

Planche math-info 1

Un ascenseur avec n personnes monte dans un bâtiment ayant p étages. Les personnes descendent chacune aléatoirement et indépendamment à un étage. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'étages auxquels l'ascenseur s'est arrêté.

1. En utilisant `np.randint`, écrire une fonction Python simulant la loi de X .
- 2.a. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, soit X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'ascenseur s'est arrêté au i -ième étage, et 0 sinon. Donner la loi de X_i .
 - b. Exprimer X en fonction des X_i . En déduire $E(X)$ en fonction de n et p .
- 3.a. Déterminer $\lim_{p \rightarrow +\infty} E(X)$, avec n fixé.
 - b. On fixe $n = 10$. Calculer avec Python $E(X)$ pour $p = 20$, $p = 100$, et confirmer le résultat précédent.
4. Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on note $S_{a,b}$ le nombre de surjections d'un ensemble à a éléments vers un ensemble à b éléments.
 - a. Montrer que $\sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} \binom{p}{k} S_{n,k} = p^n$.
 - b. À l'aide de $E(X)$, obtenir que $\sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} \binom{p-1}{k-1} S_{n,k} = p^n - (p-1)^n$.

1. cf. script.
- 2.a. Chacune des n personnes choisit de façon équiprobable un des p étages où il va descendre. Pour modéliser cette situation aléatoire, on prend pour univers $\Omega = \mathcal{F}(\llbracket 1, n \rrbracket, \llbracket 1, p \rrbracket)$, soit $\Omega = \llbracket 1, p \rrbracket^{\llbracket 1, n \rrbracket}$, l'ensemble des applications d'un ensemble à n éléments (les personnes présentes au départ de l'ascenseur) vers un ensemble à p éléments (les étages desservis), et on munit Ω de la probabilité uniforme. On a donc $|\Omega| = p^n$. La variable X_i prend les valeurs 0 et 1, c'est donc une variable de Bernoulli, et si $f \in \Omega$, on a $X_i(f) = 0$ si et seulement si f prend ses valeurs dans l'ensemble $\llbracket 1, p \rrbracket \setminus \{i\}$, de cardinal $p-1$. Parmi les p^n applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, p \rrbracket$, il y en a $(p-1)^n$ dont l'image ne contient pas l'élément i , donc $P(X_i = 0) = \frac{(p-1)^n}{p^n}$. Le paramètre de la loi de Bernoulli suivie par la variable X_i est alors $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$. Bref, $X_i \sim \mathcal{B}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n\right)$.
 - b. On a clairement $X = \sum_{i=1}^p X_i$ donc, par linéarité de l'espérance, $E(X) = p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n\right)$.
- 3.a. Par un petit développement limité,

$$E(X) = p \left(1 - \left(1 - \frac{n}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)\right) = n + o(1) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} n.$$

- b. cf. script.

- 4.a. Si $f \in \Omega = \llbracket 1, p \rrbracket^{\llbracket 1, n \rrbracket}$, alors $|f(\llbracket 1, n \rrbracket)| \in \llbracket 1, \min\{n, p\} \rrbracket$.

Soit B une partie non vide de l'intervalle entier $\llbracket 1, p \rrbracket$, soit k son cardinal. Si $f \in \Omega$ vérifie $f(\llbracket 1, n \rrbracket) = B$, alors f établit une surjection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers B . Il y a alors autant d'applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, p \rrbracket$ dont l'image est B que de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers B , à savoir $S_{n,k}$. Comme il y a $\binom{p}{k}$ façons de choisir une partie B de cardinal k dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, on déduit que

$$|\Omega| = p^n = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} S_{n,k} = \sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} \binom{p}{k} S_{n,k}.$$

b. Comme $X(\Omega) = \llbracket 1, \min\{n, p\} \rrbracket$, par définition de l'espérance,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} k P(X = k) = \sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} k \binom{p}{k} \frac{S_{n,k}}{p^n} = \frac{1}{p^{n-1}} \sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} \binom{p-1}{k-1} S_{n,k}.$$

On a en effet $P(X = k) = \frac{|\Omega_k|}{|\Omega|}$ où Ω_k est l'ensemble des applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, p \rrbracket$ ayant une image de cardinal k , et le **a.** ci-dessus montre que $|\Omega_k| = \binom{p}{k} S_{n,k}$. On a ensuite utilisé la relation classique $k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1}$.

Donc $p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n\right) = \frac{1}{p^{n-1}} \sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} \binom{p-1}{k-1} S_{n,k}$, ce qui donne la relation voulue.

Planche math-info 2

Soit y un réel qui n'est pas un demi-entier, on définit q l'entier "le plus proche" de y comme étant le seul entier q vérifiant $|y - q| < \frac{1}{2}$.

1.a. Écrire une fonction Python qui prend comme argument un réel y et qui renvoie l'entier le plus proche de y .

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n l'entier le plus proche de $n!e^{-1}$, et on pose $b_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

Écrire un script Python pour calculer les 16 premiers termes des suites (a_n) et (b_n) . Faire une conjecture.

c. Démontrer le résultat conjecturé ci-dessus.

2. Pour tout n , on pose $d_n = n!e^{-1} - b_n$ et $J_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

a. Écrire un script Python pour calculer les 16 premiers termes des suites (d_n) et $\left(\frac{J_n}{d_n}\right)$. Faire une conjecture.

b. Prouver la conjecture faite ci-dessus.

1.a. cf. script. L'entier le plus proche de y est en fait $\left\lfloor y + \frac{1}{2} \right\rfloor$.

b. cf. script. On conjecture que $a_n = b_n$ pour $n \geq 1$.

c. La série exponentielle $\sum \frac{(-1)^k}{k!}$ est alternée, et la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant, le théorème spécial permet alors de majorer la valeur absolue du reste, soit

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| = \left| e^{-1} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

En multipliant par $n!$, on déduit

$$|n!e^{-1} - b_n| \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2} \quad (\text{pour } n \geq 2),$$

donc b_n , qui est bien un entier puisque $\frac{n!}{k!} = n(n-1) \cdots (n-k+1)$ est entier pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, est l'entier le plus proche de $n!e^{-1}$.

2.a. cf. script. On conjecture que $\frac{J_n}{d_n} = (-1)^{n+1} e$.

b. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $g : x \mapsto e^{-x}$ entre 0 et 1 à l'ordre n . Comme $g^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$, et notamment $g^{(k)}(0) = (-1)^k$, cela donne

$$g(1) = e^{-1} = \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} (1-0)^k + \int_0^1 \frac{(1-x)^n g^{(n+1)}(x)}{n!} dx,$$

soit, en posant $x = 1 - t$ dans l'intégrale,

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 (-1)^{n+1} t^n e^{t-1} dt = \frac{b_n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-1}}{n!} \int_0^1 t^n e^t dt,$$

soit enfin

$$d_n = n! e^{-1} - b_n = (-1)^{n+1} e^{-1} J_n, \quad \text{donc} \quad J_n = (-1)^{n+1} e d_n.$$

Planche math-info 3

Si (u_n) et (u'_n) sont deux suites réelles convergeant vers un même réel a , on dit que (u'_n) converge vers a **plus rapidement** que (u_n) si on a $u'_n - a = o(u_n - a)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

On définit une suite réelle (x_n) par $x_0 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x_n^2}}{2}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose ensuite $u_n = 6 \times 2^n x_n$, puis $u'_n = \frac{4u_{n+1} - u_n}{3}$.

1. