$ donc $\sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) > 0$. Finalement,

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(2 \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right) = 2^{n-1} B$$

et $B = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

ALG 6 (CMT).

- a. Montrer que le polynôme $L_n \in \mathbb{R}[X]$ défini par

$$L_n = \frac{d^n}{dX^n} [(X^2 - 1)^n]$$

a toutes ses racines simples, appartenant au segment $[-1, 1]$.

- b. Calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.

- a. Posons $P_n = (X^2 - 1)^n$. Alors P_n est un polynôme de degré $2n$ et $L_n = P_n^{(n)}$. On note que P_n admet deux racines, -1 et 1 , toutes deux de multiplicité n . Considérons ses dérivées successives : le polynôme P'_n admet encore -1 et 1 pour racines, mais à l'ordre $n-1$ et, entre les deux racines de P_n vient s'intercaler (théorème de Rolle) au moins une racine (notons-la $\alpha_1^{(1)}$) du polynôme dérivé P'_n (il est évident que $\alpha_1^{(1)} = 0$ mais cela n'a pas d'importance) : on a donc trouvé $2n-1$ racines (en tenant compte des multiplicités) pour le polynôme P'_n et, comme il est de degré $2n-1$, on a obtenu toutes ses racines.

Continuons, c'est rigolo : le polynôme P''_n a toujours -1 et 1 pour racines mais à l'ordre $n-2$ et, d'après le théorème de Rolle, il admet encore deux racines $\alpha_1^{(2)}$ et $\alpha_2^{(2)}$ telles que $-1 < \alpha_1^{(2)} < \alpha_1^{(1)} < \alpha_2^{(2)} < 1$, ce qui fait $2n-2$ racines avec les multiplicités et il est justement de degré $2n-2$.

Le lecteur courageux pourra rédiger la démonstration par récurrence de la proposition $(\mathcal{P}_k)$, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, que voici :

<<Le polynôme $P_n^{(k)}$ admet -1 et 1 pour racines à l'ordre $n-k$ et il admet aussi k racines simples comprises strictement entre -1 et 1 >>. Je ferai juste un commentaire : les racines de $P_n^{(k)}$ autres que -1 et 1 viennent s'intercaler, par le théorème de Rolle, entre deux racines consécutives du polynôme $P_n^{(k-1)}$. Comme $P_n^{(k)}$ est de degré $2n-k$, on a bien obtenu toutes ses racines. Pour $k=n$, on obtient la réponse à la question posée : le polynôme $L_n = P_n^{(n)}$ n'admet plus -1 et 1 comme racines, mais il a n racines simples dans l'intervalle réel $] -1, 1[$.

- b. Posons $Q = (X-1)^n$ et $R = (X+1)^n$, alors $L_n = (QR)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} Q^{(k)} R^{(n-k)}$ (formule de Leibniz). On a $Q^{(k)}(1) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, il reste donc

$$L_n(1) = \binom{n}{n} Q^{(n)}(1) R(1) = n! 2^n .$$

De même, $L_n(-1) = Q(-1) R^{(n)}(-1) = (-2)^n n!$

ALG 7 (divers). Soient a et b deux entiers naturels non nuls, on note q le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b . Soit n un entier naturel. Déterminer le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1} .

Le quotient recherché est aussi q . En effet, on peut écrire $a-1 = bq + r$, où le reste r vérifie $0 \leq r < b$, i.e. $0 \leq r \leq b-1$. Donc $a = bq + r + 1$ et

$$ab^n - 1 = (bq + r + 1)b^n - 1 = b^{n+1}q + (rb^n + b^n - 1) .$$

Pour conclure, il suffit de montrer que le nombre $r' = rb^n + b^n - 1$ est strictement inférieur à b^{n+1} . Or,

$$0 \leq b^n - 1 \leq rb^n + b^n - 1 \leq (b-1)b^n + b^n - 1 = b^{n+1} - 1 < b^{n+1}.$$

Youpi!

ALG 8 (divers). Soit p un nombre premier.

- a. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ est divisible par p .
- b. Soit n un entier naturel. Montrer que $p \mid n^p - n$.
- c. Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers naturels. Montrer que p divise le nombre

$$N = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^p - \sum_{i=1}^n a_i^p.$$

-
- a. On a la relation $k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1}$. En effet,

$$k \binom{p}{k} = k \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p!}{(k-1)!(p-k)!} = p \frac{(p-1)!}{(k-1)!((p-1)-(k-1))!} = p \binom{p-1}{k-1}.$$

Le facteur premier p est donc présent dans la décomposition en facteurs premiers du nombre entier $k \binom{p}{k}$, mais il n'est pas présent dans celle de l'entier k , c'est donc qu'il divise le coefficient binomial $\binom{p}{k}$.

- b. Par récurrence! C'est évident pour $n = 0$ (et pour $n = 1$). Supposons la propriété vraie pour un entier n donné, et montrons-le pour $n+1$: on écrit

$$(n+1)^p - (n+1) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k - n - 1 = \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k + (n^p - n)$$

et, d'après le **a.** et l'hypothèse de récurrence, tous les termes de cette somme sont divisibles par p .

- c. Encore par récurrence sur n . Pour $n = 1$, on a $N = 0$ donc c'est trivial. Si l'on suppose que c'est vrai pour un n donné, considérons $N = \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i \right)^p - \sum_{i=1}^{n+1} a_i^p$. Alors

$$N = \left(\sum_{i=1}^n a_i + a_{n+1} \right)^p - \sum_{i=1}^n a_i^p - a_{n+1}^p = \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^p - \sum_{i=1}^n a_i^p \right] + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^k a_{n+1}^{p-k}$$

et, d'après le **a.** et l'hypothèse de récurrence, chaque terme de cette dernière somme est encore divisible par p .

ALG 9 (CMT). Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$.

- a. Montrer que le polynôme P' est scindé sur $\mathbb{R}$.
- b. Montrer que le polynôme $Q = P + P'$ est scindé sur $\mathbb{R}$. On pourra considérer la fonction $f : x \mapsto e^x P(x)$.

- a. Soit n le degré de P . Puisque P est scindé sur $\mathbb{R}$, il admet n racines (comptées avec leurs ordres de multiplicité), notons donc $x_1, \dots, x_p$ les racines distinctes de P ordonnées dans l'ordre croissant ($x_1 < x_2 < \dots < x_p$) et $m_1, \dots, m_p$ leurs multiplicités respectives.

On a alors $P = \lambda \prod_{i=1}^p (X - x_i)^{m_i}$, où λ est le coefficient dominant de P . Par ailleurs,

$$n = \deg(P) = \sum_{i=1}^p m_i. \text{ Chaque racine multiple } x_i \text{ de } P \text{ (c'est-à-dire de multiplicité } m_i \geq 2)$$

est racine de P' avec une multiplicité $m_i - 1$. Les racines simples de P (cas $m_i = 1$) ne sont pas racines de P' (on peut donc considérer qu'elles sont "racines de P' avec une multiplicité

nulle"). Le polynôme P' admet donc $\sum_{i=1}^p (m_i - 1) = n - p$ racines (comptées avec leurs

multiplicités) dans l'ensemble $\{x_1, \dots, x_p\}$ des racines de P . Enfin, il résulte du théorème de Rolle que, entre deux racines consécutives de P , il y a au moins une racine de P' : pour tout $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, il existe $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(c_i) = 0$, cela nous donne $p-1$ racines de P' n'appartenant pas à l'ensemble des racines de P ; on a donc obtenu au moins $(n-p) + (p-1) = n-1$ racines pour le polynôme P' (comptées avec leurs multiplicités). Comme P' est de degré $n-1$, cela prouve que P' est scindé sur $\mathbb{R}$ (et qu'il n'a pas d'autres racines que celles déjà mentionnées).

- b. La fonction f admet pour dérivée $f'(x) = e^x Q(x)$. Reprenons les notations de la question précédente. Si x_i est racine d'ordre $m_i \geq 2$ de P , alors les polynômes P et P' sont tous deux multiples de $(X - x_i)^{m_i-1}$, donc il en est de même de $Q = P + P'$ qui admet donc déjà

$$\sum_{i=1}^p (m_i - 1) = n - p \text{ racines (comptées avec leurs multiplicités) parmi les racines de } P. \text{ En-}$$

suite, pour tout $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, la fonction dérivable f s'annule en x_i et en x_{i+1} , donc la dérivée f' s'annule en au moins un point intermédiaire $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ d'après le théorème de Rolle, et (puisque une exponentielle ne s'annule jamais) les c_i sont aussi racines du polynôme Q . Toujours en tenant compte des multiplicités, on a trouvé au moins $(n-p) + (p-1) = n-1$ racines réelles pour le polynôme $Q = P + P'$. Mais ce polynôme est de degré n , il en manque donc encore une. On a $f(x_1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ (*croissance comparée des*

fonctions polynômes et exponentielles), donc la dérivée f' s'annule en au moins un point $c \in]-\infty, x_1[$ (c'est une classique "extension à l'infini" du théorème de Rolle dont je laisse la démonstration à l'improbable lecteur), on a donc le bon compte de racines pour affirmer que Q est scindé sur $\mathbb{R}$.

ALG 10 (CMT). Soit (z_n) une suite de nombres complexes, déterminée par la donnée de $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et de la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|).$$

- a. Donner le module et l'argument de z_{n+1} en fonction de ceux de z_n .
- b. Construire géométriquement z_{n+1} en fonction de z_n .
- c. Convergence et limite de la suite (z_n) .

- a. Notons d'abord que z_n n'est jamais un réel négatif puisque, si $z_{n+1} \in \mathbb{R}_-$ pour un entier n donné, alors on peut écrire $z_n + |z_n| = -a$ avec $a \in \mathbb{R}_+$, soit $z_n = -(|z_n| + a)$, mézalor $|z_n| = |z_n| + a$ et donc $a = 0$, puis $z_n = -|z_n|$ donc z_n est lui-même un réel négatif. Comme on initialise avec $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a donc $z_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ pour tout n .

Chaque z_n peut donc s'écrire de façon unique sous la forme $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ avec $r_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_n \in]-\pi, \pi[$. On a alors

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}r_n(1 + e^{i\theta_n}) = r_n e^{i\frac{\theta_n}{2}} \frac{e^{i\frac{\theta_n}{2}} + e^{-i\frac{\theta_n}{2}}}{2} = \left(r_n \cos \frac{\theta_n}{2}\right) e^{i\frac{\theta_n}{2}}.$$

Comme $\frac{\theta_n}{2} \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on a $r_n \cos \frac{\theta_n}{2} > 0$, ce qui permet d'affirmer que

$$r_{n+1} = r_n \cos \frac{\theta_n}{2} \quad \text{et} \quad \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}.$$

- b. Notons M_n le point d'affixe z_n . Le cercle de centre O passant par M_n coupe le demi-axe Ox (réels positifs) en le point B_n d'affixe $|z_n|$; alors M_{n+1} est le milieu du segment $[M_n B_n]$.
- c. On a immédiatement $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$ pour tout n . Ensuite,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad r_n = r_0 \prod_{k=0}^{n-1} \cos \left(\frac{\theta_k}{2} \right) = r_0 \prod_{k=1}^n \cos \left(\frac{\theta_0}{2^k} \right).$$

La formule $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ permet de simplifier ce produit. En effet, en supposant d'abord que $\theta_0 \neq 0$, on a

$$r_n = r_0 \prod_{k=1}^n \frac{\sin \frac{\theta_0}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{\theta_0}{2^k}} = \frac{r_0}{2^n} \frac{\sin(\theta_0)}{\sin \frac{\theta_0}{2^n}}.$$

(produit "télescopique"). En utilisant $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = r_0 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0}$, et

bien sûr, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = 0$, donc la suite complexe (z_n) converge vers le réel positif $r_0 \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0}$.

Dans le cas où $\theta_0 = 0$, alors z_0 est un réel positif et la suite (z_n) est constante.

II. ALGÈBRE LINÉAIRE et RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

LIN 1 (CCINP). Soit $A = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

- Quelles sont les valeurs propres de A ?
- En utilisant des vecteurs de $\mathbb{R}^{2n}$ écrits sous la forme $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ avec $U \in \mathbb{R}^n$ et $V \in \mathbb{R}^n$, caractériser les sous-espaces propres de A et donner leurs dimensions.
- La matrice A est-elle diagonalisable ?

- A est triangulaire supérieure, on voit immédiatement que $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$, ou encore que $\chi_A = X^n(X-1)^n$, les deux valeurs propres sont de multiplicité n .
- Si $X = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$, alors $AX = \begin{pmatrix} U+V \\ 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que
 - $\text{Ker}(A) = E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} U \\ -U \end{pmatrix} ; U \in \mathbb{R}^n \right\} = \text{Vect}(E_1 - E_{n+1}, E_2 - E_{n+2}, \dots, E_n - E_{2n})$, en notant $(E_1, \dots, E_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$.
 - On a $AX = X \iff V = 0$, donc $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix} ; U \in \mathbb{R}^n \right\} = \text{Vect}(E_1, \dots, E_n)$.
- Donc $\dim E_0(A) = \dim E_1(A) = n$, et la matrice A est diagonalisable.

LIN 2 (CCINP). Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Calculer le polynôme caractéristique χ_M .

À quelle condition sur ce polynôme χ_M la matrice M est-elle diagonalisable ?

$$\chi_M = X^3 - cX^2 - bX - a. \text{ Si } \lambda \text{ est un scalaire, la matrice } M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ a & b & c - \lambda \end{pmatrix}$$

est de rang au moins 2 puisque, vu l'échelonnement, ses deux dernières colonnes sont indépendantes. Par le théorème du rang, on déduit que $\text{Ker}(M - \lambda I_3)$ est de dimension au plus 1, les sous-espaces propres de M sont donc des droites vectorielles. La matrice M est donc diagonalisable si et seulement si elle admet trois valeurs propres distinctes, i.e. **ssi** (on est sur $\mathbb{C}$) son polynôme caractéristique χ_M est à racines simples.

LIN 3 (CCINP). Calculer le déterminant d'ordre $n + 1$:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 \end{vmatrix}.$$

La somme des coefficients de chaque ligne vaut $s = \sum_{i=1}^n a_i$. En effectuant l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 + \sum_{i=2}^{n+1} C_i$, on obtient

$$D = \begin{vmatrix} s & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ s & 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ s & a_2 & \cdots & a_n & 0 \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Effectuons maintenant les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$ ($2 \leq i \leq n + 1$):

$$D = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & * & \cdots & * & -a_n \end{vmatrix}.$$

Enfin, un développement par rapport à la première colonne nous ramène à une matrice triangulaire inférieure, donc

$$D = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\prod_{i=1}^n (-a_i) \right) = (-1)^n \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\prod_{i=1}^n a_i \right).$$

LIN 4 (CMT). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice donnée.

On considère l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad f(M) = AM$.

- Montrer que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Calculer $\text{tr}(f)$.

a. Bon, c'est une formalité!

b. Utilisons la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La trace de l'endomorphisme f est la trace de la matrice de f dans cette base. Nous n'allons pas construire cette matrice, qui est de format $n^2 \times n^2$, l'essentiel est de comprendre que la trace de f est la somme, sur tous les couples $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, des coefficients d'indices (i,j) de la matrice $f(E_{i,j})$, soit

$\text{Tr}(f) = \sum_{i,j} (A E_{i,j})_{i,j}$. Or, pour tout couple $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $(E_{i,j})_{k,l} = \delta_{(i,j),(k,l)} = \delta_{i,k} \delta_{j,l}$, puis

$$(A E_{i,j})_{k,l} = \sum_{m=1}^n A_{k,m} (E_{i,j})_{m,l} = \sum_{m=1}^n A_{k,m} \delta_{i,m} \delta_{j,l} = A_{k,i} \delta_{j,l}.$$

Donc $(A E_{i,j})_{i,j} = \delta_{j,j} A_{i,i} = A_{i,i}$, puis

$$\text{Tr}(f) = \sum_{i,j} A_{i,i} = n \sum_{i=1}^n A_{i,i} = n \text{Tr}(A).$$

LIN 5 (CCINP). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = A + I_n$. Montrer que A est diagonalisable sur le corps des complexes, en déduire que $\det A > 0$.

On étudie $f : x \mapsto x^3 - x - 1$ sur $\mathbb{R}$, on a $f'(x) = 3x^2 - 1$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$, strictement décroissante sur $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, puis strictement croissante sur $[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$. Comme $f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} < 0$, on déduit que f s'annule en un seul réel a , appartenant à l'intervalle $[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$.

Le polynôme $P = X^3 - X - 1$ est annulateur de la matrice A , et ce polynôme est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$: en effet, il admet une seule racine réelle a , et donc deux autres racines non réelles, qui sont complexes conjuguées (notons-les β et $\bar{\beta}$), et qui sont donc nécessairement distinctes. Donc la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

On a alors $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{a, \beta, \bar{\beta}\}$. De plus, les valeurs propres β et $\bar{\beta}$ ont la même multiplicité (car A est à coefficients réels, donc le polynôme caractéristique est aussi à coefficients réels). En notant r la multiplicité de la valeur propre a , et s celle de β , on a alors

$$\det(A) = a^r \beta^s (\bar{\beta})^s = a^r |\beta|^{2s} \in \mathbb{R}_+^*$$

puisque $a > 0$ et $\beta \neq 0$.

LIN 6 (ENSEA). Dans $E = \mathbb{R}^3$, soient P_1 et P_2 deux plans vectoriels distincts. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f(P_1) \subset P_1$ et $f(P_2) \subset P_2$.

Montrer qu'il existe des vecteurs $x_1 \in P_1$, $x_2 \in P_2$ et $x \in P_1 \cap P_2$ tels que

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(x) \oplus \text{Vect}(x_1) \oplus \text{Vect}(x_2).$$

Montrer que $\text{Vect}(x)$ est stable par f . Donner la forme de la matrice représentative de f dans la base (x, x_1, x_2) .

Par la formule de Grassmann, $\dim(P_1 \cap P_2) = \dim(P_1) + \dim(P_2) - \dim(P_1 + P_2)$. Or, $P_1 + P_2$ est un s.e.v. de E contenant strictement le plan P_1 , c'est donc l'espace E tout entier. Ainsi, $P_1 \cap P_2$ est une droite vectorielle D . Si x est un vecteur non nul de D , la famille

libre (x) peut être complétée en une base (x, x_1) de P_1 , et aussi en une base (x, x_2) de P_2 . On a alors $x_1 \in P_1$, $x_2 \in P_2$, $x \in P_1 \cap P_2$ et $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(x) \oplus \text{Vect}(x_1) \oplus \text{Vect}(x_2)$.

Comme P_1 et P_2 sont stables par f , alors $\text{Vect}(x) = P_1 \cap P_2$ l'est aussi.

La matrice de f dans la base (x, x_1, x_2) de $\mathbb{R}^3$ est de la forme $\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$.

LIN 7 (CMT). Soit la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis par récurrence pour $n \geq 2$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & -A_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout n , la matrice A_n est diagonalisable, et préciser ses valeurs propres.

Commençons par diagonaliser A_1 , je passe les détails de calculs, on obtient $A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$, avec par exemple $P_1 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $P_1^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ -1 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$. Observons maintenant que, pour tout n , la matrice A_n est d'ordre 2^n , on a obtenu pour A_1 le résultat : $A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$, soit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ -1 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}.$$

En refaisant le même calcul avec des blocs d'ordre 2^n , on obtient

$$\begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & -A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})I_{2^n} & (1-\sqrt{2})I_{2^n} \\ I_{2^n} & I_{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}A_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}A_n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_{2^n} & (\sqrt{2}-1)I_{2^n} \\ -I_{2^n} & (\sqrt{2}+1)I_{2^n} \end{pmatrix},$$

les matrices $\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_{2^n} & (\sqrt{2}-1)I_{2^n} \\ -I_{2^n} & (\sqrt{2}+1)I_{2^n} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})I_{2^n} & (1-\sqrt{2})I_{2^n} \\ I_{2^n} & I_{2^n} \end{pmatrix}$ étant inverses l'une de l'autre. Autrement dit, la matrice $A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & -A_n \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice diagonale par blocs $D_{n+1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}A_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}A_n \end{pmatrix}$. Si A_n est supposée diagonalisable : $A_n = P_n D_n P_n^{-1}$, alors D_{n+1} sera aussi diagonalisable puisqu'alors

$$D_{n+1} = \begin{pmatrix} P_n & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}D_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}D_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_n^{-1} & 0 \\ 0 & P_n^{-1} \end{pmatrix},$$

la matrice du milieu étant diagonale. Donc A_{n+1} sera aussi diagonalisable puisque semblable à une matrice diagonalisable.

On obtient donc par récurrence que la matrice A_n est diagonalisable pour tout n , ses valeurs propres étant $(\sqrt{2})^n$ et $-(\sqrt{2})^n$, chacune ayant pour multiplicité 2^{n-1} .

LIN 8 (CCINP). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Quel est le rang de A ? Quelle est la dimension de $\text{Ker}(A)$?
- La matrice A est-elle diagonalisable ?
- Quelle est la multiplicité de la valeur propre 0 ?
- Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 1$ tel que $\text{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$.
- Trouver un polynôme annulateur de A , de degré trois.

- Visiblement, $\text{rg}(A) = 2$. Par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A)) = n - 2$.
- La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable.
- Comme A est diagonalisable, la multiplicité de la valeur propre est aussi la dimension du sous-espace propre. Or, $E_0(A) = \text{Ker}(A)$ est de dimension $n - 2$, donc $m_0 = n - 2$.
- Notons α et β les deux valeurs propres non nulles de A (réelles, mais non nécessairement distinctes). Comme A est diagonalisable ("*trigonalisable*" suffit), la trace est égale à la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité. On a donc $(n - 2) \times 0 + \alpha + \beta = 1$, soit $\alpha + \beta = 1$. Les valeurs propres α et β sont distinctes, car sinon le sous-espace propre associé à la valeur propre double α serait de dimension deux, mais cela contredit le fait que la matrice $A - \alpha I_n$ (*la représenter!*) est visiblement de rang au moins $n - 1$ puisqu'on peut en extraire la matrice $-\alpha I_{n-1}$ avec $\alpha \neq 0$. L'une des deux, notons-la λ , est alors strictement supérieure à 1, et l'autre est alors $1 - \lambda$. *Y a-t-il des arguments plus simples ?*
- Comme A est diagonalisable, elle admet pour polynôme annulateur

$$P = \prod_{\alpha \in \text{Sp}(A)} (X - \alpha) = X(X - \lambda)(X - 1 + \lambda) = X^3 - X^2 + \lambda(1 - \lambda)X.$$

Faut-il expliciter plus ? C'est possible, par exemple en calculant la trace de A^2 , qui vaut $2 \sum_{k=1}^n k^2 - 1$, mais qui vaut aussi $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2 + (1 - \lambda)^2 = 1 - 2\lambda(1 - \lambda)$, mais le calcul me semble moche.

LIN 9 (CMT). Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & -5 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Préciser le rang de A , son noyau. Soit $B = E_{1,3} =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$, et expliciter une telle matrice P .

• Il est immédiat que $\text{rg}(A) = 1$ (les trois colonnes sont proportionnelles), et que $\text{Ker}(A)$ est le plan d'équation cartésienne $3x - 2y + 5z = 0$. On peut aussi écrire, par exemple,

$$\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

• Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A . On a donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = A$, où $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On cherche à construire une base

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = B$, i.e. telle que
$$\begin{cases} f(e_1) = 0 & \textbf{(1)} \\ f(e_2) = 0 & \textbf{(2)} \\ f(e_3) = e_1 & \textbf{(3)} \end{cases}.$$
 D'après **(3)**, le vecteur e_1 doit appartenir à $\text{Im}(f)$ qui est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (les colonnes de A sont toutes colinéaires à ce vecteur), choisissons donc

pour e_1 ce vecteur. Le vecteur e_3 doit être un antécédent de e_1 , et le vecteur $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

convient alors (il suffit de trouver un triplet (x, y, z) tels que $3x - 2y + 5z = 1$). On vérifie au passage que l'on a bien $f(e_1) = 0$ (équation **(1)**), mais ceci est conséquence du fait que $A^2 = 0$, donc $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$. On cherche enfin un vecteur e_2 appartenant aussi à

$\text{Ker}(f)$, mais non colinéaire à e_1 , par exemple $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. On vérifie rapidement que la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ (par exemple en calculant un déterminant),

on a bien alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = B$. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base

canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$. Le cours sur les changements de base indique que l'on a la relation $A = PBP^{-1}$, ou encore $B = P^{-1}AP$.

LIN 10 (CMT). Soit $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$, de rang $2n$, telle que $A^3 + A = 0$. Montrer que A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice A admet pour polynôme annulateur $F = X^3 + X = X(X + i)(X - i)$. Ce polynôme F étant scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ avec $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset Z(F) = \{0, i, -i\}$. Comme $\text{rg}(A) = 2n$, on sait que 0 est valeur propre et que le sous-espace propre associé, soit $\text{Ker}(A)$, est de dimension 1. D'autre part, la matrice (et son polynôme caractéristique) étant à coefficients réels, les valeurs propres conjuguées i et $-i$ ont la même multiplicité (qui est aussi la dimension des sous-espaces propres puisque A est diagonalisable). Enfin, comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est $2n + 1$, on a donc $\dim E_i(A) = \dim E_{-i}(A) = n$.

Soit $U \in \mathbb{C}^{2n+1}$ un vecteur propre pour la valeur propre 0. Soit $(Z_1, \dots, Z_n)$ une base du sous-espace propre $E_i(A)$. Comme la matrice A est réelle, en conjuguant les relations $A Z_k = i Z_k$, $1 \leq k \leq n$, on obtient $A \overline{Z_k} = -i \overline{Z_k}$. Il est évident que la famille $(\overline{Z_1}, \dots, \overline{Z_n})$ est libre dans $\mathbb{C}^{2n+1}$ et qu'elle constitue alors une base du sous-espace propre $E_{-i}(A)$. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $X_k = \frac{1}{2} (Z_k + \overline{Z_k})$ et $Y_k = \frac{1}{2i} (Z_k - \overline{Z_k})$, alors ces vecteurs sont à coordonnées réelles, autrement dit appartiennent à $\mathbb{R}^{2n+1}$, et on vérifie que $AX_k = -Y_k$ et $AY_k = X_k$. Par ailleurs, le vecteur U vérifie aussi $A \overline{U} = 0$ donc les vecteurs $V_1 = \operatorname{Re}(U) = \frac{1}{2} (U + \overline{U})$ et $V_2 = \operatorname{Im}(U) = \frac{1}{2i} (U - \overline{U})$ sont aussi dans le noyau et l'un des deux au moins (notons-le V) est non nul et dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. Il ne reste plus qu'à montrer (*c'est une formalité*) que la famille $\mathcal{B} = (V, Y_1, \dots, Y_n, X_1, \dots, X_n)$ est libre dans $\mathbb{R}^{2n+1}$, donc qu'elle en constitue une base, et que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ canoniquement associé à la matrice A admet pour matrice, relativement à la base $\mathcal{B}$, la matrice B proposée par l'énoncé, donc A et B sont semblables (avec une matrice de passage réelle).

LIN 11 (ENSEA). Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $f(M) = M + \operatorname{tr}(M) I_n$ pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- a. Montrer que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- b. Déterminer le noyau de f , son rang. L'endomorphisme f est-il bijectif ?
- c. Prouver la relation $f^2 - (n+2)f + (n+1)\operatorname{id} = 0$.
- d. Déterminer la réciproque f^{-1} de f .

- a. Facile (résulte de la linéarité de la trace).
- b. Notons que, si une matrice M appartient au noyau de f , alors M est colinéaire à I_n , on en déduit l'inclusion $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Vect}(I_n)$. Par ailleurs, $f(I_n) = (n+1)I_n \neq 0$. On en déduit que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, donc f est injectif, donc bijectif (dimension finie), c'est un automorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors bien sûr, $\operatorname{rg}(f) = \dim(E) = n^2$.
- c. On calcule

$$\begin{aligned}
 f^2(M) &= f(M + \operatorname{Tr}(M) I_n) \\
 &= f(M) + \operatorname{Tr}(M) f(I_n) \quad \text{par linéarité de } f \\
 &= M + \operatorname{Tr}(M) I_n + (n+1) \operatorname{Tr}(M) I_n \\
 &= M + (n+2) \operatorname{Tr}(M) I_n \\
 &= (n+2) (M + \operatorname{Tr}(M) I_n) - (n+1) M \\
 &= (n+2) f(M) - (n+1) M.
 \end{aligned}$$

On a bien obtenu la relation $f^2 - (n+2)f + (n+1)\operatorname{Id} = 0$. Dit autrement, on a obtenu un polynôme annulateur de degré 2.

- d. La relation ci-dessus peut s'écrire $f \circ (f - (n+2)\operatorname{Id}) = -(n+1)\operatorname{Id}$, et ces deux endomorphismes commutent, on en déduit que $f^{-1} = \frac{1}{n+1} ((n+2)\operatorname{Id} - f)$, ce qui peut s'écrire $f^{-1}(M) = M - \frac{\operatorname{Tr}(M)}{n+1} I_n$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

LIN 12 (CMT). Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n . Montrer l'équivalence entre

(a) : $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$

(b) : il existe $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathcal{B}$ base de E et $A \in \text{GL}_r(\mathbb{R})$ tels que $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Supposons d'abord (b), notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base de E dans laquelle u est représenté par la matrice par blocs proposée. Comme A est supposée inversible de taille r , il est clair que $\text{rg}(A) = r$, donc $\text{rg}(u) = r$, puis que $\text{Im}(u) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$, et aussi que $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$. On a bien $E = \text{Im } u \oplus \text{Ker } u$.

Supposons maintenant (a). Posons $r = \text{rg}(u) = \dim(\text{Im } u)$. Comme $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont supplémentaires dans E , on peut construire une base de E en concaténant une base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\text{Im } u$ et une base $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\text{Ker } u$. Comme $\text{Im } u$ est stable par u , la matrice de u dans une telle base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$ est bien de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Enfin, la matrice A représente, dans la base $(e_1, \dots, e_r)$, l'endomorphisme v de $\text{Im } u$ induit par u . Cet endomorphisme v est en fait un automorphisme puisque $\text{Ker } v = \text{Ker } u \cap \text{Im } u = \{0\}$, donc v est injectif puis bijectif (endomorphisme en dimension finie), on en déduit que la matrice A est inversible, ce qui démontre (b).

LIN 13 (CCINP). Soit E un espace vectoriel de dimension n , soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. On note $\mathcal{C}(p)$ l'ensemble des endomorphismes u de E qui commutent avec p ($p \circ u = u \circ p$).

- a. Montrer que $u \in \mathcal{C}(p)$ si et seulement si $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par u .
- b. Montrer que $\mathcal{C}(p)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et préciser sa dimension en fonction du rang r du projecteur p .

- a. L'implication directe est du cours: lorsque deux endomorphismes commutent, le noyau, l'image (et aussi les sous-espaces propres) de l'un sont stables par l'autre.

Supposons $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ stables par u . On sait que $\text{Im } p \oplus \text{Ker } p = E$ puisque p est un projecteur. Soit donc un vecteur x de E , décomposons-le en $x = y + z$ avec $y = p(x) \in \text{Im } p$ et $z \in \text{Ker } p$. Alors $(u \circ p)(x) = u(p(x)) = u(y)$, tandis que $u(x) = u(y) + u(z)$ avec $u(y) \in \text{Im } p$ et $u(z) \in \text{Ker } p$ (puisque ces deux sous-espaces sont stables par u), donc $(p \circ u)(x) = p(u(x)) = p(u(y)) = u(y)$ puisque tout vecteur appartenant à l'image d'un projecteur est invariant par ce projecteur. On a ainsi prouvé que $u \circ p = p \circ u$. D'où l'équivalence entre les deux assertions.

- b. L'ensemble $\mathcal{C}(p)$ est non vide et est stable par combinaisons linéaires (pure formalité!), c'est donc un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à la décomposition en somme directe $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$, alors un endomorphisme u de E laisse stables les s.e.v. $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ si et seulement si sa matrice, relativement à la base $\mathcal{B}$, est diagonale par blocs, de la forme $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. Pour construire une telle

matrice, il faut “renseigner” $r^2 + (n - r)^2$ coefficients indéterminés (on peut appeler cela le nombre de “degrés de liberté”), l’ensemble des matrices diagonales par blocs de la forme ci-dessus est donc de dimension $r^2 + (n - r)^2$. L’espace vectoriel $\mathcal{C}(p)$, qui est isomorphe à l’espace vectoriel des matrices associées dans une base $\mathcal{B}$ déterminée, est donc aussi de dimension $r^2 + (n - r)^2$.

LIN 14 (CMT). Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, admettant les réels $-2, 2$ et 4 comme valeurs propres. Soit φ l’endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad \varphi(M) = AMA.$$

- a. Montrer qu’un réel λ est valeur propre de φ **si et seulement si** il existe une matrice $M' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, non nulle, telle que $DM'D = \lambda M'$, où D est la matrice diagonale $D = \text{diag}(-2, 2, 4)$.
- b. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ .
- c. L’endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

- a. A est diagonalisable: $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$, alors $\varphi(M) = PDP^{-1}MPDP^{-1}$, puis

$$\varphi(M) = \lambda M \iff PDP^{-1}MPDP^{-1} = \lambda M \iff DP^{-1}MPD = \lambda P^{-1}MP \iff DM'D = \lambda M'$$

avec $M' = P^{-1}MP$. L’existence d’une matrice M non nulle telle que $\varphi(M) = \lambda M$ (traduisant le fait que λ est valeur propre de φ) est alors équivalente à l’existence de M' non nulle telle que $DM'D = \lambda M'$.

- b. Étudions alors l’endomorphisme $\psi : M \mapsto MDM$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On voit facilement que, si $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, alors $\psi(M) = \begin{pmatrix} 4a & -4b & 8c \\ -4d & 4e & -8f \\ 8g & -8h & 16i \end{pmatrix}$. Un réel λ est valeur propre de ψ si et seulement si il existe $(a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in \mathbb{R}^9$, **non nul**, tel que

$$(4 - \lambda)a = (-4 - \lambda)b = (8 - \lambda)c = (-4 - \lambda)d = (4 - \lambda)e = (-8 - \lambda)f = (8 - \lambda)g = (-8 - \lambda)h = (16 - \lambda)i = 0,$$

donc $\text{Sp}(\psi) = \{-8, -4, 4, 8, 16\}$. En discutant les équations ci-dessus pour les différentes valeurs de λ obtenues, on obtient $E_{-8}(\psi) = \text{Vect}(E_{2,3}, E_{3,2})$, $E_{-4}(\psi) = \text{Vect}(E_{1,2}, E_{2,1})$, $E_4(\psi) = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2})$, $E_8(\psi) = \text{Vect}(E_{1,3}, E_{3,1})$, et $E_{16}(\psi) = \text{Vect}(E_{3,3})$.

De la question **a.**, on déduit que $\text{Sp}(\varphi) = \text{Sp}(\psi)$ et que, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(\varphi)$, le sous-espace propre $E_\lambda(\varphi)$ est l’image de $E_\lambda(\psi)$ par l’application $M \mapsto PMP^{-1}$.

- c. L’application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un isomorphisme de l’espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle conserve donc les dimensions. L’endomorphisme φ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet donc, tout comme ψ , quatre sous-espaces propres de dimension 2 et un de dimension 1. La somme des dimensions des SEP de φ vaut 9, soit la dimension de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donc φ est diagonalisable.

LIN 15 (Centrale). Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui commutent, avec B nilpotente. Montrer que $\det(I_n + B) = 1$, puis que $\det(A + B) = \det(A)$.

• La matrice B admet un polynôme annulateur de la forme $P = X^k$, on a donc $\text{Sp}(B) \subset \mathcal{Z}(P) = \{0\}$, puis $\text{Sp}(B) = \{0\}$ puisque B ne peut être inversible. Comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, elle est trigonalisable, avec 0 comme seule valeur propre, donc $B = PTP^{-1}$, où P est inversible et T est triangulaire avec une diagonale de zéros. Ensuite, $I_n + B = P(I_n + T)P^{-1}$, et $I_n + T$ est triangulaire avec des coefficients 1 sur la diagonale. Donc $\det(I_n + B) = \det(I_n + T) = 1$.

• Supposons d'abord A inversible. Comme B commute avec A , elle commute aussi avec A^{-1} (*facile*), donc la matrice $A^{-1}B$ est nilpotente: *en effet, soit k un entier tel que $B^k = 0$, alors $(A^{-1}B)^k = (A^{-1})^k B^k = 0$* . On a donc $\det(I_n + A^{-1}B) = 1$, puis

$$\det(A + B) = \det(A(I_n + A^{-1}B)) = \det(A) \cdot \det(I_n + A^{-1}B) = \det(A).$$

• Soit A quelconque. Si B commute avec A , elle commute aussi avec $A - \lambda I_n$ pour tout λ complexe (*facile*). Pour tout λ tel que $A - \lambda I_n$ soit inversible, on déduit de ce qui précède que $\det(A - \lambda I_n + B) = \det(A - \lambda I_n)$. Or, l'application

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n + B) - \det(A - \lambda I_n)$$

est polynomiale, et $f(\lambda)$ est nul pour tous les scalaires λ qui ne sont pas valeurs propres de A (donc une infinité), c'est donc le polynôme nul, donc $f(0) = 0$, soit $\det(A + B) = \det(A)$.

LIN 16 (CCINP). a. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ tel que $u^2 = 0$ et $\text{rg}(u) = n$.

i. Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$.

ii. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^{2n}$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

b. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{3n})$ tel que $u^3 = 0$ et $\text{rg}(u) = 2n$.

i. Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u^2)$.

ii. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^{3n}$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

a.i. La relation $u \circ u = 0$ se traduit par l'inclusion $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$. Or, par le théorème du rang, le sous-espace $\text{Ker}(u)$ est aussi de dimension n , tout comme $\text{Im}(u)$. On a donc $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$.

ii. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$. Chacun de ces vecteurs e_k , pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, a au moins un antécédent par u , choisissons-en alors un que nous noterons e_{n+k} . La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n})$ est alors une base de $E = \mathbb{R}^{2n}$. En effet,

soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ des réels tels que $\sum_{k=1}^{2n} \lambda_k e_k = 0_E$, alors en appliquant u , on obtient

$\lambda_{n+1}e_1 + \dots + \lambda_{2n}e_n = 0_E$ et, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ étant libre, on déduit que les scalaires $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n}$ sont nuls. Il reste alors $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0_E$ et, par le même argument,

on déduit aussi la nullité des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Comme $\text{Card}(\mathcal{B}) = n = \dim(E)$, $\mathcal{B}$ est une base de E . Comme les vecteurs e_k ($1 \leq k \leq n$) appartiennent à $\text{Ker}(u)$ et que $u(e_{n+k}) = e_k$ pour $1 \leq k \leq n$, on a bien $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

b.i. La relation $u \circ u^2 = 0$ se traduit par l'inclusion $\text{Im}(u^2) \subset \text{Ker}(u)$. Par le théorème du rang, le sous-espace $\text{Ker}(u)$ est de dimension n . On a donc nécessairement $\text{rg}(u^2) \leq n$. Pour conclure, il reste à prouver que $\text{rg}(u^2) = n$.

Or, on a aussi $\text{Im}(u^2) = \text{Im}(v)$ avec $v = u|_{\text{Im}(u)}$ (ou encore, nuance subtile et ici sans importance, si v est l'endomorphisme induit par u sur le sous-espace stable $\text{Im}(u)$), donc $\text{rg}(u^2) = \text{rg}(v) = \text{rg}(u) - \dim(\text{Ker}(v))$ en appliquant le théorème du rang à v . Comme $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u)$, il résulte $\dim(\text{Ker}(v)) \leq \dim(\text{Ker}(u)) = n$, donc $\text{rg}(u^2) \geq 2n - n = n$, d'où la conclusion.

ii. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u^2)$. Chacun de ces vecteurs e_k , pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, a au moins un antécédent par u^2 , choisissons-en alors un que nous noterons e_{2n+k} . Posons ensuite $e_{n+k} = u(e_{2n+k})$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a alors $u(e_{n+k}) = u^2(e_{2n+k}) = e_k$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}, e_{2n+1}, \dots, e_{3n})$ est alors une base de $E = \mathbb{R}^{3n}$.

En effet, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{3n}$ des réels tels que $\sum_{k=1}^{3n} \lambda_k e_k = 0_E$, alors en appliquant u^2 , on obtient $\lambda_{2n+1}e_1 + \dots + \lambda_{3n}e_n = 0_E$ et, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ étant libre, on déduit que

les scalaires $\lambda_{2n+1}, \dots, \lambda_{3n}$ sont nuls. Il reste alors $\sum_{k=1}^{2n} \lambda_k e_k = 0_E$ et, en appliquant

u , on obtient $\lambda_{n+1}e_1 + \dots + \lambda_{2n}e_n = 0_E$ et, par le même argument, on déduit aussi la nullité des réels $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n}$. Il reste enfin $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0_E$ d'où aussi la nullité des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Comme $\text{Card}(\mathcal{B}) = 3n$, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^{3n}$, et il est clair que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

LIN 17 (CCMP). Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ (0) & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^{n-1} \neq 0_n$ et $A^n = 0_n$. Montrer que A est semblable à J .
- b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nilpotente et de rang $n - 1$. Montrer que A est semblable à J .

- a. Supposons $A^{n-1} \neq 0_n$ et $A^n = 0_n$. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A , on a alors $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Il existe donc un vecteur x_0 de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$. Alors la famille $\mathcal{B} = (u^{n-1}(x_0), \dots, u(x_0), x_0)$ est libre (*démonstration archi-*

classique): soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ des scalaires tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0$, s'ils ne sont pas tous

nuls, considérons l'entier $j = \min \{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\}$, on a alors $\sum_{k=j}^{n-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0$,

et en appliquant u^{n-1-j} , il reste $\lambda_j u^{n-1}(x_0) = 0$, ce qui est absurde puisque le scalaire λ_j est non nul et le vecteur $u^{n-1}(x_0)$ est non nul. Finalement, les scalaires λ_k sont forcément tous nuls, la famille $\mathcal{B}$ est donc libre dans $\mathbb{R}^n$, et c'est une base de $\mathbb{R}^n$ puisqu'elle est de cardinal n . On constate alors que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J$, ce qui montre que les matrices A et J sont semblables puisqu'elles représentent le même endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ dans deux bases différentes.

- b. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente et de rang $n-1$, alors elle vérifie les hypothèses du a., c'est-à-dire $A^{n-1} \neq 0_n$ et $A^n = 0_n$, on en tire alors la même conclusion.

En effet, considérons $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim(E) = n$, u nilpotent et de rang $n-1$. Si F est un sous-espace de E non réduit à $\{0_E\}$ et stable par u , on a alors $\dim(u(F)) = \dim(F) - 1$: en effet, notons v l'endomorphisme de F induit par u , on a alors $\text{Ker}(v) = F \cap \text{Ker}(u)$, donc $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u)$ mais $\text{Ker}(v) \neq \{0_E\}$ puisque, v étant aussi nilpotent, il ne peut être injectif ; comme $\text{Ker}(u)$ est de dimension 1 par le théorème du rang, on a donc $\text{Ker}(v) = \text{Ker}(u)$, puis en appliquant le théorème du rang à v , il vient

$$\dim(u(F)) = \dim(\text{Im}(v)) = \dim(F) - \dim(\text{Ker}(v)) = \dim(F) - 1.$$

En appliquant ceci successivement aux sous-espaces stables $\text{Im}(u)$, $\text{Im}(u^2)$, $\dots$, $\text{Im}(u^{n-1})$, on voit que les dimensions diminuent d'une unité à chaque fois, donc $\text{rg}(u^k) = n - k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et en particulier $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$.

LIN 18 (CMT 2016) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a. Calculer le rang de A .
b. La matrice A est-elle diagonalisable ?

- a. Visiblement, $\text{rg}(A) = 2$.
b. On a donc $0 \in \text{Sp}(A)$, avec un sous-espace propre $E_0(A) = \text{Ker}(A)$ de dimension $n-2$ par le théorème du rang. Recherchons les valeurs propres non nulles. Si λ est un réel non nul, le système $AX = \lambda X$ s'écrit

$$\begin{cases} 2x_n = \lambda x_1 \\ \cdots & \cdots \\ 2x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases}, \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x_1 = \cdots = x_{n-1} = \frac{2}{\lambda} x_n \\ \frac{2(n-1)}{\lambda} x_n = \lambda x_n \end{cases}.$$

Si $\frac{2(n-1)}{\lambda} \neq \lambda$, la dernière équation impose $x_n = 0$ et finalement $X = 0$ en reportant

dans les autres équations, donc λ n'est pas valeur propre de A . Si $\frac{2(n-1)}{\lambda} = \lambda$, alors x_n est arbitraire (prenons-le par exemple égal à λ) et le vecteur $X = \begin{pmatrix} 2 \\ \vdots \\ 2 \\ \lambda \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

Bilan. La matrice admet pour valeur propre 0, avec un SEP associé de dimension $n-2$, et elle admet aussi deux autres valeurs propres distinctes qui sont $\lambda_1 = \sqrt{2(n-1)}$ et $\lambda_2 = -\sqrt{2(n-1)}$. Elle est donc diagonalisable, on peut facilement préciser $A = PDP^{-1}$, avec $D = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & 2 & 2 \\ -1 & 1 & & \vdots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & -1 & 1 & 2 \\ (0) & & & -1 & 2 \\ & & & & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

LIN 19 (CCINP 2016) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , soit φ une forme linéaire sur E non identiquement nulle, soit $x_0 \in E$ un vecteur non nul. Pour tout vecteur x de E , on pose $u(x) = x + \varphi(x) x_0$.

- Montrer que u est un endomorphisme de E .
- Montrer que 1 est valeur propre de u , préciser le sous-espace propre associé.
- À quelle condition l'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

- L'application u est linéaire, et va de E dans E , c'est évident.
- Pas trop difficile non plus : $u(x) = x \iff \varphi(x) = 0$, donc $\text{Ker}(u - \text{Id}_E) = \text{Ker } \varphi$ est un hyperplan de E , donc 1 est valeur propre de u , le sous-espace propre associé $E_1(u) = \text{Ker } \varphi$ est de dimension $n-1$.
- Comme $\dim E_1(u) = n-1$, l'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet une valeur propre autre que 1. Si λ est un réel différent de 1, si un vecteur x de E vérifie $u(x) = \lambda x$, alors $\varphi(x) x_0 = (\lambda - 1)x$, donc $x = \frac{\varphi(x)}{\lambda - 1} x_0$ est colinéaire à x_0 . Or, $u(x_0) = (1 + \varphi(x_0)) x_0$, donc x_0 est vecteur propre pour la valeur propre $1 + \varphi(x_0)$, d'où la discussion :
 - si $\varphi(x_0) = 0$, alors 1 est la seule valeur propre de u , et u n'est pas diagonalisable ;
 - si $\varphi(x_0) \neq 0$, alors le nombre $1 + \varphi(x_0)$ est une valeur propre de u différente de 1, donc u est diagonalisable.

Bilan. L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si $x_0 \notin \text{Ker } \varphi$.

LIN 20 (CCINP 2016) On donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on considère l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad f(M) = M + \text{tr}(M) A .$$

- a. Montrer que f est un automorphisme si et seulement si $\text{tr}(A) \neq -1$.
- b. Dans cette question, on suppose $\text{tr}(A) = -1$. Déterminer $\text{Ker}(f)$. Montrer que

$$\text{Im}(f) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\} .$$

- c. On donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Discuter et résoudre l'équation

$$M + \text{tr}(M)A = N ,$$

d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a. Notons que, si une matrice M appartient au noyau de f , alors M est colinéaire à A , on en déduit l'inclusion $\text{Ker } f \subset \text{Vect}(A)$. Par ailleurs, $f(A) = (1 + \text{Tr}(A)) A$. On en déduit que :
 - si $\text{Tr}(A) = -1$, on a $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(A)$, c'est une droite vectorielle (car A n'est pas la matrice nulle), donc f n'est pas un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
 - si $\text{Tr}(A) \neq -1$, alors $\text{Ker}(f) = \{0\}$, donc f est injectif, et c'est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisqu'on est en dimension finie.
- b. Si f n'est pas un automorphisme, autrement dit si $\text{Tr}(A) = -1$, on sait déjà que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(A)$, c'est une droite vectorielle. Par le théorème du rang, on déduit que $\text{Im}(f)$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Or, un calcul immédiat montre que, pour toute matrice M , on a $\text{Tr}(f(M)) = 0$, d'où l'inclusion $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(\text{Tr})$. Or, l'ensemble $\text{Ker}(\text{Tr})$ des matrices de trace nulle est aussi un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle ; on a donc l'égalité des dimensions, d'où $\text{Im}(f) = \text{Ker}(\text{Tr})$.
- c. • Supposons d'abord $\text{Tr}(A) \neq -1$, soit N une matrice donnée, on sait alors que f est bijective, l'équation $f(M) = N$ admet donc une solution unique. Cherchons l'expression de la matrice $M = f^{-1}(N)$. La relation $M + \text{tr}(M)A = N$ entraîne $(1 + \text{Tr}(A)) \text{Tr}(M) = \text{Tr}(N)$, ce qui détermine $\text{Tr}(M)$ et, en reportant, on déduit

$$\forall N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad f^{-1}(N) = N - \frac{\text{Tr}(N)}{1 + \text{Tr}(A)} A .$$

- Supposons maintenant $\text{Tr}(A) = -1$. Alors l'équation proposée admet des solutions si et seulement si $N \in \text{Im}(f)$, c'est-à-dire si et seulement si $\text{Tr}(N) = 0$. Si c'est le cas, on voit qu'une matrice M solution est nécessairement de la forme $N + \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Réciproquement, si on prend λ réel quelconque, alors

$$f(N + \lambda A) = N + \lambda A + \text{Tr}(N + \lambda A) A = N + \lambda A + \text{Tr}(N) A + \lambda \text{Tr}(A) A = N$$

(en tenant compte de $\text{Tr}(A) = -1$ et $\text{Tr}(N) = 0$).

Bilan: Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices M solutions de $M + \text{Tr}(M) A = N$. Alors

- si $\text{Tr}(A) \neq -1$, on a $\mathcal{S} = \left\{ N - \frac{\text{Tr}(N)}{1 + \text{Tr}(A)} A \right\}$ (une seule solution) ;
- si $\text{Tr}(A) = -1$ et $\text{Tr}(N) \neq 0$, alors $\mathcal{S} = \emptyset$ (pas de solution) ;

- si $\text{Tr}(A) = -1$ et $\text{Tr}(N) = 0$, alors $\mathcal{S} = \{N + \lambda A ; \lambda \in \mathbb{R}\}$ (une infinité de solutions, qui constituent une droite affine).

LIN 21 (CCINP 2016) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ -7 & 1 & -6 \\ -10 & -1 & -7 \end{pmatrix}.$$

- a. Déterminer les valeurs propres de f . Montrer que f n'est pas diagonalisable.
- b. Trouver deux vecteurs propres u et v de f , ainsi qu'un vecteur w , tels que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. Montrer que f est trigonalisable.

- a. On calcule le polynôme caractéristique (*par exemple en effectuant d'abord $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, ce qui permet de factoriser par $x - 2$, et lorsqu'on s'est ramené à un déterminant d'ordre deux, on fait $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$, ce qui permet une nouvelle factorisation par $x - 2$*):

$$\chi_f(x) = \begin{vmatrix} x-9 & -1 & -6 \\ 7 & x-1 & 6 \\ 10 & 1 & x+7 \end{vmatrix} = (x-2) \begin{vmatrix} x-8 & 6 \\ -9 & x+7 \end{vmatrix} = (x-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)^2(x+1).$$

Donc $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A) = \{-1, 2\}$. On observe que $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 6 \\ -7 & -1 & -6 \\ -10 & -1 & -9 \end{pmatrix}$ est de rang

deux, donc $E_2(A) = \text{Ker}(A - 2I_3)$ est de dimension 1. Pour la valeur propre 2, qui est double, le sous-espace propre est de dimension 1. Donc la matrice A (ou l'endomorphisme f associé) n'est pas diagonalisable.

- b. On obtient facilement $E_2(f) = \text{Vect}(u)$ et $E_{-1}(f) = \text{Vect}(v)$, avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et

$v = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Si on choisit un quelconque vecteur w de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\text{Vect}(u, v)$,

par exemple $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice

de f est de la forme $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & * \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$, donc l'endomorphisme f est trigonalisable

(ou, ce qui revient au même, la matrice A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$).

Remarque. De toute façon, le polynôme caractéristique χ_f étant scindé sur $\mathbb{R}$, le cours affirme alors que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

LIN 22 (Centrale 2016). Soient $f_1, \dots, f_p$ des formes linéaires sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension n .

a. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes:

(1): la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre.

(2): l'application linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}^p$, $x \mapsto \varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ est surjective.

(3): il existe une famille $(x_1, \dots, x_p)$ de p vecteurs de E telle que le déterminant

$$\det (f_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq p} = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_p(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_p) & \cdots & f_p(x_p) \end{vmatrix}$$

est non nul.

b. Soit f une forme linéaire sur E . Montrer l'équivalence

$$f \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_p) \iff \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(f_i) \subset \text{Ker}(f).$$

a. Montrons $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (1)$.

• $(1) \implies (2)$: Par contraposition, si l'application linéaire φ n'est pas surjective, son image $\text{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{C}^p$, donc est incluse dans un hyperplan H de $\mathbb{C}^p$. Soit $a_1 y_1 + \dots + a_p y_p = 0$, les coefficients a_i étant non tous nuls, une équation cartésienne de cet hyperplan H . On a alors $a_1 f_1(x) + \dots + a_p f_p(x) = 0$ pour tout vecteur x de E , les formes linéaires $f_1, \dots, f_p$ sont alors liées par la relation $\sum_{i=1}^p a_i f_i = 0$, ce qui est contradictoire.

• $(2) \implies (3)$: Notons $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{C}^p$. Si on suppose (2), alors pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, il existe un vecteur x_k de E tel que $\varphi(x_k) = e_k$, c'est-à-dire $f_j(x_k) = \delta_{j,k}$, la matrice $(f_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq p}$ est alors la matrice I_p et son déterminant vaut 1.

• $(3) \implies (1)$: Par contraposition, si la famille $(f_1, \dots, f_p)$ était liée, il existerait des scalaires $a_1, \dots, a_p$ non tous nuls tels que $a_1 f_1 + \dots + a_p f_p = 0$. Dans la matrice $(f_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq p}$, on observerait alors la relation entre les colonnes: $a_1 C_1 + \dots + a_p C_p = 0$ et son déterminant serait toujours nul.

b. L'implication directe est immédiate.

Dans le sens indirect, on reprend les idées de la preuve de $(1) \implies (2)$ ci-dessus en adaptant un peu. Si $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(f_i) \subset \text{Ker}(f)$, alors l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}^{p+1}$ définie par $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x), f(x))$ n'est pas surjective car son image ne contient pas le vecteur $e_{p+1} = (0, \dots, 0, 1)$ de $\mathbb{C}^{p+1}$. On déduit de a. que la famille $(f_1, \dots, f_p, f)$ est liée, mais cela ne suffit pas tout à fait. Ici, $\text{Im}(\varphi)$ est incluse dans un hyperplan de $\mathbb{C}^{p+1}$ ne contenant pas le vecteur e_{p+1} , une équation de cet hyperplan est alors de la forme $a_1 y_1 + \dots + a_p y_p + a_{p+1} y_{p+1} = 0$ avec a_{p+1} **non nul**. On a alors une relation de dépendance linéaire de la forme $a_1 f_1 + \dots + a_p f_p + a_{p+1} f = 0$ avec a_{p+1} **non nul**, ce qui permet d'affirmer que $f \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$.

III. ESPACES PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS

EUC 1 (CCINP). Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. On considère le plan $H = \text{Vect}(a, b)$, avec $a = e_1 + e_2 + e_3$ et $b = e_1 - e_4$.

- a. Déterminer une base orthonormale de H .
- b. Écrire la matrice, relativement à la base $\mathcal{B}$, du projecteur orthogonal sur H .

-
- a. On applique le procédé de Schmidt: on commence par normer a en introduisant le vecteur $\varepsilon_1 = \frac{a}{\|a\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}a$. On calcule ensuite le vecteur $v_2 = b - p_{V_1}(b) = b - (\varepsilon_1|b)\varepsilon_1$, où V_1 est la droite vectorielle engendrée par ε_1 . On obtient $v_2 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 - e_3 - 3e_4)$. On norme enfin ce vecteur pour obtenir $\varepsilon_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$. Ainsi, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base orthonormale du plan H , avec

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- b. On applique la formule du cours: si $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$, on a $p_H(u) = (\varepsilon_1|u)\varepsilon_1 + (\varepsilon_2|u)\varepsilon_2$, soit

$$p_H(u) = \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2x-y-z-3t}{\sqrt{15}} \times \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Tous calculs faits,

$$p_H(u) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3x+y+z-2t \\ x+2y+2z+t \\ x+2y+2z+t \\ -2x+y+z+3t \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice représentant canoniquement le projecteur p_H est $M = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

EUC 2 (CCINP). Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M(M^\top M)^2 = I_n$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(M^\top M)^2 = I_n$. Alors M est inversible et son inverse $M^{-1} = (M^\top M)^2 = M^\top M M^\top M$ est symétrique, donc M aussi est symétrique, autrement dit $M^\top = M$. L'hypothèse donne alors $M^5 = I_n$. D'après le théorème spectral, M est alors diagonalisable ; si λ est valeur propre de M , alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda^5 = 1$, donc $\lambda = 1$. Finalement, $M = I_n$ (matrice diagonalisable ayant 1 pour seule valeur propre). Réciproquement, $M = I_n$ convient.

EUC 3 (CCINP). Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab+c & ac-b \\ ab-c & b^2 & bc+a \\ ac+b & bc-a & c^2 \end{pmatrix}$$

avec a, b, c réels non tous nuls.

- a. Calculer $\det(A)$.
- b. Déterminer a, b, c pour que u soit un automorphisme orthogonal.

Avec un peu de métier (!!), on peut décomposer M en ses parties symétrique et anti-symétrique :

$$M = S + A, \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix},$$

puis s'apercevoir que $S = VV^T$, avec $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; ainsi, pour toute matrice-colonne X ,

on a $SX = (VV^T)X = V(V^TX) = (v|x)V$ puisque V^TX est un scalaire, précisément c'est le produit scalaire des vecteurs v et x canoniquement représentés par les matrices-colonnes V et X . On peut aussi remarquer que A est la matrice représentant canoniquement l'endomorphisme $x \mapsto x \wedge v$ de $\mathbb{R}^3$. Posons $r = \|v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, et $e_1 = \frac{v}{r} = \frac{v}{\|v\|}$.

L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement représenté par M a donc pour expression

$$u : x \mapsto (v|x)v - v \wedge x = r^2(e_1|x)e_1 - r e_1 \wedge x.$$

Le vecteur e_1 est unitaire, si on le complète en une base orthonormale directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, alors en calculant les images des vecteurs de la base, on voit que $M_{\mathcal{B}}(u) = N = \begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r \\ 0 & -r & 0 \end{pmatrix}$.

Le calcul du déterminant est alors plus facile!!! :

$$\det(M) = \det(N) = r^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Comme la matrice N représente u dans une base orthonormale, l'endomorphisme u est orthogonal si et seulement si $N^T N = I_3$; or $N^T N = \text{diag}(r^4, r^2, r^2)$, la CNS est donc $r = 1$ (puisque r est positif), soit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

EUC 4 (CMT). Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E . Montrer que deux quelconques des assertions suivantes entraînent la troisième :

- (a) : u est un endomorphisme orthogonal ;
- (b) : $u^2 = -\text{id}_E$;
- (c) : $\forall x \in E \quad (x|u(x)) = 0$.

Notons d'abord que la condition **(c)** équivaut à la condition **(d)** : “ u est un endomorphisme antisymétrique”, i.e. $\forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x)|y) = -(x|u(y))$. En effet, l'implication **(d)** $\implies$ **(c)** est immédiate en prenant $y = x$. Réciproquement, si on a **(c)**, alors

$$0 = (x + y|u(x + y)) = (x|u(x)) + (x|u(y)) + (y|u(x)) + (y|u(y)) = (x|u(y)) + (u(x)|y),$$

donc u est antisymétrique.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E , soit A la matrice représentant u dans cette base. On est ramenés à montrer que, si deux des assertions suivantes sont exactes, alors la troisième aussi, avec:

(1) : A est une matrice orthogonale ;

(2) : $A^2 = -I_n$;

(3) : A est une matrice antisymétrique.

• Si on a **(1)** et **(2)**, alors $A^T A = I_n$ et $A^2 = -I_n$, donc $AA = -A^T A$. Comme A est inversible, on peut multiplier à droite par A^{-1} , on déduit $A = -A^T$, donc **(3)**.

• Si on a **(2)** et **(3)**, alors $A^2 = -I_n$ et $A^T = -A$, donc $AA^T = -A^2 = I_n$, donc A est orthogonale, i.e. **(1)**.

• Si on a **(3)** et **(1)**, alors $A^T = -A$ et $AA^T = I_n$, donc $A^2 = -AA^T = -I_n$, donc **(2)**.

EUC 5 (CMT). On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ respectivement l'ensemble des matrices symétriques (antisymétriques) d'ordre n .

- Montrer que $(M, N) \mapsto (M|N) = \text{tr}(M^T N)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Exprimer la distance de M au sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, à l'aide des matrices M et M^T .
- Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $d(B, \mathcal{S}_3(\mathbb{R}))$.

- C'est du cours, je rappelle que l'on a aussi $(M|N) = \sum_{i,j} m_{ij}n_{ij}$ avec les notations habituelles.
- Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors

$$(S|A) = \text{Tr}(S^T A) = \text{Tr}(SA) = \text{Tr}(AS) = \text{Tr}(-A^T S) = -\text{Tr}(A^T S) = -(A|S) = -(S|A),$$

donc $(S|A) = 0$: les deux sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux, ce qui signifie que l'un est inclus dans l'orthogonal de l'autre, par exemple $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp$. Par ailleurs, ils sont aussi supplémentaires (toute matrice M se décompose de façon unique en $M = A + S$ avec A antisymétrique et S symétrique, précisément $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$), donc

$$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = n^2 - \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dim (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp,$$

ce sont donc bien des supplémentaires orthogonaux.

- c. Cette distance est aussi la distance de M à son projeté orthogonal S sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire à la matrice $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ parfois appelée “partie symétrique” de la matrice M . Bref,

$$d(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = d(M, S) = \|M - S\| = \|A\| = \frac{1}{2} \|M - M^T\|,$$

où $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$ est la “partie antisymétrique” de M . En fonction des coefficients m_{ij} de la matrice M , cela donne (en élevant au carré par commodité) :

$$d(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 = \frac{1}{4} \sum_{i,j} (M - M^T)_{i,j}^2 = \frac{1}{4} \sum_{i,j} (m_{i,j} - m_{j,i})^2.$$

- d. Ici, $d(B, \mathcal{S}_3(\mathbb{R}))^2 = \frac{1}{4} \sum_{i,j} (b_{i,j} - b_{j,i})^2 = 3$, donc $d(B, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \sqrt{3}$.

EUC 6 (CMT). Soit E un espace euclidien de dimension n , soit $f \in \mathcal{L}(E)$ représenté dans une

base orthonormale par $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (il y a une “antidiagonale” de 1, et le reste

est nul).

- Montrer qu'il existe une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de f .
- Valeurs propres de f , déterminant de f .
- Montrer que f est un endomorphisme orthogonal, préciser ses caractéristiques.

(tout en vrac) La matrice A est visiblement orthogonale (la somme des carrés des coefficients d'une colonne vaut 1, alors que le produit scalaire de deux colonnes distinctes est nul), donc ${}^tAA = I_n$, mais elle est aussi visiblement symétrique réelle (ce qui répond à la question a. par le théorème spectral) donc $A^T = A$, d'où aussi $A^2 = I_n$. L'endomorphisme f associé est donc une symétrie, et même une symétrie orthogonale. Comme le polynôme $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ est annulateur, on a $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$, de plus $E = \text{Ker}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \text{id}_E) = E_1(f) \oplus E_{-1}(f)$, ces deux sous-espaces étant supplémentaires orthogonaux.

En posant $p = \dim E_1(f)$, on a donc $\dim E_{-1}(f) = n - p$ et $\text{Tr}(f) = p - (n - p) = 2p - n$ (comme on sait que f est diagonalisable, les dimensions des sous-espaces propres sont aussi les multiplicités des valeurs propres). Par ailleurs, “visiblement”, la diagonale de A a tous ses éléments nuls lorsque n est pair, et tous sauf un lorsque n est impair, d'où la discussion :

- si n est pair ($n = 2k$), alors $0 = \text{Tr}(A) = 2p - n = 2p - 2k$, donc $p = k$, c'est-à-dire $\dim E_1(f) = \dim E_{-1}(f) = k = \frac{n}{2}$. Le déterminant est alors $(-1)^k$. On peut vérifier que

$$E_1(f) = \text{Vect}(e_1 + e_{2k}, e_2 + e_{2k-1}, \dots, e_k + e_{k+1})$$

et que

$$E_{-1}(f) = (E_1(f))^\perp = \text{Vect}(e_1 - e_{2k}, e_2 - e_{2k-1}, \dots, e_k - e_{k+1}).$$

- si n est impair ($n = 2k + 1$), alors $1 = \text{Tr}(A) = 2p - n = 2p - (2k + 1)$, donc $\dim E_1(f) = k + 1$ et $\dim E_{-1}(f) = k$. Le déterminant est alors $(-1)^k$. Dans ce cas,

$$E_1(f) = \text{Vect}(e_1 + e_{2k+1}, e_2 + e_{2k}, \dots, e_k + e_{k+2}, e_{k+1})$$

et que

$$E_{-1}(f) = (E_1(f))^\perp = \text{Vect}(e_1 - e_{2k+1}, e_2 - e_{2k}, \dots, e_k - e_{k+2}).$$

EUC 7 (ENSEA). Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. À quelle condition la matrice M s'écrit-elle sous la forme $M = X Y^\top$, avec X et Y deux matrices-colonnes non nulles ?

La réponse est : M est de rang 1.

- En effet, supposons $M = X Y^\top$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux matrices-colonnes

non nulles, alors $M = (m_{ij})$ avec $m_{ij} = x_i y_j$. La matrice M n'est pas nulle : en effet, il existe un indice i_0 tel que $x_{i_0} \neq 0$, et il existe un indice j_0 tel que $y_{j_0} \neq 0$, alors $m_{i_0, j_0} = x_{i_0} y_{j_0} \neq 0$. Mais elle est de rang au plus 1 puisque tous ses vecteurs colonnes sont colinéaires au vecteur $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc appartiennent à la même droite vectorielle.

- Réciproquement, si la matrice $M = (m_{ij})$ est de rang 1, alors ses vecteurs-colonnes C_j , $1 \leq j \leq n$, sont tous colinéaires et l'un au moins d'entre eux (disons C_{j_0}) est non nul,

notons-le $X = C_{j_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Tous les vecteurs-colonnes C_j , $1 \leq j \leq n$, peuvent alors

s'écrire sous la forme $C_j = y_j X$, où y_j est un réel (évidemment, $y_{j_0} = 1$). On a alors $m_{ij} = x_i y_j$, ce qui signifie que

$$M = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (y_1 \quad \dots \quad y_n) = X Y^\top.$$

EUC 8 (CMT). Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ une matrice "rectangulaire", soit λ un complexe.

- On suppose $\lambda \neq 0$. Montrer que λ est valeur propre de $AA^\top$ si et seulement s'il est valeur propre de $A^\top A$.
- Même question avec $\lambda = 0$ et $n = p$.

- Supposons λ valeur propre de $AA^\top$, alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n$, **non nul**, tel que $AA^\top X = \lambda X$. En multipliant à gauche par $A^\top$, on obtient $A^\top AA^\top X = \lambda A^\top X$. Posons $Y = A^\top X$, alors $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^p$, Y est **non nul** (en effet, si $Y = 0$, alors $\lambda X = AY = 0$ puis $X = 0$ puisque λ est non nul, ce qui est absurde) et $A^\top AY = \lambda Y$, on a ainsi prouvé que λ est valeur propre de $A^\top A$. La réciproque se traite de la même façon. Donc les valeurs propres **non nulles** de $AA^\top$ coïncident avec les valeurs propres non nulles de $A^\top A$.

Remarque. Ceci est faux pour la valeur propre nulle. Par exemple, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, je laisse le lecteur vérifier que 0 est valeur propre de $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ mais pas de $AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

b. Si A est une matrice carrée d'ordre n , alors

$$0 \in \text{Sp}(AA^T) \iff \det(AA^T) = 0 \iff \det(A) \det(A^T) = 0 \iff \det(A^T A) = 0 \iff 0 \in \text{Sp}(A^T A) .$$

Le résultat du **a.** restant valable lorsque $n = p$, on a donc dans ce cas $\text{Sp}(A^T A) = \text{Sp}(AA^T)$.

En fait, dans ce cas, $0 \in \text{Sp}(A^T A) \iff 0 \in \text{Sp}(AA^T) \iff \det(A) = 0 \iff A \notin \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Remarque. Il est "classique" (le lecteur le montrera en exercice!) que, si u et v sont deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel **de dimension finie**, on a $\text{Sp}(u \circ v) = \text{Sp}(v \circ u)$. Donc si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n , on a aussi $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA)$.

EUC 9 (CMT). Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Rappeler la définition d'un espace euclidien, et le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Montrer que la famille (I_3, A) est orthogonale pour ce produit scalaire.
- Donner le projeté orthogonal de M sur le plan $P = \text{Vect}(I_3, A)$.

- Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Le cours donne deux expressions équivalentes du produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à savoir $(A|B) = \text{Tr}(A^T B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$.
- Il est clair que la somme des produits deux à deux des coefficients de I_3 et de A est nulle, donc $(I_3|A) = 0$.
- La famille (I_3, A) est une base orthogonale du plan P , il suffit de normer les matrices I_3 et A pour construire une base orthonormale (U, V) de P , on appliquera ensuite la formule du cours

$$p_P(M) = (U|M) U + (V|M) V .$$

Ici, $U = \frac{I_3}{\|I_3\|} = \frac{I_3}{\sqrt{3}}$ et $V = \frac{A}{\|A\|} = \frac{A}{\sqrt{3}}$, puis

$$p_P(M) = \frac{1}{3} (I_3|M) I_3 + \frac{1}{3} (A|M) A = \frac{1}{3} (I_3 + A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

EUC 10 (CCINP). Soit $u \in O(E)$, où E est un espace euclidien.

a. Montrer que $(\text{Ker}(u - \text{id}_E))^\perp = \text{Im}(u - \text{id}_E)$.

b. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère l'endomorphisme $r_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} u^j$. Soit x un vecteur de E .

Déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x)$.

Dans tout l'exercice, on posera $F = \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Im}(u - \text{Id}_E)$.

a. Soient $x \in F$ et $y \in G$; alors $u(x) = x$ et il existe $z \in E$ tel que $y = u(z) - z$. Alors

$$(x|y) = (x|u(z) - z) = (x|u(z)) - (x|z) = (u(x)|u(z)) - (x|z) = 0$$

puisque u est un automorphisme orthogonal, donc conserve le produit scalaire. On a donc montré que les sous-espaces F et G sont orthogonaux, ce qui signifie par exemple que $G \subset F^\perp$. Mais on sait que $F^\perp$ est un supplémentaire de F , donc $\dim(F^\perp) = \dim E - \dim F$, et on a aussi $\dim G = \dim E - \dim F$ par le théorème du rang. Finalement, $G = F^\perp$, ce qu'il fallait démontrer.

b. Soit $x \in E$, on le décompose en $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G = F^\perp$. Alors $u(y) = y$, donc par récurrence immédiate, $u^j(y) = y$ pour tout j , puis $r_k(y) = y$ pour tout entier k . D'autre part, il existe $z' \in E$ tel que $z = u(z') - z'$, alors $u^j(z) = u^{j+1}(z') - u^j(z')$ et

$$r_k(z) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} u^j(z) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (u^{j+1}(z') - u^j(z')) = \frac{1}{k} (u^k(z') - z')$$

(somme télescopique). Comme $u \in O(E)$ conserve la norme, on a

$$\|r_k(z)\| = \frac{1}{k} \|u^k(z') - z'\| \leq \frac{1}{k} (\|u^k(z')\| + \|z'\|) = \frac{2}{k} \|z'\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(z) = 0_E$. Finalement, $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = y = p_F(x)$. Dans l'espace vectoriel E , la suite $(r_k(x))$ converge vers le vecteur $p_F(x)$, projeté orthogonal de x sur $F = \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$.

EUC 11 (CMT). Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E . On suppose qu'il existe un réel a strictement positif tel que

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\| = a \|x\|.$$

Montrer que $f^2 = a^2 \text{id}_E$.

Les seules valeurs propres possibles de f sont a et $-a$: en effet, si un réel λ est valeur propre de u , alors il existe un vecteur propre associé (vecteur x **non nul** tel que $u(x) = \lambda x$). Alors $\|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| = a \|x\|$, donc $|\lambda| = a$ et $\lambda = \pm a$. Mais, par le théorème spectral, u est diagonalisable, donc u est représenté dans une certaine base $\mathcal{B}$ de E par une matrice diagonale D , et d'après ce qui précède, les coefficients diagonaux de D valent a ou $-a$. Donc $D^2 = a^2 I_n$. Donc $f^2 = a^2 \text{Id}_E$.

EUC 12 (ENSEA). Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E , on suppose que

$$\forall x \in E \quad (u(x)|x) = 0 .$$

- a. Montrer que u est antisymétrique, i.e. $\forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x)|y) = -(x|u(y))$.
- b. Montrer que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.
- c. En considérant l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$, montrer que le rang de u est pair.

- a. Soient $x \in E, y \in E$. On a alors

$$0 = (u(x+y)|x+y) = (u(x)|x) + (u(x)|y) + (u(y)|x) + (u(y)|y) = (u(x)|y) + (u(y)|x) ,$$

donc l'endomorphisme u est antisymétrique.

- b. Montrons d'abord que $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0_E\}$. Soit donc $x \in \text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)$, il existe $z \in E$ tel que $x = u(z)$, puis

$$\|x\|^2 = (x|x) = (u(z)|x) = -(z|u(x)) = -(z|0_E) = 0 ,$$

donc $x = 0_E$. Ensuite, par le théorème du rang,

$$\dim (\text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)) = \dim (\text{Im}(u)) + \dim (\text{Ker}(u)) = \dim(E) ,$$

donc $\text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) = E$.

- c. Le sous-espace $\text{Im } u$ est évidemment stable par u , notons v l'endomorphisme induit. On a alors $\text{Ker}(v) = \text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0_E\}$, donc v est injectif, donc v est un automorphisme de l'espace vectoriel $\text{Im } u$. Donc $\det(v) \neq 0$. De plus, v est un endomorphisme antisymétrique de l'espace $\text{Im}(u)$. Dans une base orthonormale de $\text{Im}(u)$, il est donc représenté par une matrice antisymétrique $V \in \mathcal{A}_r(\mathbb{R})$, avec $r = \text{rg}(u)$. De $V^T = -V$, on déduit

$$\det(v) = \det(V) = \det(V^T) = \det(-V) = (-1)^r \det(V) = (-1)^r \det(v) .$$

Comme $\det(v) \neq 0$, on a nécessairement $(-1)^r = 1$, donc $r = \text{rg}(u)$ est un entier pair.

EUC 13 (Mines-Ponts). Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'existence de $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|AX_0 - Y\| = \min \{\|AX - Y\| ; X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$, la norme $\|\cdot\|$ étant ici la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$. Prouver la relation $A^\top AX_0 = A^\top Y$.

Application. Déterminer le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f : (x, y) \mapsto (x + y - 1)^2 + (x - 1)^2 + (y - 2)^2 .$$

On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$, ainsi que $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^p$.

- Rappelons que la matrice A représente canoniquement une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$. Lorsque X décrit $\mathbb{R}^p$, alors $Z = AX$ décrit le sous-espace $\text{Im}(A)$ de $\mathbb{R}^n$. Notons Y_0 le projeté orthogonal de Y sur $\text{Im}(A)$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. On a alors, d'après le cours,

$$\|Y_0 - Y\| = \min_{Z \in \text{Im}(A)} \|Z - Y\| = \min_{X \in \mathbb{R}^p} \|AX - Y\|.$$

Si $X_0 \in \mathbb{R}^p$ est un quelconque antécédent de Y_0 par A , on a bien ce que l'on cherche, i.e. $\|AX_0 - Y\| = \min_{X \in \mathbb{R}^p} \|AX - Y\|$.

• Toujours d'après le cours, le vecteur $Y - Y_0$ appartient à l'orthogonal du sous-espace $\text{Im}(A)$ dans $\mathbb{R}^n$. Or, $(\text{Im } A)^\perp \subset \text{Ker}(A^T)$: en effet, A^T représente une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$ et, si $Z \in \mathbb{R}^n$ appartient à l'orthogonal de $\text{Im } A$, on a alors

$$\forall Y \in \text{Im}(A) \quad \langle Y, Z \rangle = 0, \quad \text{i.e.} \quad \forall X \in \mathbb{R}^p \quad \langle AX, Z \rangle = 0,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$. Cela s'écrit encore

$$\forall X \in \mathbb{R}^p \quad X^T A^T Z = 0, \quad \text{soit} \quad \forall X \in \mathbb{R}^p \quad (X | A^T Z) = 0,$$

où $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^p$. Le vecteur $A^T Z$ de $\mathbb{R}^p$ appartient donc à $(\mathbb{R}^p)^\perp$, c'est donc le vecteur nul de $\mathbb{R}^p$, donc $Z \in \text{Ker}(A^T)$. On peut, en raisonnant sur les dimensions, prouver qu'en fait $(\text{Im } A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$, mais ce n'est pas utile ici. On a finalement $Y - Y_0 = Y - AX_0 \in \text{Ker}(A^T)$, soit $A^T AX_0 = A^T Y$.

• Soit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y, x, y)$. Alors u est canoniquement représentée par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$. Soit $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a

$$m = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = \min_{X \in \mathbb{R}^2} \|AX - Y\|^2,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^3$. D'après l'étude générale faite ci-dessus, on a aussi $m = d(Y, \text{Im}(u))^2 = \|Y - Y_0\|^2$, où Y_0 est, dans $\mathbb{R}^3$, le projeté orthogonal de Y sur $\text{Im}(u)$. Or, $\text{Im}(u) = \text{Im}(A)$ est visiblement le plan d'équation $x - y - z = 0$, donc

de vecteur normal $N = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $Y_0 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ est le point de ce plan, dont les

coordonnées sont de la forme $\begin{cases} y_1 = 1 + t \\ y_2 = 1 - t \\ y_3 = 2 - t \end{cases}$ (on écrit que $Y_0 = Y + tN$), on obtient $t = \frac{2}{3}$,

soit $m = \|Y - Y_0\|^2 = t^2 \|N\|^2 = \frac{4}{3}$.

EUC 14 (Centrale). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un espace euclidien E de dimension n .

a. Montrer qu'il existe une unique famille $\mathcal{B}^* = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de vecteurs de E telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad (e_i | \varepsilon_j) = \delta_{i,j}$$

et montrer que $\mathcal{B}^*$ est une base de E .

b. Comment s'expriment les coordonnées d'un vecteur x de E dans la base $\mathcal{B}$? dans $\mathcal{B}^*$?

c. Soit f l'endomorphisme de E tel que $f(e_i) = \varepsilon_i$ pour tout i . Montrer que $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

- d. Montrer qu'il existe $r \in \mathcal{S}^{++}(E)$ tel que $r^2 = f$. On pose $u_i = r(e_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Que dire de la famille de vecteurs $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$?

- a. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit l'hyperplan $H_j = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n)$, soit la droite vectorielle $D_j = H_j^\perp$, soit enfin ω_j un vecteur unitaire de D_j .

Si la famille $\mathcal{B}^*$ existe, nécessairement pour tout j , on a $(e_i | \varepsilon_j) = 0$ pour $i \neq j$, donc $\varepsilon_j \in H_j^\perp = D_j$, il existe donc un réel λ_j tel que $\varepsilon_j = \lambda_j \omega_j$. Enfin, la relation $(e_j | \varepsilon_j) = 1$ détermine le réel λ_j puisque $(e_j | \varepsilon_j) = 1 \iff \lambda_j (e_j | \omega_j) = 1 \iff \lambda_j = \frac{1}{(e_j | \omega_j)}$.

Remarquons en effet que le produit scalaire $(e_j | \omega_j)$ ne peut être nul sinon le vecteur ω_j serait orthogonal à tous les vecteurs de la base $\mathcal{B}$, ce qui signifierait qu'il est nul et c'est absurde. On a donc l'unicité de la famille $\mathcal{B}^*$.

Réciproquement, la famille de vecteurs $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, avec $\varepsilon_j = \frac{1}{(e_j | \omega_j)} \omega_j$ pour tout j , vérifie les relations imposées.

La famille $\mathcal{B}^*$ est libre car, si on a $\sum_{j=1}^n \lambda_j \varepsilon_j = 0_E$ où les λ_j sont des réels, alors pour tout i ,

$$0 = (e_i | 0_E) = \left(e_i \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j \varepsilon_j \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (e_i | \varepsilon_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{i,j} = \lambda_i .$$

Comme la famille est de cardinal $n = \dim(E)$, c'est une base de E .

- b. Soit $x \in E$, notons $x_1, \dots, x_n$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et $\xi_1, \dots, \xi_n$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}^*$. On a donc $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et, en faisant le produit scalaire avec l'un des vecteurs ε_j , on obtient

$$(x | \varepsilon_j) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \mid \varepsilon_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i (e_i | \varepsilon_j) = x_j .$$

Les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ sont donc les produits scalaires de x avec les vecteurs de la base $\mathcal{B}^*$, i.e. $x_i = (\varepsilon_i | x)$ pour tout i . De même, $\xi_i = (e_i | x)$ pour tout i . On a donc

$$\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i | x) e_i = \sum_{i=1}^n (e_i | x) \varepsilon_i .$$

- c. Soient $x \in E$ et $y \in E$, alors

$$(f(x) | y) = \left(f \left(\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i | x) e_i \right) \mid y \right) = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i | x) (f(e_i) | y) = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i | x) (\varepsilon_i | y) .$$

Cette écriture étant symétrique en les variables x et y , on déduit que $(f(x) | y) = (x | f(y))$, l'endomorphisme f est donc autoadjoint, $f \in \mathcal{S}(E)$.

Enfin, pour tout $x \in E$, on a $(f(x)|x) = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i|x)^2 \geq 0$, et cette somme est nulle si et seulement si $(\varepsilon_i|x) = 0$ pour tout i , c'est-à-dire si le vecteur x est nul puisque les $(\varepsilon_i|x)$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. L'endomorphisme symétrique f est donc défini positif.

Remarque. Pour tout j , on a $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i|\varepsilon_j)e_i$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}^*$, qui est aussi la matrice de l'endomorphisme f relativement à la base $\mathcal{B}$, est la matrice de Gram de la famille de vecteurs $\mathcal{B}^*$.

- d. L'existence de r est classique: par le théorème spectral, il existe une base orthonormale de E dans laquelle l'endomorphisme f est représenté par une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, les λ_i étant des réels strictement positifs, il suffit alors de considérer l'endomorphisme r représenté dans la même base par la matrice $\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. On a alors, pour tout couple (i, j) ,

$$(u_i|u_j) = (r(e_i)|r(e_j)) = (e_i|r^2(e_j)) = (e_i|f(e_j)) = (e_i|\varepsilon_j) = \delta_{i,j}.$$

Ainsi, $\mathcal{U}$ est une famille orthonormale donc libre. Comme $\text{Card}(\mathcal{U}) = n = \dim(E)$, c'est une base orthonormale de E .

EUC 15 (Mines-Ponts). On munit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$(f|g) = \int_0^1 f(t) g(t) dt.$$

Pour $f \in E$, on note $v(f)$ la primitive de f qui s'annule en 0, soit $v(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- a. Montrer que v est un endomorphisme de E .
b. Déterminer un endomorphisme v^* de E tel que

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad (v(f)|g) = (f|v^*(g)).$$

Montrer l'unicité d'un tel endomorphisme v^* .

- c. Déterminer les valeurs propres de $v^* \circ v$.

- a. La linéarité de v est immédiate (linéarité de l'intégrale), et il résulte du théorème fondamental que, si $f \in E$, alors la fonction $v(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, donc continue, soit $v(f) \in E$.
b. Soient f et g dans E , notons $F = v(f)$ la primitive de f qui s'annule en 0, et G la primitive de g qui s'annule en 1. Comme F et G sont de classe $\mathcal{C}^1$, une intégration par parties donne

$$(v(f)|g) = \int_0^1 F(t) g(t) dt = [F(t) G(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t) G(t) dt.$$

Le choix des primitives F et G fait que le crochet $[F(t) G(t)]_0^1$ est nul. En posant $v^*(g) = -G$, on a alors

$$(v(f)|g) = \int_0^1 f(t) v^*(g)(t) dt = (f|v^*(g)).$$

On a finalement posé $v^*(g)(x) = \int_x^1 g(t) dt$ pour tout $g \in E$ et $x \in [0, 1]$. Par les mêmes arguments qu'en **a.**, l'application v^* ainsi construite est bien un endomorphisme de E .

S'il existait un autre endomorphisme w de E tel que $\forall (f, g) \in E^2 \quad (v(f)|g) = (f|w(g))$, alors par différence, on aurait $\forall (f, g) \in E^2 \quad (f|w(g) - v^*(g)) = 0$, ce qui entraîne que $\forall g \in E \quad w(g) - v^*(g) = 0$ (car $E^\perp = \{0\}$), donc $w = v^*$, on a prouvé l'unicité de cet endomorphisme v^* .

- c. Les endomorphismes v et v^* sont injectifs: en effet, si $f \in E$ est tel que $v(f) = 0$, en dérivant on obtient $f = 0$, idem avec v^* . Donc $v^* \circ v$ est aussi injectif et n'admet pas 0 comme valeur propre.

Pour rechercher les valeurs propres non nulles de $v^* \circ v$, on utilisera les résultats suivants: si $f \in E$ alors les fonctions $v(f)$ et $v^*(f)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec $v(f)(0) = 0$ et $v^*(f)(1) = 0$, $(v(f))' = f$ et $(v^*(f))' = -f$. La fonction $v^*(v(f))$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$.

Rappelons aussi que, si f et g sont deux fonctions dérivables sur $[0, 1]$, on a les équivalences

$$f = g \iff \begin{cases} f' = g' \\ f(0) = g(0) \end{cases} \iff \begin{cases} f' = g' \\ f(1) = g(1) \end{cases}.$$

Donc, si λ est un réel non nul, la relation $(v^* \circ v)(f) = \lambda f$ entraîne déjà que $f = \frac{1}{\lambda} v^*(v(f))$ est de classe $\mathcal{C}^2$. On a ensuite les équivalences

$$\begin{aligned} (v^* \circ v)(f) = \lambda f &\iff \begin{cases} (v^* \circ v)(f)' = \lambda f' \\ f(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -v(f) = \lambda f' \\ f(1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -f = \lambda f'' \\ f(1) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \iff \textbf{(P):} \begin{cases} f'' + \frac{1}{\lambda} f = 0 \\ f(1) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

On est donc ramené à rechercher les réels λ pour lesquels le problème **(P)** (qui ressemble un peu à un problème de Cauchy, mais n'en est pas un) admet des solutions autres que la fonction nulle. On fait alors une disjonction de cas:

- si $\lambda < 0$, posons $\frac{1}{\lambda} = -\omega^2$, on cherche f de la forme $f : x \mapsto A \operatorname{ch}(\omega x) + B \operatorname{sh}(\omega x)$, les conditions $f'(0) = 0$ et $f(1) = 0$ entraînent $A = B = 0$ donc $f = 0$, et λ n'est pas valeur propre de $v^* \circ v$.

- si $\lambda > 0$, posons $\frac{1}{\lambda} = \omega^2$, on cherche f de la forme $f : x \mapsto A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$,

les conditions $f'(0) = 0$ et $f(1) = 0$ se ramènent à $\begin{cases} B = 0 \\ A \cos(\omega) = 0 \end{cases}$, d'où une nouvelle disjonction de cas:

- si $\cos(\omega) = 0$, i.e. si $\omega = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$, on peut prendre A réel quelconque, et on trouve des fonctions f non nulles solutions du problème **(P)**, dans ce cas λ est valeur propre de $v^* \circ v$;

-si $\cos(\omega) = 0$, on doit avoir $A = B = 0$ donc $f = 0$, et λ n'est pas valeur propre de $v^* \circ v$.

Bilan. Les valeurs propres de l'endomorphisme $v^* \circ v$ sont les réels $\lambda_k = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}}$ avec $k \in \mathbb{N}$.

EUC 16 (CMT 2016). Soit E un espace euclidien de dimension p , soit $T \in \mathcal{O}(E)$ une isométrie vectorielle, soit $S = T - \text{id}_E$.

- a. Montrer que $\forall (u, v) \in E^2 \quad (T(u) - u \mid v) = (u \mid T^{-1}(v) - v)$.
- b. Montrer que $\text{Ker } S = (\text{Im } S)^\perp$.
- c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \frac{1}{n} (\text{id}_E + T + T^2 + \dots + T^{n-1})$. Montrer que, pour tout x de E , le vecteur $T_n(x)$ admet une limite $P(x)$ dans E lorsque n tend vers l'infini. Reconnaitre l'application $P : x \mapsto P(x)$.

- a. Une isométrie vectorielle conserve le produit scalaire, on a donc en particulier

$$(T(u) \mid v) = (T(u) \mid T(T^{-1}(v))) = (u \mid T^{-1}(v)) ,$$

puis par bilinéarité du produit scalaire,

$$(T(u) - u \mid v) = (T(u) \mid v) - (u \mid v) = (u \mid T^{-1}(v)) - (u \mid v) = (u \mid T^{-1}(v) - v) .$$

- b. Soient $x \in \text{Ker } S$ et $y \in \text{Im } S$. Il existe alors $z \in E$ tel que $y = S(z) = T(z) - z$, donc

$$(y \mid x) = (T(z) - z \mid x) = (z \mid T^{-1}(x) - x) ,$$

mais $x \in \text{Ker } S$, donc $T(x) = x$ donc aussi $x = T^{-1}(x)$, finalement $(y \mid x) = 0$. Ainsi, les s.e.v. $\text{Ker } S$ et $\text{Im } S$ sont orthogonaux, soit par exemple $\text{Ker } S \subset (\text{Im } S)^\perp$. Comme ces deux sous-espaces ont la même dimension (*théorème du rang, et dimension du supplémentaire orthogonal*), on a bien $\text{Ker } S = (\text{Im } S)^\perp$.

- c. Soit $x \in E$, décomposons-le en $x = y + z$ avec $y \in \text{Ker } S$ et $z \in \text{Im } S$, on a donc $S(y) = 0_E$ soit $T(y) = y$ et par récurrence $T^k(y) = y$ pour tout k entier naturel, et aussi il existe $u \in E$ tel que $z = S(u) = T(u) - u$. On en déduit $T_n(y) = \frac{1}{n}(ny) = y$, et par télescopage,

$$T_n(z) = \frac{1}{n} \left((T(u) - u) + (T^2(u) - T(u)) + \dots + (T^n(u) - T^{n-1}(u)) \right) = \frac{1}{n} (T^n(u) - u) .$$

Comme T conserve la norme des vecteurs, on a $\|T^n(u)\| = \|u\|$ pour tout n , donc $\|T_n(z)\| \leq \frac{1}{n} (\|T^n(u)\| + \|u\|) = \frac{2\|u\|}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_E$. Enfin, par linéarité, on a $T_n(x) = T_n(y) + T_n(z) = y + T_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$. La suite de vecteurs $(T_n(x))$ converge donc vers le vecteur $P(x) = y$, qui est le projeté orthogonal de x sur $\text{Ker}(S)$. Ainsi, l'application P recherchée est le projecteur orthogonal sur le s.e.v. $\text{Ker}(S)$.

EUC 17 (CMT 2016). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $B = \frac{1}{2}(A + A^\top)$.

- a. Montrer que l'on peut écrire $B = PDP^\top$ avec $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, et $P \in \text{O}_n(\mathbb{R})$.
On pose alors $A' = P^\top AP$. On appelle α la plus petite valeur propre de B , et β la plus grande.
- b. Montrer que A et A' ont les mêmes valeurs propres (réelles ou complexes).
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A , soit $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $A'X = \lambda X$, soit $a = \text{Re}(\lambda)$.
- c. Montrer que $\overline{X}^\top (A')^\top = \overline{\lambda} \overline{X}^\top$. Puis montrer que $a \overline{X}^\top X = \overline{X}^\top DX$.
- d. En déduire que $\alpha \leq a \leq \beta$.

- a. La matrice B est symétrique réelle, même les plus récalcitrants de nos lecteurs auront reconnu le théorème spectral.
- b. La matrice P est orthogonale donc $P^\top = P^{-1}$, les matrices A et A' sont semblables.
- c. • Comme λ est aussi valeur propre de A' , un tel vecteur X existe bien. En “transconjuguant” la relation $A'X = \lambda X$, on obtient bien $\overline{X}^\top (A')^\top = \overline{\lambda} \overline{X}^\top$. On a en effet $\overline{A'} = A'$ car la matrice A est à coefficients réels.
- On calcule

$$\begin{aligned}
 a \overline{X}^\top X &= \frac{1}{2}(\lambda + \overline{\lambda}) \overline{X}^\top X \\
 &= \frac{1}{2} \overline{X}^\top (\lambda X) + \frac{1}{2} (\overline{\lambda} \overline{X}^\top) X \\
 &= \frac{1}{2} \overline{X}^\top A' X + \frac{1}{2} \overline{X}^\top (A')^\top X \\
 &= \frac{1}{2} \overline{X}^\top (A' + (A')^\top) X \\
 &= \frac{1}{2} \overline{X}^\top (P^\top AP + P^\top A^\top P) X \\
 &= \overline{X}^\top P^\top \left(\frac{A + A^\top}{2} \right) P X \\
 &= \overline{X}^\top P^\top B P X = \overline{X}^\top D X .
 \end{aligned}$$

- d. On a $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les λ_k sont les valeurs propres de B . En posant

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ on a facilement } \alpha \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = \overline{X}^\top X \leq \overline{X}^\top D X = \sum_{k=1}^n \lambda_k |x_k|^2 \leq \beta \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = \beta \overline{X}^\top X ,$$

soit l'encadrement $\alpha \overline{X}^\top X \leq a \overline{X}^\top X \leq \beta \overline{X}^\top X$, d'où $\alpha \leq a \leq \beta$ puisque $\overline{X}^\top X$ est un réel strictement positif.

EUC 18 (CCINP 2016). Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^\top M = MM^\top$ et $M^2 = -2I_2$.
 Montrer que $M^\top M$ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres. Montrer que la matrice
 $M' = \frac{M}{\sqrt{2}}$ est orthogonale. Quelles sont les matrices M solutions ?

 On a $(M^T M)^T = M^T M$, la matrice $M^T M$ est symétrique réelle donc diagonalisable.
 Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une de ses valeurs propres, et $X \in \mathbb{R}^2$ un vecteur propre associé, alors
 $M^T M X = \lambda X$ et $X \neq 0$, donc

$$\lambda \|X\|^2 = (X | \lambda X) = (X | M^T M X) = X^T M^T M X = (M X)^T (M X) = \|M X\|^2 \geq 0,$$

d'où $\lambda \geq 0$. De plus, grâce à la commutation des matrices M et M^T ,

$$\begin{aligned} \lambda^2 \|X\|^2 &= \|\lambda X\|^2 = \|M^T M X\|^2 = (M^T M X)^T (M^T M X) = X^T M^T M M^T M X \\ &= X^T M^2 (M^2)^T X = X^T (4I_2) X = 4 X^T X = 4 \|X\|^2, \end{aligned}$$

donc $\lambda^2 = 4$. Donc M^T est diagonalisable avec pour seule valeur propre 2, donc $M^T M$ est
 semblable à $2I_2$, donc $M^T M = 2I_2$. Autrement dit, $(M')^T M' = I_2$, la matrice $M' = \frac{1}{\sqrt{2}} M$
 est orthogonale.

On cherche alors M sous la forme $M = \sqrt{2} R_\theta$ ou $M = \sqrt{2} S_\theta$, avec $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$
 et $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$. Ces matrices vérifient toutes la relation $M^T M = M M^T = 2I_2$.
 Pour les premières ("directes", i.e. de déterminant positif):

$$M^2 = -2I_2 \iff R_\theta^2 = -I_2 \iff R_{2\theta} = R_\pi \iff 2\theta = \pi \bmod{2\pi} \iff \theta = \frac{\pi}{2} \bmod{\pi},$$

on trouve deux solutions $M_1 = \sqrt{2} R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \sqrt{2} R_{-\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.
 Pour les secondes ("indirectes", i.e. de déterminant négatif), on ne trouvera pas de solutions
 puisque les matrices S_θ représentent des symétries par rapport à une droite (réflexions) donc
 $S_\theta^2 = I_2$ et $M^2 = 2I_2 \neq -2I_2$. Les seules solutions sont donc M_1 et M_2 ci-dessus.

EUC 19 (CCMP 2023). Soit E un espace euclidien de dimension n , soit $\mathcal{B}$ une base orthonor-
 male de E . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, on pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on note
 u^* l'endomorphisme de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = A^\top$.

a. Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x) | y) = (x | u^*(y)).$$

b. Montrer que $\text{Ker}(u^*) = (\text{Im}(u))^\perp$, et que $\text{Im}(u^*) = (\text{Ker}(u))^\perp$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que les endomorphismes u et u^* commutent.

c. Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^*)$.

d. Montrer que u et u^* ont les mêmes éléments propres.

- a. Soient $x \in E$, $y \in E$, notons $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ les matrices-colonnes constituées des coordonnées des vecteurs x et y respectivement dans la base $\mathcal{B}$, les vecteurs $u(x)$ et $u^*(y)$ sont alors respectivement représentés par les matrices-colonnes AX et $A^\top Y$. Il s'agit alors de prouver l'égalité $\langle AX, Y \rangle = \langle X, A^\top Y \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$. Mais ceci est facile puisque

$$\langle AX, Y \rangle = (AX)^\top Y = X^\top A^\top Y = \langle X, A^\top Y \rangle .$$

- b. On rappelle que, si E est un espace préhilbertien, si $x \in E$, on a l'équivalence

$$x = 0_E \iff \forall y \in E \quad (x|y) = 0 ,$$

que l'on peut traduire par $E^\perp = \{0_E\}$.

Soit donc $y \in E$. On a alors les équivalences

$$\begin{aligned} y \in \text{Ker}(u^*) &\iff u^*(y) = 0_E \\ &\iff \forall x \in E \quad (x|u^*(y)) = 0 \\ &\iff \forall x \in E \quad (u(x)|y) = 0 \\ &\iff \forall z \in \text{Im}(u) \quad (z|y) = 0 \\ &\iff y \in (\text{Im}(u))^\perp . \end{aligned}$$

On a donc prouvé l'égalité $\text{Ker}(u^*) = (\text{Im}(u))^\perp$.

Comme $(u^*)^* = u$ puisque $(A^\top)^\top = A$, on a donc aussi $\text{Ker}(u) = \text{Ker}((u^*)^*) = (\text{Im}(u^*))^\perp$.

En reprenant l'orthogonal, on obtient $\text{Im}(u^*) = (\text{Ker}(u))^\perp$.

- c. Si $u^* \circ u = u \circ u^*$, alors pour $x \in E$ on a les équivalences

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(u) &\iff \|u(x)\|^2 = 0 \iff (u(x)|u(x)) = 0 \iff (x|u^* \circ u(x)) = 0 \\ &\iff (x|u \circ u^*(x)) = 0 \iff (u^*(x)|u^*(x)) = 0 \iff \|u^*(x)\|^2 = 0 \\ &\iff u^*(x) = 0_E , \end{aligned}$$

donc $\text{Ker}(u^*) = \text{Ker}(u)$.

- d. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $v = u - \lambda \text{id}_E$. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = A - \lambda I_n$, dont la transposée est $A^\top - \lambda I_n$, qui est aussi la matrice représentant $u^* - \lambda \text{id}_E$ dans la base $\mathcal{B}$. Autrement dit,

$$v^* = (u - \lambda \text{id}_E)^* = u^* - \lambda \text{id}_E .$$

De l'hypothèse $u \circ u^* = u^* \circ u$, on déduit facilement que $v \circ v^* = v^* \circ v$. On peut donc appliquer la question c. qui affirme que $\text{Ker}(v^*) = \text{Ker}(v)$, soit $E_\lambda(u^*) = E_\lambda(u)$. On en déduit que u et u^* ont les mêmes valeurs propres (ce sont les scalaires λ pour lesquels $E_\lambda(u) \neq \{0_E\}$), et les mêmes sous-espaces propres.

Remarque. On peut démontrer que la définition de l'endomorphisme u^* à partir de l'endomorphisme u ne dépend pas de la base orthonormale $\mathcal{B}$ choisie dans E , on dit que l'endomorphisme u^* est l'**adjoint** de u . Ensuite, un endomorphisme qui commute avec son adjoint est dit **normal**. De même, une matrice qui commute avec sa transposée est dite **normale**. Tout cela figurait dans des programmes antérieurs.

EUC 20 (CCINP 2023).

- a. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
- b. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $MM^\top \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- c. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer l'existence de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MM^\top = S$.
- d. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement s'il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^\top = SAS^{-1}$.

- a. On sait qu'il existe $P \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec les λ_i réels positifs, tels que $A = PDP^{-1} = PDP^\top$. En posant $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $B = P\Delta P^\top$, on a $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $B^2 = A$. Comme B est symétrique, on a aussi $B^\top B = BB^\top = A$.

Remarque. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors la matrice B construite ci-dessus est aussi définie positive.

- b. Il est clair que $(MM^\top)^\top = MM^\top$, la matrice $S = MM^\top$ est donc symétrique.

Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $X^\top(MM^\top)X = (M^\top X)^\top(M^\top X) = \|M^\top X\|^2 \geq 0$, donc cette matrice symétrique est positive.

Remarque. Si la matrice M est inversible, alors $MM^\top \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ puisque $\|M^\top X\|^2$ n'est alors nul que si la matrice-colonne X est nulle.

- c. Au changement de notations près, c'est la même question que **a.** puisque, B étant symétrique, $BB^\top = B^2$.
- d. • Si A est diagonalisable, écrivons $A = PDP^{-1}$ avec $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. On a alors $D^\top = D = P^{-1}AP$, donc

$$A^\top = (P^{-1})^\top D^\top P^\top = (P^{-1})^\top P^{-1}AP P^\top = SAS^{-1}$$

en posant $S = (P^{-1})^\top P^{-1}$, et on a bien $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ d'après **b.**

• Réciproquement, supposons $A^\top = SAS^{-1}$ avec $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après **a.**, il existe $P \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = P^2 = P^\top P$. Donc $A^\top = P^\top PAP^{-1}(P^\top)^{-1}$, d'où l'on tire

$$PAP^{-1} = (P^\top)^{-1}A^\top P^\top = (PAP^{-1})^\top.$$

La matrice $M = PAP^{-1}$ est alors symétrique réelle, donc diagonalisable. Comme $A = P^{-1}MP$ est semblable à M , elle est aussi diagonalisable.

IV. ANALYSE cours de première année

ANA 1 (CCINP). Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$. Calculer $f'(x)$ lorsque cela est possible. En discutant selon x , simplifier l'expression de $f(x)$.

L'ensemble de définition de Arcsin étant $[-1, 1]$, on vérifie que $\frac{2x}{1+x^2}$ appartient à cet intervalle pour tout réel x , c'est une conséquence des identités remarquables $1 + x^2 - 2x =$

$(x-1)^2 \geq 0$ et $1+x^2+2x=(x+1)^2 \geq 0$. Donc $D_f = \mathbb{R}$. La fonction f est par ailleurs continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues.

Comme le domaine de dérivabilité de Arcsin est $] -1, 1[$, la fonction f n'est pas *a priori* dérivable lorsque $\frac{2x}{1+x^2} = \pm 1$, c'est-à-dire pour $x = \pm 1$. Sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, la fonction f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}} = \frac{2}{1+x^2} \operatorname{sgn}(1-x^2).$$

Ainsi,

- sur $] -\infty, -1[$, on a $f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}$, donc $f(x) = -2 \operatorname{Arctan} x + C_1$. On calcule par ailleurs $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, ce qui donne $C_1 = -\pi$. Comme f est continue, notamment au point -1 , on obtient

$$\forall x \in] -\infty, -1] \quad f(x) = -\pi - 2 \operatorname{Arctan} x.$$

- sur $] -1, 1[$, $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$, donc $f(x) = 2 \operatorname{Arctan} x + C_2$. Avec $f(0) = 0$, on obtient $C_2 = 0$. Par continuité, on a

$$\forall x \in [-1, 1] \quad f(x) = 2 \operatorname{Arctan} x.$$

- sur $] 1, +\infty[$, $f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}$, donc $f(x) = -2 \operatorname{Arctan} x + C_3$. Avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, on a $C_3 = \pi$, donc

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad f(x) = \pi - 2 \operatorname{Arctan} x.$$

ANA 2 (CCINP). Pour n entier naturel, soit $I_n = \int_0^1 \frac{t^n + 2t^{2n}}{1 + t^n + t^{2n}} dt$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$.

• Tout simplement, $0 \leq I_n \leq \int_0^1 (t^n + 2t^{2n}) dt = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

• On fait une hipépé, en remarquant que $\frac{d}{dt}(1 + t^n + t^{2n}) = n(t^{n-1} + 2t^{2n-1})$, donc

$$n I_n = \int_0^1 t \frac{nt^{n-1} + 2nt^{2n-1}}{1 + t^n + t^{2n}} dt = [t \ln(1 + t^n + t^{2n})]_0^1 - \int_0^1 \ln(1 + t^n + t^{2n}) dt = \ln(3) - J_n,$$

avec $J_n = \int_0^1 \ln(1 + t^n + t^{2n}) dt$. Mais on a $0 \leq J_n \leq \int_0^1 (t^n + t^{2n}) dt = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = \ln 3$. Autrement dit, $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln 3}{n}$.

ANA 3 (Centrale). Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on définit $g_t : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $g_t(x) = x^3 + xt - 1$.

a. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, montrer qu'il existe un unique $u(t) \in \mathbb{R}_+$ tel que $g_t(u(t)) = 0$.

b. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$.

c. Donner un équivalent simple $q(t)$ de $u(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$, puis un équivalent de $q(t) - u(t)$.

d. Montrer que u est une bijection continue de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle à préciser.

a. Pour $t \geq 0$, la fonction g_t est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $g'_t(x) = 3x^2 + t \geq 0$ (nul seulement pour $x = 0$ dans le cas $t = 0$), donc g_t est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ vers $g_t(\mathbb{R}_+) = [g_t(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} g_t(x)[= [-1, +\infty[$. Comme $0 \in g_t(\mathbb{R}_+)$, il admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}_+$ par g_t , qui est le $u(t)$ de l'énoncé: $u(t) = g_t^{-1}(0)$. Remarquons que $g_t(0) = -1$ entraîne $u(t) \neq 0$ donc $u(t) > 0$, et $g_t(1) = t \geq 0 = g_t(u(t))$ entraîne $u(t) \leq 1$ puisque la fonction g_t est croissante, cela servira pour la question d.

b. On peut remarquer que $g_t\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^3} > 0 = g_t(u(t))$. Comme la fonction g_t est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $0 \leq u(t) \leq \frac{1}{t}$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$ par encadrement.

c. Pour tout réel positif t , on a $u(t)^3 + t u(t) = 1$. Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$, le terme $u(t)^3$ est négligeable devant le terme $t u(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$, donc $1 = u(t)^3 + t u(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t u(t)$, soit $u(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$. On posera donc $q(t) = \frac{1}{t}$.

Ensuite,

$$u(t)^3 = 1 - t u(t) = t \left(\frac{1}{t} - u(t) \right) = t (q(t) - u(t)) ,$$

soit $q(t) - u(t) = \frac{u(t)^3}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$. On a donc, pour $t \rightarrow +\infty$, le développement asymptotique

$$u(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^4} + o\left(\frac{1}{t^4}\right) .$$

d. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $0 < u(t) \leq 1$ (cf. fin de la question a.) et $t = \frac{1 - u(t)^3}{u(t)}$. Considérons

la fonction $h :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{1 - x^3}{x}$. Cette fonction h est dérivable sur $]0, 1]$ avec $h'(x) = -\frac{2x^3 + 1}{x^2} > 0$, elle est donc continue et strictement croissante sur $]0, 1]$, donc établit une bijection (notée $\widehat{h}$) de $]0, 1]$ vers $[h(1), \lim_{x \rightarrow 0} h(x)[= [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$. Comme, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $u(t) \in]0, 1]$ et $\widehat{h}(u(t)) = t$, on a $u(t) = (\widehat{h})^{-1}(t)$, autrement dit $u = (\widehat{h})^{-1}$, donc u est une bijection continue (et strictement décroissante) de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$.

ANA 4 (CMT 2022). Trouver les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que

$$(\mathbf{E}) : \quad \int_0^1 f(x) \, dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 f(x^2)^2 \, dx .$$

On essaiera d'écrire le nombre $\frac{1}{3}$ comme une intégrale.

On remarque que $\frac{1}{3} = \int_0^1 u^2 \, du$. Le changement de variable $x = u^2$ dans l'intégrale de gauche conduit à

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 2u f(u^2) \, du .$$

On se souvient alors de la petite inégalité classique $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, qui résulte de l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$. On en déduit que, quelle que soit la fonction f continue sur $[0, 1]$, on a $2u f(u^2) \leq u^2 + f(u^2)^2$ pour tout $u \in [0, 1]$ puis, en intégrant,

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 2u f(u^2) \, du \leq \int_0^1 u^2 \, du + \int_0^1 f(u^2)^2 \, du .$$

Il s'agit alors d'étudier le cas d'égalité: on a

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}) &\iff \int_0^1 (u^2 + f(u^2)^2 - 2u f(u^2)) \, du = 0 \\ &\iff \int_0^1 (u - f(u^2))^2 \, du = 0 \\ &\iff \forall u \in [0, 1] \quad (u - f(u^2))^2 = 0 \quad (*) \\ &\iff \forall u \in [0, 1] \quad f(u^2) = u \\ &\iff \forall x \in [0, 1] \quad f(x) = \sqrt{x} . \end{aligned}$$

(*) résulte du théorème de stricte positivité puisque $u \mapsto (u - f(u^2))^2$ est continue et positive sur $[0, 1]$.

V. SUITES et SÉRIES NUMÉRIQUES

SUI 1 (CMT). a. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, l'équation $1 + \ln(n + x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$, qui sera notée u_n .

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c. Montrer que l'on a $u_n \leq n$ à partir d'un certain rang.

d. Trouver un équivalent de u_n .

- a. Soit $f_n : x \mapsto x - \ln(n+x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $f'_n(x) = \frac{n+x-1}{n+x} \geq 0$, l'inégalité étant stricte à l'exception de $f'_1(0) = 0$. Chaque fonction f_n est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et établit alors une bijection de $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ vers $f_n(\mathbb{R}_+) = [f_n(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)[= [-\ln(n), +\infty[$. Comme $1 \in f_n(\mathbb{R}_+)$, le nombre 1 admet un unique antécédent par f_n dans $\mathbb{R}_+$, i.e. l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution u_n dans $\mathbb{R}_+$. On a alors $f_n(u_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- b. On note d'abord que, pour tout x réel positif, $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. En particulier, pour tout n ,

$$f_{n+1}(u_{n+1}) = 1 = f_n(u_n) \geq f_{n+1}(u_n).$$

De l'inégalité $f_{n+1}(u_{n+1}) \geq f_{n+1}(u_n)$ et de la croissance stricte sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction f_n , on déduit que $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.

- c. On a $f_n(n) = n - \ln(2n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, il existe donc un rang n_0 à partir duquel $f_n(n) \geq 1 = f_n(u_n)$. De nouveau par croissance stricte de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$, on déduit que $n \geq u_n$ pour tout $n \geq n_0$.
- d. De l'encadrement $0 \leq u_n \leq n$, vrai à partir d'un certain rang, on déduit que

$$1 + \ln(n) \leq 1 + \ln(n + u_n) = u_n \leq 1 + \ln(2n) = 1 + \ln(2) + \ln(n).$$

Le minorant et le majorant de ce dernier encadrement étant tous deux équivalents à $\ln(n)$, on déduit que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

SUI 2 (CMT). Convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{R(n)}{n(n+1)}$, où $R(n)$ est le reste de la division

euclidienne de l'entier n par 5. Exprimer la somme partielle $S_{5n} = \sum_{k=1}^{5n} \frac{R(k)}{k(k+1)}$ à l'aide de

$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et en déduire la somme de la série. On admettra le développement asymptotique $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

La série considérée converge car $0 \leq \frac{R(n)}{n(n+1)} \leq \frac{4}{n^2}$.

On transforme l'expression de la somme partielle S_{5n} en utilisant la décomposition en éléments simples $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, et en regroupant les termes suivant leur congruence modulo 5 :

$$\begin{aligned} S_{5n} &= \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(5p+1)(5p+2)} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{2}{(5p+2)(5p+3)} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{3}{(5p+3)(5p+4)} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{4}{(5p+4)(5p+5)} \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5p+1} - \frac{1}{5p+2} + \frac{2}{5p+2} - \frac{2}{5p+3} + \frac{3}{5p+3} - \frac{3}{5p+4} + \frac{4}{5p+4} - \frac{4}{5p+5} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5p+1} + \frac{1}{5p+2} + \frac{1}{5p+3} + \frac{1}{5p+4} + \frac{1}{5p+5} - \frac{1}{p+1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{5n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_{5n} - H_n.
\end{aligned}$$

Enfin,

$$S_{5n} = \left(\ln(5n) + \gamma + o(1) \right) - \left(\ln(n) + \gamma + o(1) \right) = \ln 5 + o(1),$$

autrement dit $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{5n} = \ln(5)$. Comme on sait que la série converge, la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente. Or, on vient d'exhiber une suite extraite de (S_n) qui converge vers $\ln(5)$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(5)$, autrement dit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{R(n)}{n(n+1)} = \ln(5)$.

SUI 3 (CMT). Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

a. Étudier la suite (u_n) .

b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right)$.

c. Donner un équivalent de u_n . En déduire la nature de la série $\sum_n u_n$.

a. La fonction $f : x \mapsto x e^{-x}$ est continue, et $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f . Donc la suite (u_n) est bien définie et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) \leq x$, on en déduit la décroissance de la suite (u_n) . Comme la suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0), elle converge. Le seul point fixe de f dans $\mathbb{R}$ est 0, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b. On a

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n} (e^{u_n} - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

par composition de limites, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

c. Utilisons le théorème de Césaro (*hors programme*). De la question b., on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) = 1,$$

soit, après télescopage, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{nu_n} - \frac{1}{n\alpha} \right) = 1$, soit encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_n} = 1$, donc $u_n \sim \frac{1}{n}$. La série de terme général u_n est donc divergente.

SUI 4 (CMT). On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{u_n}$.

Soit p un entier naturel non nul, on a alors

$$\lfloor \sqrt{k} \rfloor = p \iff p \leq \sqrt{k} < p+1 \iff p^2 \leq k < (p+1)^2,$$

il y a donc $(p+1)^2 - p^2 = 2p+1$ entiers naturels k tels que $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = p$.

En particulier, il y a $2n-1$ termes qui valent $n-1$ dans la somme $\sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$. Donc

$u_n \geq (2n-1)(n-1)$ et, pour $n \geq 1$, on a $0 < \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{(2n-1)(n-1)}$. Par comparaison, la série $\sum \frac{1}{u_n}$ est convergente.

SUI 5 (CCINP). On donne $u_0 \in]0, 1[$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2}$.

- a. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
- b. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = 2^n u_n$ admet une limite l strictement positive.

- a. • Soit $f : x \mapsto \frac{x+x^2}{2}$, l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f (on vérifie que f est continue et croissante sur $[0, 1]$ avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$), on a donc $u_n \in [0, 1]$ pour tout n . De plus, $f(x) \leq x$ sur $[0, 1]$, donc la suite (u_n) est décroissante et, comme elle est minorée, elle converge. Sa limite est un point fixe de f (car f est continue), donc 0 ou 1, mais 1 est exclu (on a $u_0 < 1$ et la suite est décroissante), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- On a $u_n > 0$ pour tout n , et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} + \frac{u_n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$. La règle de d'Alembert donne alors la convergence de la série $\sum u_n$.

- b. Notons ensuite que $v_{n+1} = 2^{n+1} u_{n+1} = 2^n u_n + 2^n u_n^2 = v_n + 2^n u_n^2$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k u_k^2 = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k u_k^2.$$

La série de terme général $w_k = 2^k u_k^2$ converge, de nouveau par d'Alembert, car

$$\frac{w_{k+1}}{w_k} = \frac{2^{k+1} u_{k+1}^2}{2^k u_k^2} = 2 \left(\frac{u_{k+1}}{u_k} \right)^2 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

En posant $S = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k u_k^2$, on a $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n u_n = u_0 + S > 0$.

SUI 6 (Centrale). Soit α un réel, soit $N = \max \left\{ 1, 1 + \lfloor |\alpha| \rfloor \right\}$. Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n \geq N} u_n, \text{ avec } u_n = \ln \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n} + \alpha} \right).$$

Il suffit de faire un développement asymptotique du terme général. Et commençons par mettre en facteur, au numérateur comme au dénominateur, le terme prépondérant $\sqrt{n}$:

$$\begin{aligned} u_n &= \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - \frac{\alpha}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1+\alpha}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \\ &= x_n + y_n + z_n, \end{aligned}$$

où les termes sont nommés dans l'ordre. La série de terme général $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (critère des séries alternées), celle de terme général $z_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ converge absolument (comparaison aux séries de Riemann). Enfin, celle de terme général $y_n = \frac{1+\alpha}{2n}$ converge si et seulement si $1+\alpha$ est nul.

On conclut que $\sum_{n \geq N} u_n$ converge si et seulement si $\alpha = -1$.

SUI 7 (CMT). Soit p un entier naturel. Nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$, où $u_n = \frac{1}{(n+p)!} \sum_{k=1}^n k!$

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n k!$, alors $S_n \sim n!$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. En effet,

$$\frac{S_n}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{k!}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

En conservant les deux premiers termes et en majorant les $n-2$ autres par le plus grand d'entre eux, on obtient

$$1 \leq \frac{S_n}{n!} \leq 1 + \frac{1}{n} + (n-2) \times \frac{1}{n(n-1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Par le théorème d'encadrement, on déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n!} = 1$, d'où le résultat annoncé.

On a alors $u_n \sim \frac{n!}{(n+p)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^p}$, d'où la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ si et seulement si $p > 1$, soit encore $p \geq 2$.

SUI 8 (CCINP).

- a. Nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$.
- b. Équivalent de $v_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Je réponds d'abord à la question **b.** : on a, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) = \ln\left(\frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \\ &\sim \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \sim \frac{1}{n \ln(n)}. \end{aligned}$$

Du coup, en posant $u_n = \frac{1}{n \ln(n)}$, on a $u_n \sim v_n$, la série $\sum_{n \geq 2} v_n$ diverge (c'est une série télescopique et la suite associée $(\ln(\ln n))$ diverge) ; comme il s'agit de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ est elle aussi divergente.

SUI 9 (CMT). Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(a) = \frac{n! n^{a-1}}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}$.

- a. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{u_{n+1}(a)}{u_n(a)}\right)$ est convergente.
- b. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers une fonction f strictement positive.

- a. Posons $v_n(a) = \ln\left(\frac{u_{n+1}(a)}{u_n(a)}\right)$ pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Un petit calcul donne

$$v_n(a) = \ln\left[\frac{n+1}{n+a} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{a-1}\right] = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) + (a-1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Finalement, $v_n(a) = a \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln \left(1 + \frac{a}{n}\right)$. En développant ensuite $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 de façon “économique”, à savoir sous la forme $\ln(1+x) = x + O(x^2)$, on obtient

$$v_n(a) = a \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - \left(\frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit la convergence de la série de terme général $v_n(a)$.

- b. Comme $v_n(a) = \ln u_{n+1}(a) - \ln u_n(a)$, on reconnaît une série télescopique. Sa convergence équivaut à la convergence de la suite de terme général $\ln u_n(a)$. Posons alors $l(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n(a)$. On a alors $f(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(a) = e^{l(a)} > 0$.

SUI 10 (CCINP). Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{(-1)^n + \sqrt{n}}$.

Posons $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x}$. En divisant numérateur et dénominateur par $\sqrt{n}$ et en utilisant le fait que la fonction sinus est impaire, on peut écrire

$$u_n = \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = f\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Écrivons $f(x) = (\sin x)(1+x)^{-1}$ et développons chacun des facteurs à l'ordre deux au voisinage de zéro (DL “fort” avec un reste en $O(x^3)$) :

$$\frac{\sin x}{1+x} = (x + O(x^3)) (1 - x + x^2 + O(x^3)) = x - x^2 + O(x^3).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$, le DL ci-dessus fournit un développement asymptotique de u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = x_n + y_n + z_n :$$

la série de terme général $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (*critère spécial des séries alternées*), la série de terme général $z_n = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge absolument (*comparaison à une série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2}$, convergente*) ; par contre, la série de terme général $y_n = -\frac{1}{n}$ est divergente. On en déduit que $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

SUI 11 (CCINP). Nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{S_n}$, avec $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt[k]{k}$.

On a $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n f(k)}$, en posant $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln x}$ pour $x > 0$. On étudie alors

la fonction f : elle est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, sa dérivée est $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} f(x)$, donc f est croissante sur $]0, e]$, décroissante sur $[e, +\infty[$, et atteint un maximum M pour $x = e$: $M = f(e) = e^{\frac{1}{e}}$. On a alors $0 < \sum_{k=1}^n f(k) \leq nM$, puis $u_n \geq \frac{1}{nM}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{nM}$ diverge (série harmonique, à un facteur constant près), on en déduit la divergence de la série de terme général u_n .

SUI 12 (CCINP). Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. Convergence et calcul de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\cos \frac{x}{2^n} \right)$.

Posons $u_n = \ln \left(\cos \frac{x}{2^n} \right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, avec $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ fixé. Alors u_n est bien défini car $0 < \frac{x}{2^n} < \frac{\pi}{2}$, donc $\cos \frac{x}{2^n} > 0$. Ensuite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{x}{2^n} = 1$, donc

$$u_n = \ln \left(\cos \frac{x}{2^n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \cos \frac{x}{2^n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{2^n} \right)^2 = -\frac{x^2}{2^{2n+1}}$$

donc la série de terme général u_n est convergente (à termes négatifs).

Pour le calcul de la somme, la formule $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ permet, pour tout réel a non multiple de π , d'écrire $\cos a = \frac{\sin 2a}{2 \sin a}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \ln \left(\frac{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^n}} \right)$.

Si l'on exprime la somme partielle d'ordre n de la série, on observe alors un télescopage:

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{\sin \frac{x}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^k}} \right) = \ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{\sin \frac{x}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^k}} \right) = \ln \left(\frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \right).$$

De $\sin u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, on déduit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\cos \frac{x}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \right) = \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)$.

SUI 13 (Mines-Ponts). Soit $t \in \mathbb{R}^*$. On pose $u_n = e^{it \ln(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. En étudiant u_{2n} et u_{3n} , montrer que la suite complexe (u_n) diverge.

b. En considérant $u_{n+1} - u_n$, montrer que la série $\sum \frac{u_n}{n}$ diverge.

a. Pour tout n , on a $|u_n| = 1$ donc, si la suite (u_n) converge vers l , alors $|l| = 1$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = l$ car c'est une suite extraite, mais on a aussi $u_{2n} = e^{it \ln(2n)} = e^{it \ln(2)} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{it \ln(2)} l$, donc $l = e^{it \ln(2)} l$ par unicité de la limite.

Comme $l \neq 0$, on en tire $e^{it \ln(2)} = 1$, soit $t \ln(2) = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$.

De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{3n} = l = e^{it \ln(3)} l$, d'où $t \ln(3) = 2k'\pi$ avec $k' \in \mathbb{Z}^*$.

On aurait alors $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} = \frac{k'}{k} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde, par exemple parce que cela peut s'écrire aussi $3^k = 2^{k'}$, ce qui contredirait l'unicité de la décomposition d'un entier en facteurs premiers.

Moralité: la suite (u_n) diverge.

b. On a

$$u_{n+1} - u_n = e^{it \ln(n+1)} - e^{it \ln(n)} = e^{it \ln(n)} \left(e^{it \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 \right) = u_n \left(\frac{it}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

en utilisant le développement limité $e^x = 1 + x + O(x^2)$ lorsque x tend vers 0. La suite (u_n) étant bornée, récrivons cela $u_{n+1} - u_n = it \frac{u_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ou encore sous la forme

$$\frac{u_n}{n} = \frac{1}{it} (u_{n+1} - u_n) + r_n, \quad \text{avec} \quad r_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On a vu en a. que la suite (u_n) diverge, la série télescopique associée $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est alors aussi divergente. Comme la série $\sum r_n$ converge, par opérations, on déduit que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ est divergente.

SUI 14 (CCINP 2016).

a. Soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que $H_n \sim \ln(n)$.

b. Soit (u_n) une suite de réels convergente, de limite L non nulle. Donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}$ lorsque n tend vers l'infini.

a. Classique comparaison série-intégrale: la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $k \geq 2$, l'encadrement

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t} = \ln(k) - \ln(k-1).$$

En sommant pour k de 2 à n (et en rajoutant 1), on obtient

$$\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

Comme le minorant et le majorant sont tous deux équivalents à $\ln(n)$ (*facile!*), on a par encadrement $H_n \sim \ln(n)$.

b. En décomposant $u_k = (u_k - L) + L$, on a $S_n = L H_n + \sum_{k=1}^n \frac{u_k - L}{k} = L H_n + R_n$.

Si l'on prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_n}{H_n} = 0$, on aura $R_n = o(H_n)$, donc $S_n \sim L H_n \sim L \ln(n)$.

Allons-y, zou, c'est parti! Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors un rang N à partir duquel $|u_k - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n \geq N$, on a $R_n = \sum_{k=1}^n \frac{u_k - L}{k} = \sum_{k=1}^N \frac{u_k - L}{k} + \sum_{k=N+1}^n \frac{u_k - L}{k}$, donc

$$\frac{R_n}{H_n} = \frac{1}{H_n} \sum_{k=1}^N \frac{u_k - L}{k} + \frac{1}{H_n} \sum_{k=N+1}^n \frac{u_k - L}{k}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$, le premier terme de cette somme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, il existe donc un rang N_1 à partir duquel il est majoré par $\frac{\varepsilon}{2}$ en valeur absolue. Quant au deuxième terme, on peut majorer sa valeur absolue ainsi:

$$\left| \frac{1}{H_n} \sum_{k=N+1}^n \frac{u_k - L}{k} \right| \leq \frac{1}{H_n} \sum_{k=N+1}^n \frac{|u_k - L|}{k} \leq \frac{1}{H_n} \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=N+1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{H_n} \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $n \geq \max\{N, N_1\}$, on a donc $\left| \frac{R_n}{H_n} \right| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_n}{H_n} = 0$. Finalement, $S_n \sim L \ln(n)$.

Cette démonstration, en revenant à la définition de la limite, est très proche de la démonstration du théorème de Cesàro.

SUI 15 (ENSEA 2016). Soit $\alpha \in]0, 1[$. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = (n + (-1)^n)^\alpha - n^\alpha.$$

On a

$$\begin{aligned} u_n &= n^\alpha \left[\left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^\alpha - 1 \right] \\ &= n^\alpha \left[1 + \alpha \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 \right] \\ &= v_n + w_n \end{aligned}$$

avec $v_n = \alpha \frac{(-1)^n}{n^{1-\alpha}}$ et $w_n = O\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right)$. La série de terme général v_n converge grâce au critère spécial des séries alternées: on a $1 - \alpha > 0$, donc la suite $\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)$ est décroissante et tend vers zéro. On a $1 < 2 - \alpha < 2$, donc la série de terme général w_n converge. Finalement, la série $\sum u_n$ converge.

VI. SUITES et SÉRIES de FONCTIONS

SSF 1 (Centrale). On pose $f_0(x) = 0$, puis $f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + f_n(t)^2} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que, pour tout n , la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Montrer $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$.
- En déduire que la suite (f_n) admet une limite simple f , et que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que f est solution de l'équation différentielle non linéaire $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- Par récurrence sur n . C'est trivial pour $n = 0$ et, si c'est vrai pour n , alors la fonction $t \mapsto t^2 + f_n(t)^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives ou nulles. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$, par composition, la fonction $t \mapsto \sqrt{t^2 + f_n(t)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction f_{n+1} en est une primitive, c'est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Notons d'abord que $f_n(x) \geq 0$ pour tout n et pour $x \geq 0$ (évident). Ensuite, si a et b sont des réels tels que $0 \leq a \leq b$ et si $t \geq 0$, on a

$$0 \leq \sqrt{t^2 + b^2} - \sqrt{t^2 + a^2} = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{t^2 + b^2} + \sqrt{t^2 + a^2}} \leq \frac{b^2 - a^2}{b + a} = b - a.$$

On procède alors par récurrence sur n . Les inégalités à démontrer sont vraies pour $n = 0$ puisque $f_1(x) = \text{sgn}(x) \frac{x^2}{2}$, donc pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a bien $0 \leq f_1(x) - f_0(x) = \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{2}$. Si l'on suppose la propriété vraie au rang n , alors, pour $x \geq 0$,

$$f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) = \int_0^x \left(\sqrt{t^2 + f_{n+1}(t)^2} - \sqrt{t^2 + f_n(t)^2} \right) dt.$$

Cette expression est positive puisque $0 \leq f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$ donc l'intégrande est positif. Puis $\sqrt{t^2 + f_{n+1}(t)^2} - \sqrt{t^2 + f_n(t)^2} \leq f_{n+1}(t) - f_n(t) \leq \frac{t^{n+2}}{(n+2)!}$ par hypothèse et, en intégrant sur $[0, x]$, on obtient $f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) \leq \int_0^x \frac{t^{n+2}}{(n+2)!} dt = \frac{x^{n+3}}{(n+3)!}$, ce qui achève la récurrence.

- Pour tout x réel positif, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$ converge (série exponentielle), donc par comparaison de séries à termes positifs, la série télescopique $\sum_{n \geq 0} (f_{n+1}(x) - f_n(x))$ converge.

On en déduit la convergence de la suite $(f_n(x))$, on a donc prouvé la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$ par parité: on montre en effet par récurrence que les fonctions f_n sont impaires.

Si on fixe $A > 0$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-A, A]$, on a

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} \leq \frac{A^{n+2}}{(n+2)!}$$

et la série majorante $\sum_{n \geq 0} \frac{A^{n+2}}{(n+2)!}$ converge, on a ainsi prouvé la convergence normale sur $[-A, A]$ (donc sur tout segment de $\mathbb{R}$) de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} (f_{n+1} - f_n)$. Or, f est la somme de cette série, et chaque fonction $f_{n+1} - f_n$ est continue, donc f est continue.

- d. Posons $g_n(t) = \sqrt{t^2 + f_n(t)^2}$. Alors les fonctions g_n sont continues sur $\mathbb{R}$, et la suite de fonctions (g_n) converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$: en effet, on a montré en **b.** que, si $t \in [-A, A]$ avec $A > 0$, alors

$$|g_{n+1}(t) - g_n(t)| \leq |f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leq \frac{|t|^{n+2}}{(n+2)!} \leq \frac{A^{n+2}}{(n+2)!},$$

la série majorante étant convergente. Cela prouve la convergence normale, donc uniforme, sur $[-A, A]$, de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} (g_{n+1} - g_n)$, c'est-à-dire la convergence uniforme sur $[-A, A]$ de la suite de fonctions (g_n) . On peut donc intervertir limite et intégrale sur le segment $[0, x]$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x g_n(t) dt = \int_0^x \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) dt,$$

soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + f(t)^2} dt$, soit $f(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + f(t)^2} dt$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2}.$$

SSF 2 (CMT). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue et 2π -périodique. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \int_0^n f(x+t) f(t) dt.$$

Soit $N = \left\lfloor \frac{n}{2\pi} \right\rfloor$, soit $r = n - 2\pi N$.

- a. Montrer que $F_n(x) = \frac{N}{n} \int_0^{2\pi} f(x+t) f(t) dt + \frac{1}{n} \int_0^r f(x+t) f(t) dt$.
- b. Montrer que la suite de fonctions (F_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction F que l'on précisera.

Commençons par noter que $N \leq \frac{n}{2\pi} < N+1$, donc $2\pi N \leq n < 2\pi(N+1)$, d'où l'on tire l'encadrement $0 \leq r < 2\pi$, et aussi $\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{n} < \frac{N}{n} \leq \frac{1}{2\pi}$, donc $\left| \frac{N}{n} - \frac{1}{2\pi} \right| \leq \frac{1}{n}$.

- a. On a d'abord, par la relation de Chasles,

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \left(\int_0^{2\pi N} f(x+t) f(t) dt + \int_{2\pi N}^n f(x+t) f(t) dt \right).$$

Ensuite, pour tout réel x fixé, la fonction $t \mapsto f(t) f(x+t)$ est 2π -périodique, donc

$$\int_0^{2\pi N} f(x+t) f(t) dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x+t) f(t) dt = N \int_0^{2\pi} f(x+t) f(t) dt ,$$

et $\int_{2\pi N}^n f(x+t) f(t) dt = \int_0^{n-2\pi N} f(x+t) f(t) dt = \int_0^r f(x+t) f(t) dt$. Au final,

$$F_n(x) = \frac{N}{n} \int_0^{2\pi} f(x+t) f(t) dt + \frac{1}{n} \int_0^r f(x+t) f(t) dt .$$

- b.** La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, elle est donc bornée d'où l'existence de $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$. On a alors $\left| \int_0^r f(x+t) f(t) dt \right| \leq r \|f\|_\infty^2 \leq 2\pi \|f\|_\infty^2$. Par ailleurs, il résulte des remarques faites en préambule que $\frac{N}{n} = \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{2\pi} \right\rfloor \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi}$. On en déduit que, pour x réel fixé, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) f(t) dt$. On a ainsi prouvé la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (F_n) vers la fonction

$$g : x \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) f(t) dt .$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} |F_n(x) - g(x)| &= \left| \frac{1}{n} \int_0^r f(x+t) f(t) dt + \left(\frac{N}{n} - \frac{1}{2\pi} \right) \int_0^{2\pi} f(x+t) f(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \cdot 2\pi \|f\|_\infty^2 + \left| \frac{N}{n} - \frac{1}{2\pi} \right| \cdot 2\pi \|f\|_\infty^2 \\ &\leq \frac{2}{n} \cdot 2\pi \|f\|_\infty^2 , \end{aligned}$$

majoration uniforme, ce qui montre que $\|F_n - g\|_\infty \leq \frac{4\pi}{n} \|f\|_\infty^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On a bien la convergence uniforme de (F_n) vers g sur $\mathbb{R}$.

SSF 3 (CMT). Pour x complexe, on pose $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-kx^2}$.

- Quel est l'ensemble de définition D (dans le plan complexe) de la fonction S ?
- Convergence normale de la série sur l'intervalle $I = D \cap \mathbb{R}$. Continuité de la fonction somme S sur I .
- Calculer $S(x)$.
- Donner un équivalent de $S(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.

- Notons d'abord que, pour z complexe, on a $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$, pour le voir il suffit d'écrire $z = a + ib$. Posons alors $z = x^2$ et $u_k = k e^{-kz}$. Alors $|u_k| = k e^{-k \operatorname{Re}(z)} = k (e^{-\operatorname{Re}(z)})^k$. Discutons :

- si $\operatorname{Re}(z) \leq 0$, alors $e^{-\operatorname{Re}(z)} \geq 1$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} |u_k| = +\infty$, la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ est alors grossièrement divergente ;

- si $\operatorname{Re}(z) > 0$, alors $k^2 |u_k| = k^3 e^{-k \operatorname{Re}(z)} = \exp(3 \ln(k) - k \operatorname{Re}(z)) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, donc la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge absolument d'après le critère de Riemann.

Bilan. La série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge si et seulement si $\operatorname{Re}(x^2) > 0$, je laisse le lecteur se persuader que, en posant $x = x_1 + ix_2$, différentes formulations équivalentes sont

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(x^2) > 0 &\iff x \neq 0 \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{4} < \arg(x) < \frac{\pi}{4} \pmod{\pi} \\ &\iff |x_2| < |x_1|. \end{aligned}$$

b. On a $I = \mathbb{R}^*$. En posant $u_k(x) = k e^{-kx^2}$, on a $\|u_k\|_{\infty, I} = \sup_{x \in I} |u_k(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} u_k(x) = k$, et la série de terme général k diverge, il n'y a donc pas convergence normale sur $I = \mathbb{R}^*$ de la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} u_k$. Par contre, si on fixe $a > 0$, en posant $I_a =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$, on a $\|u_k\|_{\infty, I_a} = u_k(a)$ qui est le terme général d'une série convergente, il y a donc convergence normale de la série $\sum u_k$ sur tout intervalle I_a , et a fortiori sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}^*$. Les fonctions u_k étant continues sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit la continuité de la fonction somme S sur $I = \mathbb{R}^*$.

c. Par des calculs classiques sur des séries entières (de rayon de convergence 1), on a, pour tout $r \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n r^n = r \sum_{n=1}^{+\infty} n r^{n-1} = r \frac{d}{dr} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \right) = r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{1-r} \right) = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

En appliquant cela avec $r = e^{-x^2}$, on obtient

$$\forall x \in I = \mathbb{R}^* \quad S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-kx^2} = \frac{e^{-x^2}}{(1 - e^{-x^2})^2} = \frac{e^{x^2}}{(e^{x^2} - 1)^2}.$$

d. De $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, on déduit $S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^4}$.

SSF 4 (CMT). Calculer $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$ en précisant le mode de convergence de la série de fonctions. Calculer ensuite les intégrales

$$I_p = \int_0^\pi S(x) \cos px \, dx \quad (p \in \mathbb{N}).$$

Calculons d'abord

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{2^n} = \frac{e^{ix}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n = \frac{e^{ix}}{2 - e^{ix}} = \frac{e^{ix} (2 - e^{-ix})}{(2 - e^{ix})(2 - e^{-ix})} = \frac{2e^{ix} - 1}{5 - 4 \cos x}.$$

On a reconnu une série géométrique de raison $\frac{e^{ix}}{2}$. Il ne reste plus qu'à extraire la partie réelle :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{2^n} = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{2^n} \right) = \frac{2 \cos x - 1}{5 - 4 \cos x}.$$

Fixons un entier naturel p , posons alors $f(x) = \frac{2 \cos x - 1}{5 - 4 \cos x} \cos(px) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, avec

$u_n(x) = \frac{\cos(nx) \cos(px)}{2^n}$. Comme $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{2^n}$, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge

normalement sur $\mathbb{R}$, en particulier elle converge uniformément sur le segment $[0, \pi]$, ce qui autorise à intervertir série et intégrale. Par ailleurs,

$$\int_0^\pi \cos(nx) \cos(px) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n+p)x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n-p)x) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$\text{On obtient finalement } I_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^\pi \cos(nx) \cos(px) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 0 \\ \frac{\pi}{2^{p+1}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

SSF 5 (Mines-Ponts 2016) Soit α un réel. Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = n^\alpha x (1-x)^n$.

- Pour quels réels α la suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
- Pour quels réels α la série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

- Il y a convergence simple de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction nulle sur $[0, 1]$: en effet, $f_n(0) = f_n(1) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et, pour $x \in]0, 1[$, on a

$$\ln(f_n(x)) = \alpha \ln(n) + \ln(x) + n \ln(1-x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

par croissances comparées, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

On étudie les variations de la fonction f_n sur $[0, 1]$. On a $f'_n(x) = n^\alpha (1-x)^{n-1} (1 - (n+1)x)$, on en déduit que f_n est croissante sur $[0, a_n]$, puis décroissante sur $[a_n, 1]$ avec $a_n = \frac{1}{n+1}$, et d'autre part $f_n(0) = f_n(1) = 0$. Dresser un tableau de variations! On a donc

$$\|f_n\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n^\alpha}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha-1}}{e}.$$

La convergence est uniforme sur $[0, 1]$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$, donc **ssi** $\alpha < 1$.

- b. La série de fonctions $\sum f_n$ converge **normalement** sur $[0, 1]$ lorsque la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge, et le calcul ci-dessus montre que cela se produit **ssi** $\alpha < 0$. D'après le cours, cette condition est suffisante pour qu'il y ait convergence uniforme de la série sur $[0, 1]$. A priori, il pourrait y avoir convergence uniforme sans qu'il y ait convergence normale.

Cependant, pour $\alpha = 0$, la série étudiée est une série géométrique (convergente pour tout $x \in]0, 1[$), donc on sait calculer sa somme. On voit que $s_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x = 0 \\ 1 & \text{pour } x \in]0, 1[\end{cases}$.

La fonction somme est discontinue alors que chacune des fonctions f_n est continue sur $[0, 1]$, on en déduit que la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ ne peut être uniforme sur $[0, 1]$.

Et, si $\alpha > 0$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge toujours simplement sur $[0, 1]$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^2 f_n(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ par croissances comparées, la fonction somme s_α est toujours nulle en 0, mais en tout point de $]0, 1]$, elle prend des valeurs au moins égales à $s_0(x) = 1$ (puisque $n^\alpha \geq n^0 = 1$), elle est donc toujours discontinue en 0, ce qui est incompatible avec la convergence uniforme.

Finalement, il y a convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la série de fonctions $\sum f_n$ si et seulement si $\alpha < 0$.

SSF 6 (Centrale). Soit $\alpha > 1$.

- a. Ensemble de définition D de la fonction $S_\alpha : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^\alpha x^2}$. La fonction S_α est-elle continue sur D ?
- b. Donner un équivalent de $S_\alpha(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.
- c. La fonction S_α est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$? Si oui, donner la valeur de son intégrale.

Pour tout réel $s > 1$, on pourra poser $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ (fonction zéta de Riemann).

- a. Posons $u_n(x) = \frac{1}{1 + n^\alpha x^2}$, la fonction u_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On a $u_n(0) = 1$ donc la série de terme général $u_n(0)$ diverge. Pour $x \neq 0$, on a $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha x^2}$, donc $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge puisque $\alpha > 1$ (série de Riemann). Ainsi, $D = \mathbb{R}^*$.

Soit $S = [a, b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ ($0 < a < b$), alors $\|u_n\|_{\infty, S} = u_n(a) = \frac{1}{1 + n^\alpha a^2}$, qui est le terme général d'une série convergente. On a ainsi convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, ce qui assure la continuité de S_α sur $\mathbb{R}_+^*$. On a aussi continuité sur $\mathbb{R}_-^*$ par parité.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha x^2}$, d'où l'idée de conjecturer que cela "passe à la somme": $S_\alpha(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha x^2} = \frac{\zeta(\alpha)}{x^2}$. Prouvons-le, pardi! Il s'agit en fait de montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 S_\alpha(x) = \zeta(\alpha)$. Or, $x^2 S_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$, avec $v_n(x) = x^2 u_n(x) = \frac{x^2}{1 + n^\alpha x^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n(x) = \frac{1}{n^\alpha}$. De plus, $0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, ce qui montre la convergence normale de la série de fonctions $\sum v_n$ sur $\mathbb{R}^*$, on peut donc intervertir somme et limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 S_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} v_n(x) = \zeta(\alpha),$$

ce qu'il fallait prouver.

c. Chaque fonction u_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car p.p.c. en 0, et $u_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha x^2}$), et

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + n^\alpha x^2} = \frac{1}{\sqrt{n^\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{2 n^{\alpha/2}}.$$

Ainsi, si $\alpha > 2$, alors la série de terme général $\int_{\mathbb{R}_+^*} u_n = \int_{\mathbb{R}_+^*} |u_n|$ converge (série de Riemann), cela permet d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme: la fonction

$S_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est alors intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\int_0^{+\infty} S_\alpha(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2 n^{\alpha/2}} = \frac{\pi}{2} \zeta\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{pour} \quad \alpha > 2.$$

Si $1 < \alpha \leq 2$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}_+^*} u_n$ diverge, mais cela ne prouve rien *a priori*. Considérons

alors les sommes partielles $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$. Comme les u_k sont positives, on a $0 \leq s_n \leq S_\alpha$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si S_α était intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de convergence dominée s'appliquerait à la suite (s_n) des sommes partielles: chacune de ces fonctions s_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a la convergence simple de (s_n) vers S_α sur $\mathbb{R}_+^*$, on a la domination des s_n par la fonction S_α supposée intégrable, on déduirait donc la convergence de la suite de terme

général $\int_0^{+\infty} s_n(x) dx = \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2 k^{\alpha/2}}$, on aurait donc convergence d'une série de Riemann

d'exposant $\frac{\alpha}{2}$ ce qui est absurde. Donc S_α n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ dans ce cas.

Bilan. La fonction S_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha > 2$ et, dans ce cas,

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} S_\alpha = \frac{\pi}{2} \zeta\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

SSF 7 (CCINP). On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

- Déterminer les ensembles de définition de ζ et de ζ_2 .
- Montrer que ζ et ζ_2 sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs.
- Montrer que ces fonctions sont dérivables, exprimer ζ' et ζ_2' .
- Calculer $\zeta(x) - \zeta_2(x)$ et donner une relation entre ces fonctions.
- Montrer que $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$, en déduire $\zeta_2(1)$.

a.b.c. cf. feuille d'exos sur les suites et séries de fonctions, exos 13 et 14.

Du cours, on déduit que $D_\zeta =]1, +\infty[$ (convergence d'une série de Riemann). En posant $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$, les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$

converge simplement sur cet intervalle, et on a $u'_n(x) = \frac{-\ln(n)}{n^x}$. Si $S = [a, b]$ est un segment inclus dans $]1, +\infty[$, la série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement sur S puisque $\|u'_n\|_{\infty, S} = \frac{\ln(n)}{n^a}$ est sommable: en effet, en choisissant α réel tel que $1 < \alpha < a$, on montre que $\frac{\ln(n)}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. Donc la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et on peut dériver terme à terme:

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad \zeta'(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}.$$

Concernant ζ_2 , on a $D_{\zeta_2} = \mathbb{R}_+^*$ (si $x \leq 0$, la série définissant $\zeta_2(x)$ est grossièrement divergente). Pour le caractère $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle, je renvoie le lecteur au corrigé de l'exo

14 (feuille de TD "suites et séries de fonctions"). On a $\zeta_2'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. Pour $x > 1$, on a

$$\zeta(x) - \zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n^x} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{(2p)^x} = 2^{1-x} \zeta(x)$$

(les termes d'indices impairs sont nuls, on réindexe alors les termes d'indices pairs en posant $n = 2p$). Donc $\zeta_2(x) = (1 - 2^{1-x}) \zeta(x)$.

e. Pour l'équivalent de $\zeta(x)$, cf. corrigé de l'exo 14 sur la feuille de TD (encadrement par des intégrales). On écrit alors, lorsque $x \rightarrow 1$,

$$1 - 2^{1-x} = 1 - e^{(1-x) \ln(2)} = 1 - (1 + (1-x) \ln(2) + o(1-x)) = (x-1) \ln(2) + o(x-1) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} (x-1) \ln(2).$$

De la relation obtenue en **d.**, on déduit que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta_2(x) = \ln(2)$. Comme la fonction ζ_2 est continue au point 1, on a donc $\zeta_2(1) = \ln(2)$.

Remarque. On retrouve donc la somme de la **série harmonique alternée**, puisque

$$\zeta_2(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2), \text{ résultat bien connu.}$$

SSF 8 (CCMP 2023). Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_0(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0, 1] \quad f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{1}{2} (t - f_n(t)^2).$$

- a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0, 1] \quad 0 \leq f_n(t) \leq f_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$.
- b. En déduire la convergence simple sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions (f_n) . Quelle est la fonction limite, notée f ?
- c. Étudier la convergence uniforme.
- d. En déduire que la fonction $x \mapsto |x|$ est limite uniforme sur $[-1, 1]$ d'une suite de fonctions polynomiales.

- a. On procède par récurrence sur n : c'est évident si $n = 0$ car $f_1(t) = \frac{t}{2} \leq \sqrt{t}$ sur $[0, 1]$.
Supposons les inégalités $0 \leq f_n(t) \leq f_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$ vraies pour un n donné, on a alors $t - f_{n+1}(t)^2 \geq 0$, donc $0 \leq f_{n+1}(t) \leq f_{n+2}(t) = f_{n+1}(t) + \frac{1}{2} (t - f_{n+1}(t)^2)$, et

$$\begin{aligned} \sqrt{t} - f_{n+2}(t) &= \sqrt{t} - f_{n+1}(t) - \frac{1}{2} (\sqrt{t} - f_{n+1}(t)) (\sqrt{t} + f_{n+1}(t)) \\ &= (\sqrt{t} - f_{n+1}(t)) \left(1 - \frac{1}{2} (\sqrt{t} + f_{n+1}(t)) \right). \end{aligned} \quad (*)$$

De l'hypothèse de récurrence, on déduit alors $\sqrt{t} + f_{n+1}(t) \leq 2\sqrt{t}$, puis $\sqrt{t} - f_{n+2}(t) \geq 0$ (les deux facteurs de $(*)$ sont positifs, le deuxième facteur étant plus grand que $1 - \sqrt{t}$ qui est positif), ce qui achève la récurrence.

- b. Pour $t \in [0, 1]$ fixé, la suite $(f_n(t))$ est croissante, et majorée par $\sqrt{t}$, elle est donc convergente, notons $f(t)$ sa limite. On a alors $f(t) = f(t) + \frac{1}{2} (t - f(t)^2)$ et par ailleurs $f(t) \geq 0$, donc $f(t) = \sqrt{t}$.
- c. En reprenant l'inégalité $(*)$ ci-dessus, on a facilement

$$\forall t \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \sqrt{t} - f_{n+1}(t) \leq (\sqrt{t} - f_n(t)) \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2} \right).$$

Par une récurrence immédiate, on déduit alors

$$\forall t \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \sqrt{t} - f_n(t) \leq \sqrt{t} \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2} \right)^n.$$

Pour $u \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n(u) = u \left(1 - \frac{u}{2} \right)^n$; alors la suite de fonctions (g_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle car une étude de fonction montre que

$$\|g_n\|_\infty = g_n\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \sim \frac{2}{e n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $\max_{t \in [0,1]} |\sqrt{t} - f_n(t)| \leq \frac{2}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui montre que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$.

- d. Pour $x \in [-1, 1]$, on a $|x| = \sqrt{x^2}$, avec $x^2 \in [0, 1]$. Posons $Q_n(x) = f_n(x^2)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, 1]$; alors les fonctions Q_n sont polynomiales sur $[-1, 1]$ et la suite de fonctions Q_n converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction valeur absolue.

VII. SÉRIES ENTIÈRES

SEE 1 (CMT). On pose $a_0 = 1$ et, pour tout n , $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

- Montrer que $0 \leq a_n \leq n!$ pour tout n .
- Qu'en déduit-on sur le rayon de convergence R de f ?
- Expliciter f en trouvant une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par cette fonction.

- a. Puisque la suite (a_n) est définie par récurrence forte, procédons de même pour prouver l'inégalité. Elle est immédiate pour $n = 0$ et, si on se donne $n \in \mathbb{N}$ et si l'on suppose l'encadrement vrai pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, alors

$$0 \leq a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \leq n! \times (n+1) = (n+1)!$$

puisque la dernière somme mentionnée comporte $n+1$ termes tous inférieurs à 1. La preuve par récurrence forte est donc achevée.

- La suite des coefficients $\left(\frac{a_n}{n!}\right)$ est bornée, on en déduit que $R \geq 1$. Je ne pense pas que l'on puisse en dire plus pour le moment.
- La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ au moins sur l'intervalle $I =]-R, R[$. Pour $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n \\ &= \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_p}{p!} x^p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^q}{q!} \right) = e^x f(x) \end{aligned}$$

puisque l'on reconnaît un produit de Cauchy.

La fonction f est donc solution sur I de l'équation différentielle $y' = e^x y$, donc $f(x) = C e^{e^x}$, où C est une constante réelle. Enfin $f(0) = a_0 = 1 = C \cdot e$, donc $C = e^{-1}$ et $f(x) = e^{e^x - 1}$.

Remarque. On a en fait $R = +\infty$, mais la preuve est plus difficile! Les a_n sont les **nombres de Bell**. On peut montrer que a_n est le nombre de partitions de l'intervalle entier $\llbracket 1, n \rrbracket$.

SEE 2 (CCINP). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = \frac{1}{2}$.

- a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n .

- a. Il est connu que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$, ou on le retrouve à partir du développement limité $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

- b. La fonction cosinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = -\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$$

et, l'égalité entre les termes extrêmes étant vraie aussi pour $x = 0$, la fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La série entière dont elle est la somme étant nécessairement sa série de Taylor, on a donc $f^{(2n+1)}(0) = 0$ pour

tout n (ce qu'on retrouve par le fait que f est une fonction paire), et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n}$

donc, par identification (unicité du DSE), on déduit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

SEE 3 (CCINP). Soit $a_n = \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^n dt$. Montrer que $\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq 1$. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n x^n$.

De l'inégalité usuelle $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, on déduit que $\frac{2t}{1+t^2} \leq 1$ pour tout $t \in [0, 1]$, donc $a_n \leq 1$ en intégrant cette inégalité. Puis, pour $t \in [0, 1]$, on a $1 + t^2 \leq 2$, donc $\frac{2}{1+t^2} \geq 1$ et $\frac{2t}{1+t^2} \geq t$, d'où la minoration de l'intégrale

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^n dt \geq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

On a donc l'encadrement demandé, d'où il résulte que $\frac{1}{n+1} \leq |a_n| \leq 1$ pour tout n .

De la majoration $|a_n| \leq 1$, il résulte que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est au moins égal à celui de $\sum x^n$, donc $R \geq 1$.

De la minoration $|a_n| \geq \frac{1}{n+1}$, il résulte que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est au plus égal à celui de $\sum \frac{x^n}{n+1}$ qui est aussi 1, donc $R \leq 1$.

Finalement, $R = 1$.

SEE 4 (CCINP). Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière

$$\sum_{n \geq 1} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right) \frac{x^n}{n}.$$

Converge-t-elle pour $x = 1$?

Posons $a_n = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right)$ pour $n \geq 1$; alors $|a_n| = \frac{\sqrt{2}}{2n}$, donc le rayon de convergence est le même que celui de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{2}}{2n} x^n$, à savoir $R = 1$.

Pour le calcul, posons $b_n = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right)$, puis $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ pour $x \in]-1, 1[$ (il est clair que les deux séries entières ont pour rayon de convergence 1), et enfin

$$h(x) = f(x) + i g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + i b_n) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{i(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2})} \frac{x^n}{n} = e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n}.$$

On a alors, toujours dans $] -1, 1[$ intervalle de convergence :

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n i^n x^{n-1}}{n} = e^{i\frac{\pi}{4}} i \sum_{n=0}^{+\infty} (ix)^n = \frac{i e^{i\frac{\pi}{4}}}{1 - ix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{-1 + i}{1 - ix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(-1 + i)(1 + ix)}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

On en tire $f'(x) = \operatorname{Re}(h'(x)) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1+x}{1+x^2}$ puis, sachant que $f(0) = 0$,

$$\forall x \in]-1, 1[\quad f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\operatorname{Arctan} x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \right).$$

SEE 5 (CCINP). Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x \cos t) dt$.

Fixons un réel x . La fonction cosinus étant développable en série entière sur $\mathbb{R}$, on a $f(x) = \int_0^\pi \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right) dt$, avec $u_n(t) = \frac{(-1)^n x^{2n} (\cos t)^{2n}}{(2n)!}$. Les fonctions u_n sont continues sur le **segment** $[0, \pi]$ et la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur ce segment puisque $|u_n(t)| \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et la série de terme général $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est convergente puisque c'est une série exponentielle. On peut donc intervertir série et intégrale (**sur un segment!!**), ce qui donne

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \int_0^\pi \cos^{2n} t dt,$$

et les intégrales $W_n = \int_0^\pi \cos^{2n} t dt$ se calculent par récurrence (ce sont les **intégrales de Wallis**) : par exemple,

$$W_{n+1} = \int_0^\pi \cos^{2n} t (1 - \sin^2 t) dt = W_n - \int_0^\pi (\sin t) (\cos^{2n} t \sin t) dt = W_n - \frac{1}{2n+1} W_{n+1}$$

(intégration par parties), ce qui donne $W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_n$, puis

$$W_n = \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 3 \times 1}{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2} W_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \pi.$$

Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}.$$

SEE 6 (CCINP).

- Décomposer en éléments simples $f(x) = \frac{1}{-x^2 + x + 2}$.
- Développer f en série entière en précisant le rayon de convergence.
- Donner le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

- Je ne détaille pas le calcul. On obtient

$$f(x) = \frac{-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-2} \right).$$

C'est bien sûr valable pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

- b. On développe chaque élément simple en série entière, partant de la série géométrique $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ pour $u \in]-1, 1[$. Écrivons $f(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{6} \frac{1}{1-\frac{x}{2}}$, cela permet de développer pour $|x| < 1$, on obtient

$$f(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{3} + \frac{1}{6 \times 2^n} \right) x^n.$$

Le rayon de convergence est 1, on peut le vérifier par la règle de d'Alembert, mais c'est évident puisqu'on a ajouté deux séries entières ayant des rayons de convergence distincts (1 et 2 respectivement), c'est donc le minimum des deux.

- c. Il suffit de tronquer à l'ordre 3 le développement en série entière (puisque l'on sait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 2[$ par exemple, elle admet donc un DL à tout ordre au voisinage de zéro, et les coefficients des DL se calculent par la même formule que ceux des développements en série entière, à savoir des formules de Taylor), cela donne

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3).$$

SEE 7 (CMT). Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$, avec $a_n = \operatorname{Arccos}\left(1 - \frac{1}{n^p}\right)$, où p est un réel strictement positif donné.

Cherchons un équivalent de a_n lorsque $n \rightarrow +\infty$. Pour cela, il serait bien de disposer d'un équivalent de $\operatorname{Arccos} x$ lorsque x tend vers 1^- , ou d'un équivalent de $\operatorname{Arccos}(1-h)$ lorsque $h \rightarrow 0^+$. Posons $\theta = \operatorname{Arccos}(1-h)$, si $h \rightarrow 0^+$, alors $\theta \rightarrow 0^+$ et $1-h = \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)$, d'où $h \sim \frac{\theta^2}{2}$. Comme $\theta \geq 0$, on en tire $\theta \sim \sqrt{2h}$, i.e. $\operatorname{Arccos}(1-h) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{2h}$.

En conséquence, puisque $\frac{1}{n^p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^+$, on tire $a_n \sim \sqrt{\frac{2}{n^p}}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, puis que la série entière a pour rayon de convergence $R = 1$.

SEE 8 (CMT).

- a. Développement en série entière de $F(x) = \int_0^x \frac{1-t}{1+t^2} dt$.
- b. Exprimer $F(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
- c. Convergence et somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.
-

- a. Tout d'abord, $\frac{1-t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n+1}$ pour $t \in]-1, 1[$. Par intégration terme à terme (toujours autorisée pour une série entière), on a

$$\forall x \in]-1, 1[\quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2}. \quad (*)$$

En fait, cette relation est vraie sur le segment $[-1, 1]$; en effet, la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in]-1, 1[$, on a

$$F(x) = G(x) - H(x) \text{ avec } G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ et } H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2}.$$

Mais $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ en posant $g_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge uniformément (mais pas normalement) sur le segment $[-1, 1]$ puisque, pour $x \in [0, 1]$ fixé, elle vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées : la suite $\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers zéro en décroissant, on peut donc majorer le reste :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui montre que le reste converge uniformément vers 0. La fonction G est donc définie et continue sur $[0, 1]$ comme somme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément, idem pour H . En passant à la limite ($x \rightarrow 1$) dans $(*)$, on obtient

$$F(1) = \int_0^1 \frac{1-t}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

- b. Un calcul facile donne $F(x) = \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ pour tout x réel.
c. La convergence de la série a été obtenue en a., mais elle est par ailleurs évidente (il y a convergence absolue). Le a. permet surtout de calculer la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = F(1) = \arctan(1) - \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

SEE 9 (CCINP 2016). Convergence et calcul de la somme de $\sum_{n \geq 0} \frac{2n^2 + 3n + 1}{2^{n+1}}$.

Posons $a_n = \frac{2n^2 + 3n + 1}{2^{n+1}}$. Alors $a_n > 0$ et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \times \frac{2n^2 + 7n + 6}{2n^2 + 3n + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} < 1,$$

donc, par la règle de d'Alembert, la série converge.

Le calcul utilise des séries géométriques. Pour $x \in]-1, 1[$, posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Alors $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$. On

décompose a_n en $a_n = \frac{1}{2} \frac{2n(n-1) + 5n + 1}{2^n}$, ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^n} + 5 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} + \frac{5}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{4} f''\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{4} f'\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \times 16 + \frac{5}{4} \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 = 10. \end{aligned}$$

SEE 10 (CCINP). Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

a. Montrer que, pour tout n entier naturel, $0 \leq \frac{u_n}{n!} \leq 4^{n+1}$.

b. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$. Montrer que f est bien définie sur $\left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y' = y^2$.

c. En déduire u_n pour tout n .

a. La suite (u_n) est bien définie de façon unique, par une récurrence forte. Notons (P_n) la propriété à démontrer, à savoir l'encadrement $0 \leq \frac{u_n}{n!} \leq 4^{n+1}$ pour un entier n donné. Nous allons démontrer (P_n) par récurrence forte. Il est clair que (P_0) est vrai. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons (P_k) vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, alors

$$0 \leq \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k u_{n-k} \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! 4^{k+1} (n-k)! 4^{n-k+1},$$

soit (la somme majorante comporte $n+1$ termes égaux):

$$0 \leq \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \times (n+1) \times n! 4^{n+2} = 4^{n+2}.$$

L'encadrement (P_n) est donc prouvé par récurrence forte.

- b. La série entière géométrique $\sum 4^{n+1}x^n$ ayant pour rayon de convergence $\frac{1}{4}$, on déduit par comparaison que la série entière $\sum \frac{u_n}{n!}x^n$ a un rayon de convergence R tel que $R \geq \frac{1}{4}$. Sa somme f est donc bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $I = \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[$.

Pour $x \in I$, par un produit de Cauchy, on a

$$f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{u_k}{k!} \frac{u_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} n x^{n-1} = f'(x),$$

donc f est solution sur I de l'équation différentielle (non linéaire) $y' = y^2$.

- c. **La résolution des équations différentielles non linéaires n'est pas au programme de PSI.** On note toutefois qu'il s'agit d'une "équation à variables séparables", et on peut espérer que l'examinateur aura fourni quelques indications. **Si la fonction y ne s'annule pas sur I ,** l'équation peut se mettre sous la forme $\frac{y'}{y^2} = 1$, ce qui s'intègre en $-\frac{1}{y} = x + C$, soit $y = -\frac{1}{x+C}$. Il existe donc une constante réelle C telle que $\forall x \in I \quad f(x) = -\frac{1}{x+C}$. Pour $x = 0$, on a $f(0) = u_0 = 3 = -\frac{1}{C}$, donc $C = -\frac{1}{3}$. Finalement,

$$\forall x \in I \quad f(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{3}} = \frac{3}{1 - 3x}.$$

Par ailleurs, pour $x \in I$, et même pour $x \in J = \left] -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right[$, on développe

$$f(x) = \frac{3}{1-3x} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{n+1} x^n.$$

Par unicité du développement en série entière,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_n}{n!} = 3^{n+1}, \quad \text{donc} \quad u_n = 3^{n+1} n!.$$

Remarque 1. On peut maintenant affirmer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{u_n}{n!}x^n$ est $R = \frac{1}{3}$.

Remarque 2. En posant $v_n = 3^{n+1} n!$, il est immédiat de vérifier que $v_0 = 3$ et que $v_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} v_k v_{n-k}$ pour tout n . Les suites (u_n) et (v_n) vérifiant la même initialisation et la même relation de récurrence forte, on a bien $u_n = v_n$ pour tout n , ce qui constitue une vérification des calculs effectués.

SEE 11 (CMT).

a. Rayon de convergence et calcul de la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} (1-x)x^{3n}$.

b. En déduire la valeur de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.

a. Posons $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-x)x^{3n} = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} (x^3)^n$, on reconnaît une série géométrique de raison x^3 , qui converge **ssi** $|x^3| < 1$, c'est-à-dire **ssi** $|x| < 1$. Le rayon de convergence est donc $R = 1$ et, pour $x \in]-1, 1[$, on a $s(x) = \frac{1-x}{1-x^3} = \frac{1}{1+x+x^2}$.

b. La série proposée converge puisque son terme général est équivalent à $\frac{1}{9n^2}$. Notons aussi

que $\frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2}$, ce qui nous rapproche de la question a. Posons en effet $f_n(x) = (1-x)x^{3n} = x^{3n} - x^{3n+1}$ pour $x \in I = [0, 1[$. Alors chaque fonction f_n est continue et intégrable sur I (car prolongeable par continuité au point 1 en posant $f_n(1) = 0$), la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers la fonction continue

$s : x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$, enfin $\int_I |f_n| = \int_0^1 (x^{3n} - x^{3n+1}) dx = \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$ est le terme général d'une série convergente. On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme qui affirme que la fonction s est intégrable sur I (mais ça, ce n'est pas un scoop!) et surtout que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, c'est-à-dire que

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \int_0^1 s(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Il reste donc à calculer cette dernière intégrale. Pour cela, on met le trinôme au dénominateur sous forme canonique et on fait un changement de variable affine pour se ramener à du $\frac{du}{u^2+1}$ (ces manipulations, autrefois classiques, sont un peu passées de mode). On obtient

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \text{ et on pose alors } x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}u, \text{ d'où}$$

$$S = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} du}{\frac{3}{4}(u^2+1)} = \frac{2}{\sqrt{3}} [\text{Arctan}(u)]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

VIII. ESPACES VECTORIELS NORMÉS

EVN 1 (CCINP). Soit $E = \left\{ A(x, y) = \begin{pmatrix} x & 3y \\ x & 4y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- a. L'ensemble $E_1 = \{A \in E \mid \text{rg}(A) \leq 1\}$ est-il fermé? Est-il borné?
- b. L'ensemble $E_2 = E \cap \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ est-il fermé? Est-il borné?
- c. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \text{Tr}(A(x, y)^2)$. L'application φ admet-elle un extremum local?

- a. L'ensemble E est une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on peut le voir par caractérisation séquentielle: si $(A(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente d'éléments de E , i.e.

$$A(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} x_n & 3y_n \\ x_n & 4y_n \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a = c$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{b}{3} = \frac{d}{4}$, alors $L = \begin{pmatrix} x & 3y \\ x & 4y \end{pmatrix} = A(x, y) \in E$, en posant $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$. L'ensemble E est bien stable par passage à la limite.

De plus, $E_1 = E \cap F$, où

$$F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \text{GL}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 0\} = \det^{-1}(\{0\}).$$

L'ensemble F des matrices 2x2 non inversibles est fermé car image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $\det : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Donc $E_1 = E \cap F$ est fermé car intersection de deux fermés de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

L'ensemble E_1 n'est pas borné, par exemple parce qu'il contient la partie, manifestement non bornée, constituée de toutes les matrices $A(n, 0) = \begin{pmatrix} n & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

- b. On a vu ci-dessus que E est fermé. L'ensemble $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ (groupe orthogonal) est fermé aussi car image réciproque de la partie fermée $\{I_2\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par l'application $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \mapsto M^T M$ qui est continue car polynomiale. Donc E_2 est fermé comme intersection de deux fermés.

Enfin, $E_2 \subset \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, et $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ est borné (par exemple parce que les coefficients d'une matrice orthogonale sont tous dans $[-1, 1]$), donc E_2 est borné.

- c. Le lecteur vérifiera que $\varphi(x, y) = x^2 + 6xy + 16y^2 = (x + 3y)^2 + 7y^2$ (*mise sous forme canonique*). On a $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x + 6y$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 6x + 32y$, le seul point critique est $(0, 0)$, et ce point est un minimum local (et même global) puisque la forme canonique ci-dessus montre que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x, y) \geq 0 = \varphi(0, 0).$$

EVN 2 (CMT). Soit l'espace vectoriel $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, \pi], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(\pi) = 0\}$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \max_{x \in [0, \pi]} |f''(x) - f(x)|.$$

Montrer que N est une norme sur E .

L'application N est bien définie sur E (puisque $|f'' - f|$ est continue sur le segment $[0, \pi]$, donc y atteint un maximum), à valeurs positives ou nulles. L'axiome d'homogénéité $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ et l'inégalité triangulaire $N(f + g) \leq N(f) + N(g)$ sont triviales.

Vérifions l'axiome de séparation: si $f \in E$ vérifie $N(f) = 0$, alors f est solution de l'équation différentielle $y'' - y = 0$, donc est de la forme $f : x \mapsto A \operatorname{ch}(x) + B \operatorname{sh}(x)$. Les conditions aux limites $f(0) = 0$ et $f(\pi) = 0$ entraînent $A = 0$, puis $B \operatorname{sh}(\pi) = 0$ donc $B = 0$, finalement $f = 0$.

En conclusion, N est bien une norme sur l'espace vectoriel E .

EVN 3 (CCINP). Pour $f \in E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $N(f) = \int_0^1 e^t |f(t)| dt$.

a. Montrer que N est une norme sur E .

b. On définit une suite de fonctions (f_n) , $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Étudier la convergence de la suite (f_n) dans l'espace vectoriel normé (E, N) , et dans l'e.v.n. (E, N_∞) .

c. Existe-t-il des constantes strictement positives C et C' telles que $C N \leq N_\infty \leq C' N$?

a. Comme d'habitude, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont évidentes. Pour l'axiome de séparation, si $N(f) = 0$, alors la fonction $t \mapsto e^t |f(t)|$ est continue, positive, d'intégrale nulle, donc est la fonction nulle, d'où $f = 0$.

b. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \in]0, 1]$: en effet, pour $x \in]0, 1]$ fixé, on a $f_n(x) = 0$ dès que $n > \frac{1}{x}$. Les fonctions f_n étant toutes continues mais pas leur limite, il ne peut y avoir convergence uniforme sur $[0, 1]$, autrement dit la suite (f_n) est divergente dans l'espace vectoriel normé (E, N_∞) . De plus, la fonction limite simple f n'appartient pas à E .

Par contre, la suite (f_n) converge vers la fonction nulle dans l'e.v.n. (E, N) puisque

$$N(f_n - 0) = N(f_n) = \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nt) e^t dt = n e^{\frac{1}{n}} - n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- c. Les normes N et N_∞ sur E ne sont pas équivalentes puisqu'une suite peut converger pour N et pas pour N_∞ . On constate toutefois que $N(f) \leq N_\infty(f) \int_0^1 e^t dt = (e-1) N_\infty(f)$ pour tout $f \in E$, donc le rapport $\frac{N}{N_\infty}$ est borné. Le rapport $\frac{N_\infty}{N}$ n'est pas borné puisque $N(f_n)$ tend vers zéro alors que $N_\infty(f_n) = 1$ pour tout n .

IX. INTÉGRATION

INT 1 (CCINP 2016).

- a. Calculer $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx}$ lorsque cela a un sens.
- b. Justifier l'existence de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx$, et montrer que $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$.

- a. Si $x < 0$, la série proposée diverge grossièrement (série géométrique de raison $e^{-x} > 1$). Pour $x = 0$, on a $s(0) = 0$. Pour $x > 0$, on a une série géométrique de raison $e^{-x} \in]0, 1[$, d'où la convergence et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx} = x^2 e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{x^2}{e^x - 1}.$$

- b. La fonction $s : x \mapsto \frac{x^2}{e^x - 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $s(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc la fonction s est prolongeable par continuité en 0 avec $\lim_{x \rightarrow 0} s(x) = 0$, enfin $s(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 e^{-x}$ donc on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 s(x) = 0$ par croissances comparées. Finalement, la fonction s est intégrable sur $]0, +\infty[$ et l'intégrale généralisée J est convergente.

Posons $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (pas de problème en 0 car limite nulle, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f_n(x) = 0$ par croissances comparées). Par construction, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement

sur $\mathbb{R}_+^*$ et a pour somme la fonction continue s . Enfin, deux hipépés que le lecteur se fera un plaisir de détailler donnent (les fonctions f_n étant positives)

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-nx} dx = \frac{2}{n^3}.$$

La série de terme général $\frac{2}{n^3}$ étant convergente, le théorème d'intégration terme à terme s'applique, et donne

$$J = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}.$$

INT 2 (CMT 2016).

a. Convergence simple, uniforme, de la suite de fonctions (f_n) , avec $f_n(x) = (\sin x)^{\frac{1}{n}}$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$.

a. Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$, mais $f_n(0) = 0$ pour tout n . La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers la fonction $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, nulle en 0, et de valeur 1 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Les fonctions f_n sont continues sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction limite simple f ne l'est pas, il ne peut donc y avoir convergence uniforme sur ce segment. En revanche, pour tout $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur tout segment de la forme $S_a = \left[a, \frac{\pi}{2}\right]$: en effet,

$$\|f_n - f\|_{\infty, S_a} = \max_{x \in S_a} \left(1 - \sqrt[n]{\sin(x)}\right) = 1 - \sqrt[n]{\sin(a)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

b. Le théorème d'interversion limite-intégrale sur un segment, avec l'hypothèse de convergence uniforme, ne s'appliquant pas, essayons le théorème de convergence dominée. Les fonctions f_n sont continues (par morceaux) sur $S = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur S vers la fonction c.p.m. f , et on a la domination

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |f_n(x)| \leq 1,$$

la fonction constante 1 étant intégrable sur S . On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

INT 3 (CMT 2016). On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \operatorname{Arctan}(t) dt$.

a. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

a. Soit x réel. Posons $f_x(t) = e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction f_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $0 \leq f_x(t) \leq e^{-t^2}$, et il est connu que $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit l'existence de $F(x) = \int_0^{+\infty} f_x(t) dt$ pour tout x réel. Ainsi, $D_F = \mathbb{R}$.

b. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\varphi'(t) = 1 + \frac{x}{t^2} > 0$, elle est donc strictement croissante (et continue) sur cet intervalle. Elle établit alors une bijection de $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ vers son image qui est $\left] \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t), \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) \right[=] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Pour expliciter la bijection réciproque $\varphi^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, prenons $u \in \mathbb{R}$ et résolvons l'équation $\varphi(t) = u$ avec $t > 0$. On a

$$\varphi(t) = u \iff t - \frac{x}{t} = u \iff t^2 - ut - x = 0 \iff t = \frac{u}{2} \pm \sqrt{x + \frac{u^2}{4}}.$$

On doit conserver la racine positive de ce trinôme, donc

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad \varphi^{-1}(u) = \frac{u}{2} + \sqrt{x + \frac{u^2}{4}}.$$

c. Notons d'abord que, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\left[\left(t - \frac{x}{t}\right)^2 + 2x\right]} dt = e^{-2x} \int_0^{+\infty} e^{-\varphi(t)^2} dt.$$

Le changement de variable $u = \varphi(t)$, soit $t = \varphi^{-1}(u)$, légitime car φ^{-1} est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$, donne

$$dt = (\varphi^{-1})'(u) du = \left(\frac{1}{2} + \frac{u}{\sqrt{4x + u^2}}\right) du,$$

puis

$$F(x) = e^{-2x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{u}{\sqrt{4x + u^2}}\right) du = \frac{1}{2} e^{-2x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x}.$$

En effet, le terme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \frac{u}{\sqrt{4x + u^2}} du$ est nul puisque c'est l'intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une fonction (intégrable) impaire.

d. Comme F est paire, on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|}$, formule valable aussi si $x = 0$.

INT 4 (Centrale 2022). On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (**intégrale de Gauss**).

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}} dt$ lorsque cette intégrale converge.

- Quel est l'ensemble de définition de F ?
- Soit $x > 0$. Montrer que $\varphi : t \mapsto t - \frac{x}{t}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$, et expliciter la bijection réciproque.
- À l'aide de $u = \varphi(t)$, calculer $F(x)$ pour $x > 0$.
- En déduire une expression de $F(x)$ pour tout x réel.

a. On a $\left| e^{-xt} \operatorname{Arctan}(t) \right| \leq \frac{\pi}{2} e^{-xt}$, et la fonction $t \mapsto \frac{\pi}{2} e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x > 0$, on en déduit que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Une première intégration par parties donne

$$f(x) = \left[-\frac{1}{x} e^{-xt} \operatorname{Arctan}(t) \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt.$$

Or,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2) - t^2}{1+t^2} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt} dt.$$

Si l'on montre que le deuxième terme est négligeable devant le premier lorsque $x \rightarrow +\infty$, c'est gagné! Or, on a facilement

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt} dt \leq \int_0^{+\infty} t^2 e^{-xt} dt = \frac{2}{x^3}$$

(par deux hipépés que le lecteur se fera un plaisir de détailler) et on a bien $\frac{2}{x^3} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$; donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, puis $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

INT 5 (CCINP 2016). Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$.

a. Montrer que $\forall u \in]-1, +\infty[\quad \ln(1+u) \leq u$.

b. Montrer que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$.

c. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$.

a. On étudie simplement la fonction différence $u \mapsto u - \ln(1+u)$ sur $] -1, +\infty[$.

b. Posons d'abord le changement de variable $u = t^n$, soit $t = u^{\frac{1}{n}}$, dans l'intégrale, on obtient $nI_n = \int_0^1 u^{\frac{1}{n}-1} \ln(1+u) du$. On applique maintenant le théorème de convergence dominée : posons $f_n(u) = u^{\frac{1}{n}-1} \ln(1+u)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in]0, 1]$, ce sont des fonctions continues sur $]0, 1]$. Pour tout $u \in]0, 1]$ fixé, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(u) = f(u)$ en posant $f(u) = \frac{\ln(1+u)}{u}$ (fonction continue aussi sur $]0, 1]$), et on a la domination $0 \leq f_n(u) \leq f(u)$, la fonction f étant intégrable sur $]0, 1]$ puisqu'elle est prolongeable par continuité en 0. On peut donc intervertir limite et intégrale :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(u) du = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(u) \right) du = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du.$$

c. Il nous reste donc à calculer cette intégrale $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$. Pour cela, on développe en série entière : pour $u \in]0, 1[$, on a $f(u) = \frac{\ln(1+u)}{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^{n-1}}{n}$ (la relation est vraie aussi au point 1, et aussi au point 0 si on prolonge par continuité avec $f(0) = 1$). Donc $J = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(u) \right) du$, en posant $g_n(u) = (-1)^{n-1} \frac{u^{n-1}}{n}$: les fonctions g_n sont

continues et intégrables (évident) sur $]0, 1[$, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ et a pour somme la fonction continue f , et enfin $\int_{]0, 1[} |g_n| = \frac{1}{n^2}$ (terme général d'une série convergente). On peut donc intervertir série et intégrale, ce qui donne $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 g_n(u) du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$: en effet, il est classique que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on sépare les termes d'indices impairs et ceux d'indices pairs, soit $\frac{\pi^2}{6} = S_I + S_P$ avec $S_I = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ et $S_P = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{24}$, on en déduit $S_I = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$, enfin $J = S_I - S_P = \frac{\pi^2}{12}$. Finalement, on a bien $I_n \sim \frac{\pi^2}{12n}$.

INT 6 (ENSEA 2016). Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles bornées. Soient c et d deux réels tels que $c < d$. On suppose que

$$\forall x \in [c, d] \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = 0.$$

- a. Énoncer le théorème de convergence dominée.
- b. Montrer que, pour tout entier n , il existe un réel φ_n tel que

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(nx + \varphi_n).$$

- c. Calculer $I_n = \int_c^d (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))^2 dx$.
- d. Montrer que, à partir d'un certain rang, on a $I_n \geq \frac{(a_n^2 + b_n^2)(d - c)}{4}$.
- e. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0.

- a. Relire le cours!
- b. Si a_n et b_n sont nuls, alors n'importe quel réel φ_n fera l'affaire.

Sinon, les réels $\alpha_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ et $\beta_n = -\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ sont tels que $\alpha_n^2 + \beta_n^2 = 1$, il existe alors un réel φ_n (déterminé modulo 2π) tel que $\cos(\varphi_n) = \alpha_n$ et $\sin(\varphi_n) = \beta_n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} (\alpha_n \cos(nx) - \beta_n \sin(nx)) \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} (\cos(\varphi_n) \cos(nx) - \sin(\varphi_n) \sin(nx)) \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(nx + \varphi_n). \end{aligned}$$

- c. D'abord, $I_0 = a_0^2(d - c)$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
I_n &= (a_n^2 + b_n^2) \int_c^d \cos^2(nx + \varphi_n) \, dx \\
&= (a_n^2 + b_n^2) \int_{nc+\varphi_n}^{nd+\varphi_n} \cos^2(t) \frac{dt}{n} \\
&= \frac{a_n^2 + b_n^2}{n} \int_{nc+\varphi_n}^{nd+\varphi_n} \frac{1 + \cos(2t)}{2} \, dt \\
&= \frac{a_n^2 + b_n^2}{n} \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_{nc+\varphi_n}^{nd+\varphi_n} \\
&= \frac{(a_n^2 + b_n^2)(d - c)}{2} + \frac{a_n^2 + b_n^2}{4n} \left[\sin(2nd + 2\varphi_n) - \sin(2nc + 2\varphi_n) \right].
\end{aligned}$$

d. On peut donc écrire $I_n = (a_n^2 + b_n^2) \left(\frac{d - c}{2} + \frac{r_n}{4n} \right)$, avec

$$r_n = \sin(2nd + 2\varphi_n) - \sin(2nc + 2\varphi_n).$$

On constate que $|r_n| \leq 2$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r_n}{4n} = 0$, donc $\frac{d - c}{2} + \frac{r_n}{4n} \geq \frac{d - c}{4}$ pour n assez grand, puis $I_n \geq \frac{(a_n^2 + b_n^2)(d - c)}{4}$ pour n assez grand.

e. Posons $f_n(x) = (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))^2$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [c, d]$. Alors les fonctions f_n sont continues sur $[c, d]$, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[c, d]$ vers la fonction nulle, et si on choisit un réel positif M tel que $|a_n| \leq M$ et $|b_n| \leq M$ pour tout n , on a la domination

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [c, d] \quad |f_n(x)| \leq (2M)^2,$$

la fonction constante $x \mapsto (2M)^2$ étant intégrable sur le segment $[c, d]$. Le théorème de convergence dominée s'applique donc, et donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$. De l'encadrement

$$\begin{aligned}
0 \leq a_n^2 + b_n^2 &\leq \frac{4}{d - c} I_n \text{ valable pour } n \text{ assez grand, on déduit } \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0. \text{ Enfin,} \\
0 \leq a_n^2 &\leq a_n^2 + b_n^2, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 = 0, \text{ puis } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0. \text{ De même, } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0.
\end{aligned}$$

INT 7 (CCMP 2023). Soient a et b deux réels strictement positifs.

a. Montrer que $f : x \mapsto \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

b. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} \, du$ est convergente.

c. Montrer que l'intégrale $I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} \, dx$ est convergente.

d. Calculer $I(a, b)$.

a. La fonction f est continue sur $]0, 1]$ et, du développement limité $\cos(x) = 1 + o(x)$ en 0, on déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0, ce qui entraîne son intégrabilité sur $]0, 1]$.

b. On considère une intégrale partielle et on intègre par parties: si $x > 1$,

$$\int_1^x \frac{\cos(t)}{t} dt = \frac{\sin(x)}{x} - \sin(1) + \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2} dt$$

et on constate que chacun des termes a une limite finie lorsque $x \rightarrow +\infty$ (le dernier car $\left| \frac{\sin(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ converge absolument, donc converge). L'intégrale proposée est donc convergente.

Remarque. On peut démontrer que cette intégrale n'est pas absolument convergente, donc l'application $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$, on a ici une intégrale "semi-convergente".

c. Par le même raisonnement (ou par un changement de variable), on montre la convergence des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x} dx$, et donc de $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ par différence. Comme on a vu en a. que f est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$, on déduit la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$. Ici encore, il ne s'agit a priori que d'une "semi-convergence".

d. Écrivons $I(a, b) = \lim_{c \rightarrow 0} J(c)$, en posant $J(c) = \int_c^{+\infty} f(x) dx$. Décomposons alors

$$J(c) = \int_c^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x} dx - \int_c^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x} dx = \int_{ac}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du - \int_{bc}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du = \int_{ac}^{bc} \frac{\cos(u)}{u} du.$$

Commentaires. On s'assure d'abord que chacune des deux intégrales, prises séparément, est bien convergente, mais cela résulte du b. On pose ensuite $u = ax$ dans la première, $u = bx$ dans la deuxième, enfin on utilise la relation de Chasles.

Le développement $\cos(u) = 1 + o(u)$ lorsque $u \rightarrow 0$ permet d'écrire $\frac{\cos(u)}{u} = \frac{1}{u} + r(u)$ avec $\lim_{u \rightarrow 0} r(u) = 0$ et, en particulier, le reste $r(u)$ est borné au voisinage de 0, disons $|r(u)| \leq M$ pour u proche de 0. Ainsi,

$$J(c) = \int_{ac}^{bc} \frac{\cos(u)}{u} du = \int_{ac}^{bc} \frac{du}{u} + \int_{ac}^{bc} r(u) du = \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \int_{ac}^{bc} r(u) du,$$

$$\text{et } \lim_{c \rightarrow 0} \int_{ac}^{bc} r(u) du = 0 \text{ puisque } \left| \int_{ac}^{bc} r(u) du \right| \leq \left| \int_{ac}^{bc} M du \right| = M |b - a| c \xrightarrow{c \rightarrow 0} 0.$$

$$\text{Donc } I(a, b) = \lim_{c \rightarrow 0} J(c) = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

INT 8 (CCINP). Existence et calcul de $\int_0^1 x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor dx$. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, et que la notation $\lfloor x \rfloor$ représente la partie entière d'un réel x .

Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$. Alors f est continue par morceaux (c.p.m.) sur $]0, 1]$: en effet, on a $f(x) = x$ pour $x \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$, $f(x) = 2x$ pour $x \in \left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right]$, plus généralement pour tout k entier naturel non nul, $f(x) = kx$ pour $x \in \left] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$. Les points de discontinuité de f dans l'intervalle de définition $]0, 1]$ sont donc les $\frac{1}{k}$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, et en chacun de ces points il y a une limite à gauche finie qui est 1 (et qui est aussi la valeur de la fonction f en ce point), et une limite à droite finie qui est $1 - \frac{1}{k}$. Sur chaque segment $[a, b]$ inclus dans $]0, 1]$, la fonction f n'admet donc qu'un nombre fini de points de discontinuité, qui sont tous "de première espèce", i.e. avec une limite à gauche finie et une limite à droite finie, c'est bien la définition d'une fonction c.p.m. sur $]0, 1]$.

Remarque. De l'encadrement $\forall x \in]0, 1] \quad 1 - x < f(x) \leq 1$, on déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, mais la fonction f prolongée sur $[0, 1]$ en posant $f(0) = 1$ n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$ car elle admet sur le **segment** $[0, 1]$ une infinité de points de discontinuité! Le vocabulaire est subtil...

On a $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in I =]0, 1]$, la fonction constante $x \mapsto 1$ étant intégrable sur I ; par comparaison de fonctions positives, on déduit que f est intégrable sur I .

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(x) dx &= \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} kx dx = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) \\ &= \frac{2k+1}{2k(k+1)^2} = \frac{(k+1)+k}{2k(k+1)^2} \\ &= \frac{1}{2k(k+1)} + \frac{1}{2(k+1)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2(k+1)^2}. \end{aligned}$$

Donc, en partie par télescope et par translation d'indice, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2(k+1)^2} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}.$$

Enfin, par passage à la limite,

$$\int_I f = \int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

INT 9 (CCINP).

a. Montrer que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2t}{\pi} \leq \sin t$.

b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$, avec $I_n = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} e^{-n \sin \frac{x}{n}} dx$.

a. On fait l'étude sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction $g : t \mapsto \sin(t) - \frac{2t}{\pi}$, c'est bête comme chou!

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n(x) = \begin{cases} e^{-n \sin \frac{x}{n}} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{n\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x > \frac{n\pi}{2} \end{cases}.$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, de l'équivalent $\sin t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$, on déduit la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$, l'inégalité du **a.** fournit la domination :

$$\text{si } 0 \leq f_n(x) = x \leq \frac{n\pi}{2}, \quad \text{alors } 0 \leq e^{-n \sin \frac{x}{n}} \leq e^{-n \frac{2x}{n\pi}} = e^{-\frac{2x}{\pi}}$$

(majoration valable aussi si $x > \frac{n\pi}{2}$), la fonction $\varphi : x \mapsto e^{-\frac{2x}{\pi}}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
On applique donc le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

INT 10 (CCINP). Justifier l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

La fonction $f : t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, car elle est prolongeable par continuité en 0 : $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1$, et parce que $t^2 f(t) = \frac{t^3}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^3 e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

On décompose f en somme d'une série de fonctions en écrivant que $\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ lorsque $|r| < 1$, ici pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a $0 < e^{-t} < 1$ donc :

$$f(t) = t e^{-t} \times \frac{1}{1 - e^{-t}} = t e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n = t \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t} = t \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}.$$

Les fonctions $u_n : t \mapsto te^{-nt}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et a pour somme la fonction continue f (c'est le calcul fait juste au-dessus). Enfin,

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} |u_n| = \int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt = \frac{1}{n^2}$$

par une intégration par parties, la série de terme général $\int_{\mathbb{R}_+^*} |u_n|$ converge, on peut donc intervertir série et intégrale. Cela donne le résultat.

INT 11 (CMT). On pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^n x}$.

- a. Pour quels entiers naturels n l'intégrale u_n est-elle bien définie ?
- b. Convergence de la suite (u_n) ?

- a. Posons $f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^n x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. On a $\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}e^x$, on en déduit que $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2^n e^{-nx}$. La fonction f_n est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$ dès que $n > 0$, donc u_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- b. Utilisons le théorème de convergence dominée : la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f , continue par morceaux, telle que $f(0) = 1$ et $f = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a, de plus, la condition de domination

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^n x} \leq f_1(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)},$$

cette dernière fonction étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème s'applique donc et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) = 0.$$

NB : Ces intégrales u_n ne sont autres que les intégrales de Wallis légèrement déguisées : en effet, une intégration par parties, en utilisant $\frac{1}{\operatorname{ch}^2} = (\operatorname{th})' = \left(\frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}\right)'$, donne la relation $u_{n+2} = \frac{n}{n+1} u_n$. On peut par exemple en déduire que $(n+1)u_{n+1}u_{n+2} = nu_nu_{n+1}$, la suite de terme général nu_nu_{n+1} est donc constante, de valeur $u_1u_2 = \frac{\pi}{2}$. Comme la suite (u_n) est décroissante (facile!), on déduit $u_{n+1} \sim u_n$, puis $nu_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$, puis $u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. On peut aussi obtenir les expressions

$$u_{2n} = \frac{\left(2^{n-1} (n-1)!\right)^2}{(2n-1)!} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \pi.$$

INT 12 (CCINP). Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} dt$.

- a. Ensemble de définition de f .
- b. Calculer $f(1)$.
- c. Par un changement de variable approprié, en déduire $f(x)$.

- a. Si $x = 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque, au voisinage de 0, on a $\left| \frac{\ln(t)}{t^2} \right| \geq \frac{1}{t^2}$, et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$. Donc $f(0)$ n'est pas défini.

Si $x \neq 0$, alors, lorsque t tend vers 0, on a $\frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} \sim \frac{1}{x^2} \ln(t)$, et la fonction $\ln$ est de signe constant et intégrable sur $]0, 1]$; lorsque t tend vers $+\infty$, on a $\frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} \sim \frac{\ln(t)}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ en utilisant les croissances comparées et plus précisément $\ln(t) = o(\sqrt{t})$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2}$ est alors intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Bilan. $D_f = \mathbb{R}^*$.

- b. Grosse astuce: on coupe l'intégrale en deux par la relation de Chasles en introduisant 1 comme point intermédiaire, et on pose $u = \frac{1}{t}$ dans l'une des deux intégrales. On a $f(1) = I_1 + I_2$ avec $I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1 + t^2} dt$ et $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1 + t^2} dt$. Or,

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1 + t^2} dt = - \int_{+\infty}^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^2}}{1 + \frac{1}{u^2}} = - \int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u^2 + 1} = -I_2.$$

Donc $f(1) = 0$.

- c. Pour $x > 0$, posons $t = xu$ dans l'intégrale, cela donne

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(xu)}{x^2(1 + u^2)} x du = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x + \ln u}{1 + u^2} du \\ &= \frac{\ln x}{x} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1 + u^2} du \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{\ln x}{x}. \end{aligned}$$

La fonction f étant manifestement paire, on a $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \frac{\pi}{2} \frac{\ln |x|}{|x|}$.

INT 13 (CCINP). Soit $f_n(x) = \begin{cases} x \left(1 - \frac{\lfloor x \rfloor}{n}\right)^n & \text{si } x < n \\ 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}$. Trouver la limite de $f_n(x)$ pour n tendant vers l'infini. Trouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.

- a. Si $x = 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque, au voisinage de 0, on a $\left| \frac{\ln(t)}{t^2} \right| \geq \frac{1}{t^2}$, et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$. Donc $f(0)$ n'est pas défini.

Si $x \neq 0$, alors, lorsque t tend vers 0, on a $\frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} \sim \frac{1}{x^2} \ln(t)$, et la fonction $\ln$ est de signe constant et intégrable sur $]0, 1]$; lorsque t tend vers $+\infty$, on a $\frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} \sim \frac{\ln(t)}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ en utilisant les croissances comparées et plus précisément $\ln(t) = o(\sqrt{t})$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2}$ est alors intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Bilan. $D_f = \mathbb{R}^*$.

- b. Grosse astuce: on coupe l'intégrale en deux par la relation de Chasles en introduisant 1 comme point intermédiaire, et on pose $u = \frac{1}{t}$ dans l'une des deux intégrales. On a $f(1) = I_1 + I_2$ avec $I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ et $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$. Or,

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = - \int_{+\infty}^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^2}}{1 + \frac{1}{u^2}} = - \int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u^2 + 1} = -I_2.$$

Donc $f(1) = 0$.

- c. Pour $x > 0$, posons $t = xu$ dans l'intégrale, cela donne

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(xu)}{x^2(1+u^2)} x du = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x + \ln u}{1+u^2} du \\ &= \frac{\ln x}{x} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{\ln x}{x}. \end{aligned}$$

La fonction f étant manifestement paire, on a $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \frac{\pi}{2} \frac{\ln|x|}{|x|}$.

INT 14 (CMT).

- a. Soit $a \in]-1, +\infty[$. Montrer que

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1+a \sin^2 x} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a \sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{a+1}}.$$

On pourra poser $t = \tan x$.

- b. Soit α un réel strictement positif. À quelle condition sur α la série de terme général

$$u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1+x^\alpha \sin^2 x}$$

est-elle convergente ?

- a. Pour $a > -1$, on vérifie que $1+a \sin^2 x$ est toujours strictement positif, d'où la définition de l'intégrale (intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0, \pi]$). La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+a \sin^2 x}$ vérifie la propriété de symétrie $f(\pi-x) = f(x)$, autrement dit son graphe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que l'intégrale sur $[0, \pi]$ vaut deux fois l'intégrale sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Les règles de Bioche (*hors programme*) montrent qu'il est pertinent, pour calculer cette dernière intégrale, de poser $t = \tan x$, soit $x = \text{Arctan } t$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a \sin^2 x} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+a \frac{t^2}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+(1+a)t^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{\sqrt{1+a}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1+a}}, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu. On a posé ensuite $u = t \sqrt{1+a}$.

- b. La question a. permet de donner un encadrement du terme général u_k . En effet, par une translation de la variable et la π -périodicité de la fonction $\sin^2$, on a $u_k = \int_0^\pi \frac{dt}{1+(t+k\pi)^\alpha \sin^2 t}$. En encadrant le facteur $(t+k\pi)^\alpha$, on déduit l'encadrement

$$\int_0^\pi \frac{dt}{1+\pi^\alpha(k+1)^\alpha \sin^2 t} \leq u_k \leq \int_0^\pi \frac{dt}{1+\pi^\alpha k^\alpha \sin^2 t},$$

et d'après la question précédente,

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^\alpha(k+1)^\alpha}} \leq u_k \leq \frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^\alpha k^\alpha}},$$

d'où un équivalent $u_k \sim \frac{\pi^{1-\frac{\alpha}{2}}}{k^{\alpha/2}}$. Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum_{k \geq 0} u_k$

converge si et seulement si $\frac{\alpha}{2} > 1$, donc $\alpha > 2$.

Remarque. La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{1+x^\alpha \sin^2 x}$ étant positive, on a montré que cette fonction était intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\alpha > 2$. Pour $\alpha > 2$ donc, cela donne de jolis exemples de fonctions intégrables sur $[0, +\infty[$ et qui ne tendent pas vers zéro à l'infini : en effet, on a $g(k\pi) = 1$ pour tout k entier naturel.

INT 15 (ENSEA). On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

- a. Ensemble de définition de f ?
- b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
- c. Expliciter f .

a. Posons $g(x, t) = \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Pour tout réel x fixé, l'application partielle $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifie $\lim_{t \rightarrow 0} g(x, t) = x$ (donc elle est prolongeable par continuité en 0), et on a $g(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \text{sgn}(x) \frac{\pi}{2t^3}$. On en déduit que cette application partielle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, quel que soit le réel x . Donc $D_f = \mathbb{R}$.

b. On a $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$, l'application $\frac{\partial g}{\partial x}$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}^2$ et on a la domination $0 \leq \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \leq \frac{1}{1+t^2}$ par une fonction intégrable de la variable t seulement, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, par la formule de Leibniz,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}.$$

- c. Calculons donc : comme f' est manifestement paire, supposons $x > 0$, et aussi $x \neq 1$ pour avoir deux pôles simples. En posant $T = t^2$, on décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{(1+T)(1+x^2T)} = \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{x^2}{1+x^2T} - \frac{1}{1+T} \right).$$

Pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on a alors

$$f'(x) = \frac{x^2}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^2t^2} - \frac{1}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2(x^2-1)}(x-1) = \frac{\pi}{2(x+1)}.$$

Comme f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors f' est continue et la relation reste vraie pour $x = 0$ et pour $x = 1$. Comme enfin, f' est paire, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{\pi}{2(1+|x|)}.$$

Comme $f(0) = 0$, on déduit (en discutant suivant le signe de x)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} \ln(1-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

INT 16 (CCINP). Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \ln x}{(1+x^4)^3} dx$.

- a. Montrer la convergence de l'intégrale impropre I .
- b. Calculer I .

- a. Soit $f : x \mapsto \frac{x^3 \ln x}{(1+x^4)^3}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est prolongeable par continuité en 0 puisque $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) \sim \frac{\ln x}{x^9}$, donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^8}\right)$, ce qui garantit largement l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$, donc finalement sur $]0, +\infty[$.
- b. Pour le calcul, posons d'abord $u = x^4$, ainsi $I = \frac{1}{16} J$, avec $J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln u \, du}{(1+u)^3}$. Pour calculer J , on va procéder à une intégration par parties, mais en y allant prudemment car les deux termes obtenus sont divergents en 0. Posons donc, pour $a > 0$, $J_a = \int_a^{+\infty} \frac{\ln u \, du}{(1+u)^3}$. On a alors

$$\begin{aligned} J_a &= \left[-\frac{\ln u}{2(1+u)^2} \right]_a^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)^2} \\ &= \frac{\ln a}{2(1+a)^2} + \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{(1+u)^2} - \frac{1}{1+u} \right) du \\ &= \frac{\ln a}{2(1+a)^2} - \frac{1}{2} \ln a - \frac{1}{2(1+a)} + \frac{1}{2} \ln(1+a) \\ &= -\frac{(a+2)a \ln a}{2(1+a)^2} - \frac{1}{2(1+a)} + \frac{1}{2} \ln(1+a) \xrightarrow{a \rightarrow 0} -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc $J = -\frac{1}{2}$, puis $I = -\frac{1}{32}$.

INT 17 (CCINP). Montrer l'existence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{\operatorname{sh} x}$. Montrer que

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}.$$

Soit $f : x \mapsto \frac{x}{\operatorname{sh} x}$. Alors f est continue sur $]0, +\infty[$, elle est prolongeable par continuité en 0 puisque $\operatorname{sh} x \sim x$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, et on a $f(x) \sim 2x e^{-x}$ en $+\infty$ donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées, donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui garantit l'existence (la convergence) de l'intégrale généralisée I .

Passons au calcul! Pour $x \in]0, +\infty[$, on peut écrire, puisque $e^{-2x} \in]0, 1[$,

$$\frac{x}{\operatorname{sh}(x)} = \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = \frac{2x e^{-x}}{1 - e^{-2x}} = 2x e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-2x})^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x),$$

avec $f_n(x) = x e^{-(2n+1)x}$. Chaque fonction f_n est continue par morceaux, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (prolongeable par continuité en 0, et par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f_n(x) = 0$).

Par construction, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction continue par morceaux $f : x \mapsto \frac{x}{2 \operatorname{sh} x}$. Enfin, une intégration par parties donne $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \frac{1}{(2n+1)^2}$, qui est le terme général d'une série convergente. On peut donc intervertir série et intégrale (*théorème d'intégration terme à terme*), ce qui donne justement

$$I = 2 \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}.$$

Remarque. Connaissant le résultat classique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on peut déduire $I = \frac{\pi^2}{4}$.

INT 18 (CCINP). Pour n entier naturel, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx$.

- a. Montrer que la suite (I_n) tend vers zéro en décroissant.
- b. Montrer la convergence de la série de terme général $(-1)^n I_n$ et calculer sa somme.

- a. On a $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) (\cos(x) - 1) dx \leq 0$, puisque la fonction que l'on intègre est négative. Donc la suite (I_n) est décroissante.

Posons $f_n(x) = (\cos x)^n$. Les fonctions f_n sont continues sur $S = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur S vers la fonction f continue par morceaux, telle que $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Enfin, on a la domination $|f_n(x)| \leq 1$, la fonction constante 1 étant intégrable sur S . On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (intersion limite-intégrale) qui donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S f_n = \int_S \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \int_S f = 0.$$

- b. Du coup, la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n I_n$ converge, par application du critère spécial des séries alternées.

Pour obtenir sa somme, travaillons sur une somme partielle S_n :

*Commentaires: il n'y a pas de problème pour intervertir une intégrale et une somme FINIE!
On reconnaîtra ensuite, sous l'intégrale, une somme géométrique de raison $-\cos x$.*

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^n (-1)^k (\cos x)^k dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - (-1)^{n+1} (\cos x)^{n+1}}{1 + \cos x} dx = S + (-1)^n R_n,$$

avec $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x}$ et $R_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{n+1}}{1 + \cos x} dx$.

À l'aide du théorème de convergence dominée, comme en **a.**, on montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$, il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale S . Or,

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 t} = [\tan(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1.$$

Finalement, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n = 1$.

INT 19 (CCINP). On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \operatorname{sh}(t)}{t} dt$.

- a. Ensemble de définition de F ?
- b. Calculer $F'(x)$.
- c. En déduire $F(x)$.

-
- a. Posons $f(x, t) = \frac{e^{-xt} \operatorname{sh}(t)}{t}$, alors pour tout x réel, l'application partielle $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 puisque $\lim_{t \rightarrow 0} f(x, t) = 1$. Regardons ce qu'il se passe en la borne $+\infty$. On a $\operatorname{sh}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^t$, donc $f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{e^{(1-x)t}}{t}$. Donc:
- si $1 - x \geq 0$, alors $\frac{1}{2} \frac{e^{(1-x)t}}{t} \geq \frac{1}{2t}$ au voisinage de $+\infty$, donc cette expression n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'intégrale $F(x)$ est alors divergente.
 - si $1 - x < 0$, par croissances comparées, on obtient $t^2 f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, d'où l'intégrabilité de $t \mapsto f(x, t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Bilan. $D_F =]1, +\infty[$.

- b. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \operatorname{sh}(t) = \frac{1}{2} (e^{-(x+1)t} - e^{-(x-1)t})$. Donc:
- pour tout $x \in D_F$, l'application partielle $t \mapsto f(x, t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$;
 - pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, l'application partielle $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$;
 - pour tout $x \in D_F$, l'application partielle $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue (par morc.) sur $\mathbb{R}_+^*$;

Il ne manque plus qu'une condition de domination. Or, si $S = [a, b]$ est un segment inclus dans D_F (donc $1 < a < b$), si $(x, t) \in S \times \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = e^{-xt} \operatorname{sh}(t) \leq e^{-at} \operatorname{sh}(t),$$

et la fonction $t \mapsto e^{-at} \operatorname{sh}(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et équivalente à $\frac{1}{2} e^{(1-a)t}$ au voisinage de $+\infty$.

On peut maintenant affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D_F =]1, +\infty[$ et que

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(e^{-(x+1)t} - e^{-(x-1)t} \right) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{1-x^2}.$$

- c. Il n'y a plus qu'à primitiver: $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + C$. Pour déterminer la constante C , remarquons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$: en effet, par convergence dominée, si (x_n) est une suite

d'éléments de D_F tendant vers $+\infty$, en posant $f_n(t) = f(x_n, t) = \frac{e^{-x_n t} \operatorname{sh}(t)}{t}$, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a la domination $0 \leq f_n(t) \leq f_{n_0}(t)$ où n_0 est un indice tel que $x_{n_0} = \min_{n \in \mathbb{N}}(x_n) \in]1, +\infty[$ (je laisse le lecteur se persuader de l'existence d'un tel indice n_0), la fonction f_{n_0} étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On

a alors $F(x_n) = \int_{\mathbb{R}_+^*} f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 0$ et ceci pour toute suite (x_n) tendant vers $+\infty$, ce qui prouve par caractérisation séquentielle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$. Mais on a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = C$, d'où $C = 0$ et enfin

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right).$$

INT 20 (CCINP). Soit a un réel, soit l'application $f : x \mapsto \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}$.

- a. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- b. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$.

- a. On a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$, donc la fonction f est prolongeable par continuité en 0. De plus,

$$|f(x)| \leq \frac{1}{e^x - 1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x},$$

ce qui garantit l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$, puis sur $]0, +\infty[$.

- b. Comme $e^{-x} \in]0, 1[$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \frac{e^{-x} \sin(ax)}{1 - e^{-x}} = e^{-x} \sin(ax) \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \sin(ax).$$

Posons $f_n(x) = e^{-nx} \sin(ax)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ (car p.p.c. en 0 et $|f_n(x)| \leq e^{-x}$ au voisinage de $+\infty$). La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et a pour la somme la fonction f qui est continue. En utilisant l'inégalité usuelle $|\sin(t)| \leq |t|$, on a

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \, dx \leq |a| \int_0^{+\infty} x e^{-nx} \, dx = \frac{|a|}{n^2},$$

donc la série de terme général $\int_{\mathbb{R}_+^*} |f_n|$ est convergente. Ceci permet d'appliquer le théorème

d'intégration terme à terme. La fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est intégrable (mais on le sait déjà), et

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} f_n. \text{ Enfin,}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx} \sin(ax) \, dx = \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-n+ia)x} \, dx \right) = \operatorname{Im} \left(\left[\frac{e^{(-n+ia)x}}{-n+ia} \right]_0^{+\infty} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{n-ia} \right) = \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

On en déduit la relation demandée.

INT 21 (ENSEA). On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} \, dt$.

- Ensemble de définition de f .
- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_f .
- Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+ .

- Dans tous les cas, on a **(1)**: $\frac{e^{-t}}{x+t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{t}$, fonction intégrable au voisinage de $+\infty$.

Si $x > 0$, l'intégrande est une fonction de t continue sur $[0, +\infty[$ d'où l'existence de l'intégrale grâce à **(1)**.

Si $x = 0$, on a $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$, d'où la non-intégrabilité.

Si $x < 0$, on retrouve le même problème d'intégrale divergente en la borne $-x \in \mathbb{R}_+^*$.

En conclusion, $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

- Posons $g(x, t) = \frac{e^{-t}}{x+t}$, alors $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec $\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) = (-1)^k k! \frac{e^{-t}}{(x+t)^{k+1}}$.

Si on fixe $a > 0$, alors

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+ \quad \left| \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \frac{k! e^{-t}}{(t+a)^{k+1}} \leq \frac{k!}{a^{k+1}} e^{-t},$$

fonction de t intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Cette domination permet d'affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f^{(k)}(x) = (-1)^k k! \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^{k+1}} \, dt.$$

c. On a $\frac{e^{-t}}{x+t} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{x}$. On peut conjecturer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt = \frac{1}{x}$, il reste à le prouver! Remarquons pour cela que

$$0 \leq \frac{1}{x} - f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+t} \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-t}}{x(x+t)} dt \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt.$$

L'intégrale (convergente!) $J = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$ est une constante, on a donc prouvé que $f(x) - \frac{1}{x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$, ce qui entraîne $f(x) - \frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x}\right)$, soit $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

d. Posons le changement de variable $u = x + t$, on a alors

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-u}}{u} du = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Or, $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \int_x^1 \frac{du}{u} + \int_x^1 \frac{e^{-u} - 1}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$. Le premier terme vaut $-\ln(x)$ et tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0, le deuxième a une limite finie qui est l'intégrale convergente $\int_0^1 \frac{e^{-u} - 1}{u} du$, le troisième est constant. En conclusion, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$.

INT 22 (CMT). Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue. Comparer les natures de l'intégrale généralisée

$$J = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t} dt \text{ et de la série } \sum_{n \geq 0} \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

Posons $g_n(t) = t^n f(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$, et $g(t) = \frac{f(t)}{1-t}$ pour $t \in [0, 1[$. Les fonctions g_n sont continues et intégrables sur $[0, 1[$ (puisque p.p.c. au point 1), la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge simplement sur $[0, 1[$ vers la fonction continue g . Donc, si la

série $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 t^n f(t) dt = \sum_{n \geq 0} \int_{[0, 1[} |g_n|$ converge, le théorème d'intégration terme à terme s'applique et donne l'intégrabilité sur $[0, 1[$ de la fonction g (i.e. la convergence de l'intégrale J), et l'égalité

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

Réciproquement, supposons g intégrable sur $[0, 1[$. Posons $s_n(t) = \sum_{k=0}^n g_k(t) = f(t) \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1[$. Alors les fonctions s_n sont continues sur $[0, 1[$, la suite (s_n) converge simplement sur $[0, 1[$ vers la fonction continue g et on a, sur $[0, 1[$, la domination $0 \leq s_n(t) \leq g(t)$, avec g intégrable sur $[0, 1[$. Le théorème de convergence dominée s'applique

alors et donne $\int_0^1 g(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 s_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \int_0^1 g_k(t) dt \right)$. La série de terme

général $\int_0^1 g_k(t) dt$ est donc convergente.

INT 23 (ENSEA). On admet la relation $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{\pi}{2}$.

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2(t^2 + 1)} dt$.

- a. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- b. Prouver la relation $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) - f(x) = \frac{\pi}{2}(1 - |x|)$.
- c. En déduire l'expression de $f(x)$.

- a. Posons $g(x, t) = \frac{1 - \cos(xt)}{t^2(t^2 + 1)}$ pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. L'application $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a facilement $\lim_{t \rightarrow 0} g(x, t) = \frac{x^2}{2}$ donc cette application est prolongeable par continuité en 0, et $g(x, t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, d'où l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $f(x)$ existe pour tout x réel.

De plus, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ avec $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin(xt)}{t(t^2 + 1)}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\cos(xt)}{t^2 + 1}$ (fonctions continues par rapport à la variable t), et on a les dominations

$$\forall a > 0 \quad \forall (x, t) \in [-a, a] \times \mathbb{R}_+^* \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{|x|}{t^2 + 1} \leq \frac{a}{t^2 + 1}$$

et

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \quad \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{1}{t^2 + 1},$$

la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2 + 1}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Cela permet d'affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(t^2 + 1)} dt \quad \text{et} \quad f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{t^2 + 1} dt.$$

- b. On calcule

$$\begin{aligned} f''(x) - f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2 \cos(xt) - 1 + \cos(xt)}{t^2(1 + t^2)} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(t^2 + 1)(\cos(xt) - 1) + t^2}{t^2(1 + t^2)} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} - \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{1 + t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2\left(\frac{xt}{2}\right)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Si $x > 0$, on pose le changement de variable linéaire $u = \frac{xt}{2}$, cela donne

$$f''(x) - f(x) = \frac{\pi}{2} - x \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{\pi}{2}(1 - x).$$

Pour $x < 0$, on peut aussi utiliser ce changement de variable, mais les bornes de la nouvelle intégrale sont alors 0 et $-\infty$! On peut aussi remarquer que les fonctions f et f'' sont paires. On arrive finalement à $f''(x) - f(x) = \frac{\pi}{2}(1 - |x|)$, relation valable aussi pour $x = 0$.

- c. On résout l'équation différentielle $y'' - y = \frac{\pi}{2}(1 - |x|)$. On la résout d'abord sur $\mathbb{R}_+$ où elle s'écrit $y'' - y = \frac{\pi}{2}(1 - x)$. Une solution particulière évidente est alors $x \mapsto \frac{\pi}{2}(x - 1)$. La solution générale de l'équation homogène est $y_H = ae^x + be^{-x}$. Il existe donc deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = ae^x + be^{-x} + \frac{\pi}{2}(x - 1).$$

On a facilement $f(0) = f'(0) = 0$, ce qui donne $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $f(x) = \frac{\pi}{2}(e^{-x} + x - 1)$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme f est paire,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\pi}{2}(e^{-|x|} + |x| - 1).$$

INT 24 (Centrale). Calculer, après avoir justifié son existence, $I = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) dx$.

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut donc, pour tout $x \geq 0$, définir $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$. D'après le théorème fondamental, la fonction f est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, avec $f'(x) = -e^{-x^2}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, posons alors $J(a) = \int_0^a \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) dx$.

Notons que, pour $x \geq 1$, on a $0 \leq f(x) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-x}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$, ce qui justifie l'intégration par parties qui va suivre:

$$J(a) = \int_0^a f(x) dx = [x f(x)]_0^a - \int_0^a x f'(x) dx = \int_0^a x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^a = \frac{1}{2} (1 - e^{-a^2})$$

L'intégrale $J(a)$ admet une limite finie lorsque $a \rightarrow +\infty$, ce qui justifie la convergence de l'intégrale I proposée et donne $I = \lim_{a \rightarrow +\infty} J(a) = \frac{1}{2}$.

X. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

EQD 1 (CMT). Soit **(E)** : $x^2 (x+1) y'' + x(x-1) y' + y = 0$.

- Déterminer les solutions de **(E)** développables en série entière.
- Résoudre **(E)**.

- Calcul archi-classique: on cherche y sous la forme $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $] -R, R[$, en espérant

$R > 0$. On a alors

$$xy' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n ; \quad x^2 y' = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n ; \quad x^2 y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n ; \quad x^3 y'' = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n .$$

On réinjecte dans **(E)** et on identifie les coefficients (conséquence de l'unicité du développement en série entière). Alors y est solution de **(E)** si et seulement si

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1 \quad (n-1)^2 (a_{n-1} + a_n) = 0 ,$$

c'est-à-dire **ssi** $a_0 = 0$ et $\forall n \geq 2 \quad a_n = -a_{n-1}$. On voit que le coefficient a_1 reste indéterminé, et que $a_n = (-1)^{n+1} a_1$ pour tout $n \geq 2$.

On a donc $y(x) = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^n = a_1 \frac{x}{1+x}$ sur $] -1, 1[$ puisque le rayon de convergence est visiblement $R = 1$.

- Sur chacun des intervalles $I_1 =] -\infty, -1[$, $I_2 =] -1, 0[$ et $I_3 =]0, +\infty[$, on peut mettre l'équation sous forme normale et affirmer (théorème de Cauchy) que l'ensemble des solutions de l'équation **(E)** constitue un plan vectoriel. La fonction $y_0 : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est solution de **(E)** sur chacun de ces trois intervalles. *En fait, on ne le sait que sur $] -1, 1[$ puisqu'on a utilisé un développement en série entière, valide uniquement dans cet intervalle! Le lecteur courageux vérifiera que y_0 est solution de **(E)** sur $] -\infty, -1[$ ainsi que sur $] -1, +\infty[$. On applique une méthode de variation de la constante pour obtenir toutes les solutions de **(E)** sur chacun de ces intervalles. Autrement dit, on fait le changement de fonction inconnue $y = y_0 z$, où z est une nouvelle fonction inconnue supposée de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle considéré. Alors*

$$\begin{aligned} \textbf{(E)} &\iff x^2(x+1)(z''y_0 + 2z'y'_0 + zy''_0) + x(x-1)(z'y_0 + zy'_0) + zy_0 = 0 \\ &\iff x^2(x+1)y_0 z'' + \left(2x^2(x+1)y'_0 + x(x-1)y_0\right) z' = 0 \\ &\iff x^3 z'' + x^2 z' = 0 \quad \quad \quad (\text{après calculs}) \\ &\iff x z'' + z' = 0 \\ &\iff x z'(x) = A \\ &\iff z'(x) = \frac{A}{x} \\ &\iff z(x) = A \ln|x| + B , \end{aligned}$$

où A et B sont deux constantes arbitraires. Donc $y = \frac{x}{1+x} (A \ln|x| + B)$ est l'expression des solutions sur chacun des trois intervalles de résolution.

EQD 2 (CCINP). a. Résoudre $y'' + y = \cos x$.

b. Trouver les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) + f(-x) = x + \cos x .$$

a. Les solutions sont $y = a \cos x + b \sin x + \frac{x}{2} \sin x$.

b. On rappelle que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se décompose de façon unique en $f = g + h$, avec g paire et h impaire, en posant précisément

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad ; \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} .$$

Cela signifie aussi que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$, en notant $\mathcal{P}$ le s.e.v. des fonctions paires et $\mathcal{I}$ le s.e.v. des fonctions impaires.

En décomposant f de cette façon et en séparant les parties paire et impaire dans l'équation obtenue, on se ramène à deux équations différentielles indépendantes $\begin{cases} g''(x) + g(x) = \cos x \\ h''(x) + h(x) = x \end{cases}$.

L'équation $g''(x) + g(x) = \cos x$ admet pour solutions $g(x) = a \cos x + b \sin x + \frac{x}{2} \sin x$, mais on ne doit en conserver que les solutions paires ; l'équation $h''(x) + h(x) = x$ admet pour solutions $h(x) = \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x - x$, mais on n'en conserve que les solutions impaires. Au final, les fonctions f solutions du problème posé sont

$$f : x \mapsto \frac{1}{2} x \sin x - x + a \cos x + \mu \operatorname{sh} x \quad , \quad (a, \mu) \in \mathbb{R}^2 .$$

EQD 3 (CMT). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, soit $g = f + f'$.

a. Résoudre l'équation différentielle **(E)** : $y' + y = g$ (exprimer y à l'aide d'une intégrale).

b. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$, avec l réel. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

a. L'équation **(E)** s'écrit $e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}(y(x) e^x) = g(x)$, donc $y(x) e^x = \int_0^x g(t) e^t dt + K$, soit

$$y(x) = K e^{-x} + e^{-x} \int_0^x g(t) e^t dt .$$

La fonction f admet donc une expression de cette forme, pour une certaine constante K .

b. On suppose $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$. Fixons $\varepsilon > 0$, il existe alors $A > 0$ tel que $t \geq A \implies |g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout réel x tel que $x > A$, on peut écrire

$$f(x) = K' e^{-x} + e^{-x} \int_A^x g(t) e^t dt , \quad (*)$$

où $K' = K + \int_0^A g(t) e^t dt$ est un réel fixé (indépendant de x). Le terme $K' e^{-x}$ tend vers zéro lorsque $x \rightarrow +\infty$, il existe donc un réel B tel que $x \geq B \implies |K' e^{-x}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On majore l'autre terme (en valeur absolue) : pour $x \geq A$,

$$\left| e^{-x} \int_A^x g(t) e^t dt \right| \leq e^{-x} \int_A^x |g(t)| e^t dt \leq \frac{\varepsilon}{2} e^{-x} (e^x - e^A) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Enfin, de **(*)** et de l'inégalité triangulaire, on déduit que, pour $x \geq \max\{A, B\}$, on a $|f(x)| \leq \varepsilon$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- c. Posons $h(x) = f(x) - l$. Alors h est $\mathcal{C}^1$ et $h'(x) + h(x) = f'(x) + f(x) - l = g(x) - l \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on peut donc appliquer la question b. qui montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$, soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

EQD 4 (CCINP). Soit l'équation différentielle **(E)** : $(1-x)y'' + (x-3)y' + y = 0$.

- a. Montrer qu'il existe une solution de **(E)**, DSE en 0, telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
b. Résoudre **(E)**.

- a. On cherche y sous la forme $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $] -R, R[$, en espérant $R > 0$. On a alors

$$y' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n ; \quad xy' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n ; \quad y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n ; \quad xy'' = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n .$$

On réinjecte dans **(E)** et on identifie les coefficients (conséquence de l'unicité du développement en série entière). Alors y est solution de **(E)** si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+2) a_{n+2} - (n+3) a_{n+1} + a_n = 0 .$$

On voit que la donnée de $a_0 = y(0) = 1$ et de $a_1 = y'(0) = 1$ permet de déterminer a_n de proche en proche pour tout n . On obtient $a_2 = 1$, puis $a_3 = 1$, et on conjecture bien sûr que $a_n = 1$ pour tout n entier naturel. On le prouve ensuite par une récurrence double,

immédiate. Ainsi $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ sur $] -1, 1[$ (le rayon de convergence est $R = 1$).

- b. Sur chacun des intervalles $] -\infty, 1[$ et $] 1, +\infty[$, la fonction $y_0 : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est solution de **(E)** (on le vérifie par le calcul), et l'ensemble des solutions de **(E)**, sur chacun de ces intervalles, est un plan vectoriel. On applique la méthode de variation de la constante pour obtenir toutes les solutions. On pose donc $y = y_0 z$, où z est une nouvelle fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$, on dérive deux fois, on réinjecte dans **(E)** et on simplifie:

$$\textbf{(E)} \iff (1-x)y_0 z'' + [2(1-x)y_0' + (x-3)y_0] z' = 0 \iff z'' = z' \iff z'(x) = A e^x .$$

On obtient donc $z(x) = A e^x + B$, où A et B sont deux constantes arbitraires. Sur chacun des intervalles $] -\infty, 1[$ et $] 1, +\infty[$, les solutions de **(E)** sont les fonctions $y = \frac{A e^x + B}{1-x}$.

EQD 5 (ENSEA). Soit l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) \quad : \quad x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2) y - 1 = 0 .$$

a. Chercher une solution de **(E)** développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

b. Vérifier que $y = -\frac{1}{x^2}$ est solution de **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Résoudre **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$.

a. Après quelques calculs que le lecteur se fera un plaisir de détailler, en recherchant une solution de **(E)** sous la forme $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur un certain intervalle $] -R, R[$, et en utilisant l'unicité du développement en série entière pour identifier les coefficients, on obtient les conditions

$$2a_0 = 1, \quad 6a_1 = 0, \quad \forall n \geq 2 \quad (n+1)(n+2) a_n = a_{n-2} .$$

On en déduit que $a_{2p+1} = 0$ pour tout p entier naturel, et que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad a_{2p} = \frac{1}{(2p+2)(2p+1)} \frac{1}{(2p)(2p-1)} \cdots \frac{1}{4 \times 3} \frac{1}{2} = \frac{1}{(2p+2)!} .$$

La seule solution de **(E)** développable en série entière (ici sur $\mathbb{R}$, il est immédiat que le rayon de convergence est infini) est

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} .$$

NB : le détail du calcul ci-dessus n'a pas de sens pour $x = 0$, mais la solution f recherchée est bien sûr prolongée par continuité en 0 avec $f(0) = \frac{1}{2}$.

b. Vérification de calcul, laissée au lecteur...

c. Pour résoudre **(E)** par une méthode du style "variation de la constante", il faudrait connaître une solution y_0 de l'équation sans second membre **(E0)** ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$. L'équation étant linéaire, une différence de deux solutions de **(E)** est solution de **(E0)**, la fonction $y_0 = \frac{\operatorname{ch} x}{x^2}$ fera donc l'affaire. On recherche maintenant les solutions y de **(E0)** sous la forme $y = zy_0$, où $z : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est la nouvelle fonction inconnue, de classe $\mathcal{C}^2$. On dérive deux fois, on réinjecte, bref en posant $Z = z'$, on tombe sur l'équation du premier ordre $Z' + \left(2\frac{y_0'}{y_0} + \frac{4}{x}\right) Z = 0$, d'où

$$Z = C e^{-(4 \ln x + 2 \ln y_0)} = \frac{C}{x^4 y_0^2} = \frac{C}{\operatorname{ch}^2 x} ,$$

Ensuite, $z = C \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} + D$, les solutions de **(E0)** sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions

$$y = C \frac{\operatorname{sh} x}{x^2} + D \frac{\operatorname{ch} x}{x^2} .$$

Enfin, les solutions de **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$ sont $y = \frac{C \operatorname{sh} x + D \operatorname{ch} x - 1}{x^2}$.

EQD 6 (Mines-Ponts). Résoudre l'équation différentielle **(E)** : $y'' + 4xy' + (4x^2 + 3)y = 0$ en faisant le changement de fonction inconnue $z(x) = y(x) e^{x^2}$.

Ce n'est que du calcul, on pose donc $y = z e^{-x^2}$, on dérive deux fois :

$$y' = (z' - 2xz) e^{-x^2} \quad ; \quad y'' = (z'' - 4xz' + (4x^2 - 2)z) e^{-x^2} ,$$

on réinjecte dans **(E)** et... après simplifications, il ne reste plus que $z'' + z = 0$, c'est quasiment miraculeux!!! On dégage alors $z = A \cos x + B \sin x$, puis on conclut $y = (A \cos x + B \sin x) e^{-x^2}$.

EQD 7 (CCINP). Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x} .$$

On remarque qu'il y a e^{-x} en facteur dans le second membre, pourquoi pas alors poser le changement de fonction inconnue $y(x) = z(x) e^{-x}$? On dérive deux fois : $y' = (z' - z) e^{-x}$, $y'' = (z'' - 2z' + z) e^{-x}$, et on obtient alors une nouvelle équadiff qui est tout simplement $z'' = \frac{1}{x}$, il n'y a alors qu'à primitiver deux fois : $z' = \ln x + C$, puis $z = x \ln(x) - x + Cx + D$, et finalement

$$y = (x \ln(x) - x + Cx + D) e^{-x} .$$

XI. CALCUL DIFFÉRENTIEL

CCD 1 (CCINP). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = x^2 y + \ln(1 + y^2)$. Déterminer les extremums globaux et les extremums locaux de f .

On a $D_f = \mathbb{R}^2$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ avec $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{2y}{1+y^2}$.

Le seul point critique de f est l'origine $O = (0, 0)$. On a $f(0, 0) = 0$ et $f(0, y) = \ln(1+y^2) \geq 0$ donc f ne présente pas de maximum local en O . On constate ensuite (après avoir tâtonné un peu) que

$$f(x, -x^2) = -x^4 + \ln(1 + x^4) = -x^4 + \left(x^4 - \frac{x^8}{2} + o(x^{11})\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^8}{2} ,$$

donc f ne présente pas non plus de minimum local en O . La fonction f ne présente donc pas d'extremum local.

Enfin, on note que $f(0, y) = \ln(1 + y^2) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$, donc f n'est pas majorée. Et $f(x, -x) = -x^3 + \ln(1 + x^2) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$, donc f n'est pas minorée. De toute façon, si elle ne présente pas d'extremum local, elle ne présente pas non plus d'extremum global.

CCD 2 (CCINP). On pose $f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$. Montrer que l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par opérations sur des fonctions $\mathcal{C}^1$. Pour $(x, y) \in U$, on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2 y^2 (x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x^5 y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Par ailleurs, les applications partielles à l'origine, i.e. les applications $x \mapsto f(x, 0)$ et $y \mapsto f(0, y)$ sont nulles, donc sont dérivables en 0 avec une dérivée nulle, cela prouve l'existence de dérivées partielles premières de f à l'origine, avec $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

L'application f admet donc en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles d'ordre un, il reste à montrer que les applications $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Elles sont toutes deux continues sur U comme produits et quotients de fonctions continues, il reste donc à examiner la continuité en $(0, 0)$.

En utilisant les inégalités $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$, $0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2$ et $|2xy| \leq x^2 + y^2$, on obtient facilement

$$0 \leq \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \leq \frac{3(x^2 + y^2)^3}{(x^2 + y^2)^2} = 3(x^2 + y^2) \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| = \frac{|2xy|(x^2)^2}{(x^2 + y^2)^2} \leq x^2 + y^2$$

et, comme il est clair que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x^2 + y^2) = 0$, on déduit par encadrement que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

CCD 3 (CCMP 2023). Soit $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, soit $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \|x\|^2$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne standard.

- a. Montrer que ρ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et préciser ses dérivées partielles d'ordre deux.
- b. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $f : \begin{cases} U \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(\rho(x)) = g(\|x\|^2) \end{cases}$. Déterminer les fonctions g telles que $\Delta f = 0$, où Δ est le laplacien.

a. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$, alors $\rho(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$, l'application ρ est clairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur U

(et même sur $\mathbb{R}^n$) avec $\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 2x_i$, puis $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} = 2$ et $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ si $i \neq j$. La matrice hessienne de ρ en tout point a de $\mathbb{R}^n$ est $H_\rho(a) = 2I_n$.

b. Comme $f = g \circ \rho$, i.e. $f(x) = g(\|x\|^2)$, par la règle de la chaîne, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = g'(\rho(x)) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 2x_i g'(\|x\|^2) \quad (1 \leq i \leq n), \quad \text{puis}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 2 g'(\|x\|^2) + 2x_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} g''(\|x\|^2) = 2 g'(\|x\|^2) + 4x_i^2 g''(\|x\|^2).$$

Par addition, on obtient le laplacien $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 4 \|x\|^2 g''(\|x\|^2) + 2n g'(\|x\|^2)$.

En posant $t = \|x\|^2$, l'équation aux dérivées partielles $\Delta f = 0$ se ramène à l'équation différentielle ordinaire $4t g''(t) + 2n g'(t) = 0$, ce qui nous donne d'abord

$$g'(t) = A e^{-\frac{n}{2} \ln(t)} = A t^{-\frac{n}{2}}.$$

On discute ensuite:

- si $n = 2$, de $g'(t) = \frac{A}{t}$, on tire $g(t) = A \ln(t) + B$, avec A et B réels ;

- si $n \geq 3$, on obtient $g(t) = C t^{-\frac{n}{2}+1} + D$, avec C et D réels.

CCD 4 (CMT). En utilisant les coordonnées polaires, résoudre, sur l'ouvert $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, les équations aux dérivées partielles

$$(1) \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 1 ;$$

$$(2) \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 .$$

Montrer qu'il existe une unique solution de **(1)** sur U vérifiant $\forall y \in \mathbb{R} \quad f(1, y) = y$ et l'expliciter.

(1) : Le changement de variables $\varphi : (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, dont on peut ici facilement expliciter l'application réciproque $\varphi^{-1} : (x, y) \mapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arctan} \frac{y}{x} \right)$.

Posons $g(r, \theta) = f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$, et appliquons la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = (\cos \theta) \frac{\partial f}{\partial x} + (\sin \theta) \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{r} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

On a beaucoup de chance, on a reconnu le premier membre de l'équation **(1)**, cette dernière se ramène donc à $\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{1}{r}$, soit $g(r, \theta) = \ln r + k(\theta)$ avec $k :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ fonction arbitraire de classe $\mathcal{C}^1$, et finalement

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + k \left(\operatorname{Arctan} \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + h \left(\frac{y}{x} \right),$$

avec $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction arbitraire de classe $\mathcal{C}^1$.

Si l'on impose la condition $f(1, y) = y$, on voit que cela donne $h(y) = y - \frac{1}{2} \ln(1 + y^2)$, donc f est complètement déterminée, puis

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) = \ln(x) + \frac{y}{x}.$$

(2) : On passe maintenant au calcul des dérivées partielles secondes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial g}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left((\cos \theta) \frac{\partial f}{\partial x} + (\sin \theta) \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= (\cos \theta) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + (\sin \theta) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= (\cos \theta) \cdot \left[(\cos \theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\sin \theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right] + (\sin \theta) \cdot \left[(\cos \theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (\sin \theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] \\ &= (\cos^2 \theta) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 (\sin \theta) (\cos \theta) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (\sin^2 \theta) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \left[x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] \end{aligned}$$

On a vraiment beaucoup de chance aujourd'hui, c'est un jour à jouer au loto, on tombe juste sur le premier membre de l'équation (2). On continue :

$$\begin{aligned} (2) \quad &\Longleftrightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = A(\theta) \\ &\Longleftrightarrow g(r, \theta) = r \cdot A(\theta) + B(\theta) \\ &\Longleftrightarrow f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot a\left(\frac{y}{x}\right) + b\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

avec $A, B : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$ fonctions arbitraires de classe $\mathcal{C}^2$; ou $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions arbitraires de classe $\mathcal{C}^2$.

CCD 5 (CCMP 2022). On pose $S(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$.

- Montrer que S est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad x S''(x) + S'(x) + x S(x) = 0$.
- Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Pour $(x, y) \in U$, on pose $\varphi(x, y) = S(\sqrt{x^2 + y^2})$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que $\Delta \varphi + \varphi = 0$, où Δ est le laplacien.

- a. Posons $f(x, t) = \cos(x \sin t)$ pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$. Alors $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur le segment $[0, \pi]$ donc intégrable sur ce segment (pour tout x réel), et $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (pour tout t). Pour tout x réel, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin(t) \sin(x \sin t)$ est continue sur le segment $[0, \pi]$ donc intégrable sur ce segment. Enfin,

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi] \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| = | -\sin^2(t) \cos(x \sin t) | \leq 1 ,$$

la fonction constante $t \mapsto 1$ étant intégrable sur le segment $[0, \pi]$, ce qui fournit une domination valide pour affirmer que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour autoriser à dériver deux fois terme à terme, ce qui donne

$$S'(x) = - \int_0^\pi \sin(t) \cdot \sin(x \sin t) dt \quad \text{et} \quad S''(x) = - \int_0^\pi \sin^2(t) \cdot \cos(x \sin t) dt .$$

- b. On intègre par parties, par exemple en observant que

$$\begin{aligned} x (S''(x) + S(x)) &= \int_0^\pi x (1 - \sin^2 t) \cos(x \sin t) dt \\ &= \int_0^\pi \cos(t) \cdot (x \cos(t) \cos(x \sin t)) dt \\ &= [\cos(t) \cdot \sin(x \sin t)]_{t=0}^{t=\pi} + \int_0^\pi \sin(t) \cdot \sin(x \sin t) dt \\ &= -S'(x) , \end{aligned}$$

le crochet étant nul. C'est bien la relation voulue.

- c. L'application φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. En posant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, on a $\varphi(x, y) = S(r)$ et on calcule

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{dS}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = S'(r) \frac{x}{r} ,$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x \cdot \frac{S'(r)}{r} \right) \\ &= \frac{S'(r)}{r} + x \cdot \frac{x}{r} \cdot \frac{r S''(r) - S'(r)}{r^2} \\ &= \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) S'(r) + \frac{x^2}{r^2} S''(r) , \end{aligned}$$

et une expression analogue pour $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$. Donc

$$\begin{aligned} \Delta \varphi + \varphi &= \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) S'(r) + \frac{x^2}{r^2} S''(r) + \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) S'(r) + \frac{y^2}{r^2} S''(r) + S(r) \\ &= S''(r) + \frac{1}{r} S'(r) + S(r) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après b.

XII. PROBABILITÉS

PRO 1 (CCINP 2016). Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche. On tire une boule dans l'urne. Si elle est noire, le jeu est terminé. Si elle est blanche, on remet la boule blanche tirée ainsi qu'une nouvelle boule blanche dans l'urne, et on recommence jusqu'à obtention de la boule noire. On note X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.

- a. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ? Quelle est la loi de X ? Est-ce bien une variable aléatoire discrète ?
- b. La variable X est-elle d'espérance finie ?

- a. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit S_k l'événement: "le k -ème tirage conduit à un succès (obtention de la boule noire)". On a alors $\{X = 1\} = S_1$ et, pour tout $k \geq 2$, $\{X = k\} = \overline{S_1} \cap \dots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k$. Donc $P(X = 1) = P(S_1) = \frac{1}{2}$ et, pour $k \geq 2$, la formule des probabilités composées donne

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(\overline{S_1}) P(\overline{S_2} | \overline{S_1}) \dots P(\overline{S_{k-1}} | \overline{S_1} \cap \dots \cap \overline{S_{k-2}}) P(S_k | \overline{S_1} \cap \dots \cap \overline{S_{k-1}}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}. \end{aligned}$$

Je suppose que l'on demande de vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$, autrement dit que l'événement $\{X = +\infty\}$ est quasi-impossible (mais l'ensemble $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ étant dénombrable, cela ne changerait rien au fait que X soit discrète!), et ceci est vrai car $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ (série télescopique), donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

donc $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$.

- b. On a $k P(X = k) = \frac{1}{k+1}$, donc la série de terme général $k P(X = k)$ est divergente, la variable X n'est pas d'espérance finie. "En moyenne", le jeu dure donc éternellement!

L'éternité, c'est long, surtout vers la fin! (Woody Allen)

PRO 2 (CMT 2016). Des usagers d'internet effectuent des demandes de connexion à un opérateur. Le nombre X de demandes pendant un intervalle de temps de durée Δt suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. La probabilité qu'une demande aboutisse est $p \in]0, 1[$. Soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre de demandes qui aboutissent pendant l'intervalle de temps Δt .

- Calculer $P(Y = k | X = j)$ pour $(j, k) \in \mathbb{N}^2$.
- Montrer que $\{Y = n\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\{X = k + n\} \cap \{Y = n\})$.
- Déterminer la loi de Y .

- On reconnaît une loi binomiale: si $j < k$, alors $P(Y = k | X = j) = 0$, et si $j \geq k$, alors

$$P(Y = k | X = j) = \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k}.$$

- C'est évident... et c'est une réunion disjointe!
- Calculons!

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X = k + n\} \cap \{Y = n\}) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = n | X = k + n) P(X = k + n) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n}{n} p^n (1-p)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+n}}{(k+n)!} \\ &= \frac{\lambda^n p^n e^{-\lambda}}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!} \\ &= \frac{\lambda^n p^n e^{-\lambda}}{n!} e^{(1-p)\lambda} \\ &= e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Donc Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(p\lambda)$.

PRO 3 (ENSEA 2016). Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes, suivant la loi géométrique de paramètre p .

- Déterminer la loi de $X + Y$.
- Calculer $P(X + Y = 2Z)$ et $P(X + Y \geq Z)$.

- On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $(X + Y)(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. Pour $n \geq 2$, on a

$$\{X + Y = n\} = \bigsqcup_{k=1}^{n-1} (\{X = k\} \cap \{Y = n - k\}).$$

La réunion étant disjointe, et les variables X et Y étant indépendantes, on en déduit

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(X = k) P(Y = n - k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p)^{k-1} p(1-p)^{n-k-1} \\ &= p^2 \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{n-2} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}. \end{aligned}$$

b. • On a $\{X + Y = 2Z\} = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} (\{X + Y = 2n\} \cap \{Z = n\})$. La réunion étant disjointe, et les variables $X + Y$ et Z étant indépendantes (par le lemme des coalitions, *hors programme*), on en déduit, en posant $q = 1 - p$,

$$\begin{aligned} P(X + Y = 2Z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X + Y = 2n) P(Z = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)p^2 q^{2n-2} p q^{n-1} \\ &= p^3 \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1) q^{3n-3} \\ &= p^3 \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) (q^3)^n. \end{aligned}$$

Pour expliciter, posons $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)x^n$ pour $x \in]-1, 1[$ (c'est une série entière de rayon de convergence 1). Alors

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{1-x} + 2x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

Donc $P(X + Y = 2Z) = p^3 \frac{1+q^3}{(1-q^3)^2}$.

• Considérons d'abord l'événement contraire, qui me semble plus facile:

$$\{X + Y < Z\} = \bigsqcup_{n=2}^{+\infty} (\{X + Y = n\} \cap \{Z > n\}).$$

Par réunion disjointe et indépendance, $P(X + Y < Z) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(X + Y = n) P(Z > n)$.

Or, $P(Z > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(Z = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p q^{k-1} = q^n$. Ensuite,

$$P(X + Y < Z) = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)p^2q^{2n-2} = p^2q^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(q^2)^{n-1}.$$

Or, pour $x \in]-1, 1[$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}$, donc

$$P(X + Y < Z) = \frac{p^2q^2}{(1-q^2)^2} = \left(\frac{1-p}{2-p} \right)^2.$$

Donc $P(X + Y \geq Z) = 1 - \left(\frac{1-p}{2-p} \right)^2$.

PRO 4 (Centrale 2016). Soit T une variable aléatoire telle que $T(\Omega) = \llbracket 1, k \rrbracket$. On considère $k+1$ variables aléatoires $X_0, \dots, X_k$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi. On suppose que les variables $T, X_0, \dots, X_k$ sont mutuellement indépendantes. On définit enfin une variable aléatoire Y par

$$\forall \omega \in \Omega \quad Y(\omega) = \sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega).$$

Montrer que, si X_0 est d'espérance finie, alors Y aussi. Donner alors une expression de $E(Y)$ en fonction de $E(T)$ et $E(X_0)$.

On a les inégalités entre variables aléatoires $0 \leq Y \leq \sum_{i=0}^k X_i$. Par croissance et linéarité de l'espérance, si X_0 est d'espérance finie alors, en calculant dans $[0, +\infty]$,

$$E(Y) \leq E\left(\sum_{i=0}^k X_i\right) = \sum_{i=0}^k E(X_i) = (k+1) E(X_0) < +\infty,$$

donc Y est d'espérance finie.

La variable Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\{Y = n\} = \bigsqcup_{j=1}^k \left(\{T = j\} \cap \{Y = n\} \right) = \bigsqcup_{j=1}^k \left(\{T = j\} \cap \left\{ \sum_{i=0}^j X_i = n \right\} \right).$$

Pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ fixé, les variables T et $\sum_{i=0}^j X_i$ sont indépendantes (par le lemme des coalitions), donc

$$P(Y = n) = \sum_{j=1}^k P(T = j) P\left(\sum_{i=0}^j X_i = n\right).$$

Ensuite, si $E(X_0) < +\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n P(Y=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \sum_{j=1}^k P(T=j) P\left(\sum_{i=0}^j X_i = n\right) \\
&= \sum_{j=1}^k P(T=j) \sum_{n=1}^{+\infty} n P\left(\sum_{i=0}^j X_i = n\right) \\
&= \sum_{j=1}^k P(T=j) \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^j X_i\right) \\
&= \sum_{j=1}^k P(T=j) \times (j+1) \mathbb{E}(X_0) \\
&= \mathbb{E}(X_0) \left(\sum_{j=1}^k j P(T=j) + \sum_{j=1}^k P(T=j) \right) \\
&= \mathbb{E}(X_0) (1 + \mathbb{E}(T)) .
\end{aligned}$$

PRO 5 (CMT 2016). Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p . On pose $q = 1 - p$ et $Y = |X_1 - X_2|$.

- Calculer $P(Y=0)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $P(X_1 - X_2 = n) = \frac{p q^n}{1+q}$. En déduire la loi de Y .
- Montrer que Y est d'espérance finie et calculer son espérance.
- Montrer que $\mathbb{E}((X_1 - X_2)^2) = 2 \mathbb{V}(X_1)$. En déduire que Y est de variance finie et calculer $\mathbb{V}(Y)$.

- On a

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k) P(X_2 = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k \\
&= \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q} .
\end{aligned}$$

Par un calcul analogue,

$$\begin{aligned}
P(X_1 - X_2 = n) &= P(X_1 = X_2 + n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k+n) P(X_2 = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p q^{n+k-1} p q^{k-1} = p^2 q^n \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k
\end{aligned}$$

$$= \frac{p^2 q^n}{1 - q^2} = \frac{pq^n}{1 + q}.$$

On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on a calculé $P(Y = 0) = \frac{p}{1 + q}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = \frac{2pq^n}{1 + q}$ par symétrie.

- b.** Pour $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ converge car on reconnaît la série entière dérivée de la série géométrique $\sum x^n$, et elle a donc le même rayon de convergence 1. On en déduit que la variable Y admet une espérance, et on calcule

$$E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P(Y = n) = \frac{2pq}{1 + q} \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{2pq}{1 + q} \frac{1}{(1 - q)^2} = \frac{2q}{p(1 + q)}.$$

- c.** La variable $Y^2 = (X_1 - X_2)^2$ admet une espérance (*arguments analogues à ci-dessus: on ne modifie pas le rayon de convergence d'une série entière en multipliant le coefficient d'indice n par n ou bien par n^2*). Ensuite, par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} E((X_1 - X_2)^2) &= E(X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2) = E(X_1^2) + E(X_2^2) - 2E(X_1X_2) \\ &= 2E(X_1^2) - 2E(X_1)^2 = 2V(X_1) \end{aligned}$$

car les variables X_1 et X_2 ont même loi et sont indépendantes. On a donc $E(Y^2) = 2V(X_1) = \frac{2q}{p^2}$ (formule du cours), puis

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{2q}{p^2} - \left(\frac{2q}{p(1 + q)} \right)^2 = \frac{2q(1 + q^2)}{p^2(1 + q)^2}.$$

PRO 6 (CMT 2016). On considère un détecteur de particules ayant une probabilité de détection de chaque particule égale à $p \in]0, 1[$. On note N et S les variables aléatoires qui comptent respectivement le nombre de particules arrivant sur le capteur et le nombre de particules détectées. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ .

- a.** Soient s et n entiers naturels. Calculer $P(S = s | N = n)$, puis $P(S = s, N = n)$. En déduire la loi de S .
b. Sans calcul, donner la loi de $N - S$.
c. Les variables S et $N - S$ sont-elles indépendantes ?
d. Les variables N et S sont-elles indépendantes ?

- a.** La loi conditionnelle de S sachant $N = n$ est binomiale de paramètres n et p , autrement dit

$$\forall (s, n) \in \mathbb{N}^2 \quad P(S = s | N = n) = \begin{cases} \binom{n}{s} p^s (1 - p)^{n-s} & \text{si } 0 \leq s \leq n \\ 0 & \text{si } s > n \end{cases}.$$

Par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}
P(S = s, N = n) &= P(N = n) P(S = s | N = n) \\
&= \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} & \text{si } 0 \leq s \leq n \\ 0 & \text{si } s > n \end{cases}
\end{aligned}$$

Enfin, par la formule des probabilités totales, en posant $q = 1 - p$ pour abrégier,

$$\begin{aligned}
P(S = s) &= \sum_{n=s}^{+\infty} P(S = s, N = n) \\
&= \sum_{n=s}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{s} p^s q^{n-s} \\
&= \frac{e^{-\lambda} \lambda^s p^s}{s!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k q^k}{k!} \quad (\text{avec } k = n - s) \\
&= \frac{e^{-\lambda} \lambda^s p^s}{s!} e^{\lambda q} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^s}{s!}.
\end{aligned}$$

La variable S suit donc la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

- b.** La variable $N - S$ représente le nombre de particules ayant échappé à la détection. Or, la probabilité de non-détection d'une particule arrivant sur le capteur est $q = 1 - p$. *En quelque sorte, les succès deviennent des échecs et inversement.* Il suffit donc d'échanger p et q pour avoir la loi de la variable $N - S$, c'est donc $\mathcal{P}(\lambda q)$.
- c.** Si k et l sont deux entiers naturels, on a

$$P(S = k, N - S = l) = P(S = k, N = k + l) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+l}}{(k+l)!} \binom{k+l}{k} p^k q^l,$$

tandis que

$$P(S = k) P(N - S = l) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^l}{l!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+l} p^k q^l}{k! l!}.$$

On constate que les deux expressions sont égales, les variables S et $N - S$ sont donc indépendantes.

- d.** Les variables S et N ne sont pas indépendantes, par exemple car $P(S = 2, N = 1) = 0$, alors que $P(S = 2)$ et $P(N = 1)$ sont tous les deux non nuls.

PRO 7 (CCINP). Soit $R \in \mathbb{N}^*$. Un garçon et sa petite sœur jouent à un jeu de devinettes. Chaque jour, le grand frère pose une devinette à sa sœur et cette dernière y répond correctement avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Le jeu s'arrête lorsque la sœur répond correctement R jours consécutifs aux devinettes de son frère. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, p_n la probabilité que le jeu de devinettes s'arrête au n -ième jour.

- a.** Déterminer p_R

- b. On considère dans cette question que le jeu ne dépasse pas R jours. On définit une variable aléatoire Z comme suit: Lorsque la sœur répond correctement R jours d'affilée, Z prend la valeur 0. Autrement, Z prend le numéro du jour où la sœur a répondu faux pour la première fois. Identifier la loi de Z

On suppose maintenant $R \geq 2$.

c. Montrer que $\forall n \geq R \quad p_{n+1} = \sum_{i=0}^{R-1} \frac{2}{3^{i+1}} p_{n-i}.$

- d. Quelle est la probabilité que le jeu se termine ?

a. Clairement, $p_R = \left(\frac{1}{3}\right)^R = \frac{1}{3^R}.$

b. On a $Z(\Omega) = \llbracket 0, R \rrbracket$, $P(Z = 0) = p_R = \frac{1}{3^R}$ et

$$\forall k \in \llbracket 1, R \rrbracket \quad P(Z = k) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3^k}$$

($k-1$ succès, puis un échec). On peut aussi reconnaître (mis à part le cas $Z = 0$) une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.

- c. Notons T la variable aléatoire correspondant au temps d'attente de R bonnes réponses consécutives. Alors $T(\Omega) = \llbracket R, +\infty \rrbracket$ et, pour tout n entier naturel, $p_n = P(T = n)$. Évidemment, $p_n = 0$ si $n < R$.

Les $\{Z = k\}$, avec $0 \leq k \leq R$, forment un système complet d'événements, on a donc, pour tout $n \geq R$,

$$P(T = n+1) = \sum_{k=0}^R P(\{T = n+1\} \cap \{Z = k\}).$$

Dans cette somme, le terme pour $k = 0$ est nul puisque les événements $\{Z = 0\}$ et $\{T = n+1\}$ sont incompatibles. Pour $k \in \llbracket 1, R \rrbracket$, notons T_k la variable aléatoire correspondant au temps d'attente de r bonnes réponses consécutives à partir du $k+1$ -ème jour ($T_k = 1$ si la réponse est bonne le jour $k+1$, $T_k = 2$ si c'est seulement le jour $k+2$, etc.). Il est clair (*intuitivement, est-ce satisfaisant ?*) que T_k suit la même loi que T . Par ailleurs, il est intuitivement clair aussi que, pour tout $k \in \llbracket 1, R \rrbracket$ et tout $l \in \mathbb{N}^*$, les événements $\{Z = k\}$ et $\{T_k = l\}$ sont indépendants. *Disons que la réalisation ou non de l'événement $\{Z = k\}$ dépend seulement des k premières réponses, alors que la réalisation de l'événement $\{T_k = l\}$ dépend seulement des réponses à partir du rang $k+1$, c'est un peu le lemme des coalitions.* Ainsi, pour $k \in \llbracket 1, R \rrbracket$, on a

$$P(\{T = n+1\} \cap \{Z = k\}) = P(\{Z = k\} \cap \{T_k = n+1-k\}) = P(Z = k)P(T_k = n+1-k) = \frac{2}{3^k} p_{n+1-k}.$$

Enfin, une translation d'indice donne

$$\forall n \geq R \quad p_{n+1} = \sum_{k=1}^R \frac{2}{3^k} p_{n+1-k} = \sum_{i=0}^{R-1} \frac{2}{3^{i+1}} p_{n-i}.$$

d. On va montrer que $P(T = +\infty) = 0$, soit $P(T < +\infty) = 1$. Pour cela, posons

$$S = P(T < +\infty) = \sum_{k=R}^{+\infty} p_k .$$

En utilisant la relation obtenue en c., et en intervertissant deux sommes (dont une est finie), puis en décalant les indices,

$$\begin{aligned} S &= p_R + \sum_{k=R+1}^{+\infty} p_k = p_R + \sum_{k=R}^{+\infty} p_{k+1} = p_R + \sum_{k=R}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{R-1} \frac{2}{3^{i+1}} p_{k-i} \right) \\ &= p_R + \sum_{i=0}^{R-1} \left(\frac{2}{3^{i+1}} \sum_{k=R}^{+\infty} p_{k-i} \right) = p_R + \sum_{i=0}^{R-1} \left(\frac{2}{3^{i+1}} \sum_{n=R-i}^{+\infty} p_n \right) \end{aligned}$$

Mais, les p_n étant nuls pour $n < R$, on a $\sum_{n=R-i}^{+\infty} p_n = \sum_{n=R}^{+\infty} p_n = S$ pour tout $i \in \llbracket 0, R-1 \rrbracket$. Il

reste donc $S = p_R + \left(\sum_{i=0}^{R-1} \frac{2}{3^{i+1}} \right) S$, soit encore $S = \frac{1}{3^R} + \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^R}{1 - \frac{1}{3}} S$, et finalement $S = 1$, ce qu'il fallait démontrer.

PRO 8 (CCINP). Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $\beta > 0$. Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{\beta^i e^{-\beta} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j! (i-j)!} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

a. Vérifier que $(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est une distribution de probabilités sur $\mathbb{N}^2$.

On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tel que

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \quad P(X = i, Y = j) = p_{i,j} .$$

b. Donner les lois marginales de X et Y .

c. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

d. Quelle est la loi de la variable $Z = X - Y$?

e. Soient $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. Calculer $P(Y = j | Z = k)$. Que remarque-t-on ?

a. Les $p_{i,j}$ sont des réels positifs. On calcule donc dans $[0, +\infty]$ sans trop se poser de questions:

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} p_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^i p_{i,j} \right) = e^{-\beta} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\beta^i}{i!} \sum_{j=0}^i \frac{i!}{j! (i-j)!} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j} = 1$$

puisque la somme intérieure vaut $(\alpha + (1-\alpha))^i = 1$ en reconnaissant la formule du binôme.

b. • Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a

$$P(X = i) = \sum_{j=0}^i P(X = i, Y = j) = e^{-\beta} \frac{\beta^i}{i!} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j} = e^{-\beta} \frac{\beta^i}{i!}$$

avec les mêmes arguments que ci-dessus. Donc $X \sim \mathcal{P}(\beta)$.

• Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= \sum_{i=j}^{+\infty} P(X = i, Y = j) = e^{-\beta} \frac{\alpha^j}{j!} \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{(1-\alpha)^{i-j} \beta^i}{(i-j)!} \\ &= \frac{e^{-\beta} (\alpha\beta)^j}{j!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\beta(1-\alpha))^k}{k!} \quad \text{en posant } k = i - j \\ &= \frac{e^{-\beta} (\alpha\beta)^j}{j!} e^{\beta(1-\alpha)} = e^{-\alpha\beta} \frac{(\alpha\beta)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Donc $Y \sim \mathcal{P}(\alpha\beta)$.

c. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes puisque, si $i < j$, on a $P(X = i, Y = j) = 0$ alors que $P(X = i)$ et $P(Y = j)$ sont tous les deux non nuls.

d. Comme $P(X \geq Y) = 1$, on peut considérer que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et, si $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\{Z = k\} = \bigsqcup_{j=0}^{+\infty} (\{Y = j\} \cap \{X = j + k\}),$$

donc

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = j + k, Y = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\beta^{j+k} e^{-\beta} \alpha^j (1-\alpha)^k}{j! k!} \\ &= \frac{\beta^k e^{-\beta} (1-\alpha)^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\alpha^j \beta^j}{j!} = \frac{(\beta(1-\alpha))^k}{k!} e^{-\beta(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Donc $Z \sim \mathcal{P}(\beta(1-\alpha))$.

e. Soient $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} P(Y = j \mid Z = k) &= \frac{P(Y = j, Z = k)}{P(Z = k)} = \frac{P(X = j + k, Y = j)}{P(Z = k)} \\ &= e^{-\alpha\beta} \frac{(\alpha\beta)^j}{j!} \end{aligned}$$

après simplifications. On observe que $P(Y = j \mid Z = k) = P(Y = j)$, ce qui signifie que les variables Y et Z sont indépendantes.

PRO 9 (CCINP). Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X suit la loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0, 1[$, et que Y suit la loi uniforme sur l'intervalle entier $\llbracket 0, n \rrbracket$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \neq 0 \\ Y(\omega) & \text{si } X(\omega) = 0 \end{cases}.$$

Déterminer la loi et l'espérance de Z .

D'abord il est clair que $Z(\Omega) = X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

On observe que $\{Z = 0\} = \{X = 0\} \cap \{Y = 0\}$ et que, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \{Z = k\} &= (\{Z = k\} \cap \{X = 0\}) \sqcup (\{Z = k\} \cap \{X \neq 0\}) \\ &= (\{Y = k\} \cap \{X = 0\}) \sqcup \{X = k\}. \end{aligned}$$

Les variables X et Y étant indépendantes, on a $P(Z = 0) = P(X = 0) P(Y = 0) = \frac{q^n}{n+1}$ en posant $q = 1 - p$ et, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$P(Z = k) = P(X = 0) P(Y = k) + P(X = k) = \frac{q^n}{n+1} + \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Le lecteur anxieux vérifiera que $\sum_{k=0}^n P(Z = k) = 1$, ce qui le rassurera.

Ensuite, un calcul facile (et pas passionnant) donne

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k=1}^n k P(Z = k) = n \times \frac{q^n}{n+1} + \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{n q^n}{n+1} + E(X) = \frac{n q^n}{n+1} + np. \end{aligned}$$

PRO 10 (CCINP 2024). Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telle que, pour tout i , on ait $X_i \sim \mathcal{B}(p_i)$, avec $p_i \in]0, 1[$. On suppose que

$$\rho_n = \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \rho.$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- a. Calculer l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$.
- b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V\left(\frac{S_n}{n}\right) = 0$.

c. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \rho_n\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$.

d. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \rho\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

a. Par linéarité de l'espérance, $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i = \rho_n$. Puis, les variables étant indépendantes,

$$V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p_i(1-p_i).$$

b. On a $0 \leq V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p_i(1-p_i) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n 1 = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

c. Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable $\frac{S_n}{n}$, qui est de variance finie, et dont l'espérance est ρ_n : comme $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, on a

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \rho_n\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \leq \frac{4}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

d. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = \rho$, il existe un rang N à partir duquel $|\rho_n - \rho| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq N$, on a alors par inégalité triangulaire,

$$\forall \omega \in \Omega \quad \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - \rho\right| \leq \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - \rho_n\right| + |\rho_n - \rho| \leq \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - \rho_n\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $n \geq N$, on a donc l'inclusion

$$\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \rho_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset \left\{\left|\frac{S_n}{n} - \rho\right| < \varepsilon\right\}$$

et, en prenant les événements contraires, toujours pour $n \geq N$,

$$\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \rho\right| \geq \varepsilon\right\} \subset \left\{\left|\frac{S_n}{n} - \rho_n\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Pour $n \geq N$, on a donc

$$0 \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \rho\right| \geq \varepsilon\right) \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \rho_n\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

d'où la conclusion par encadrement.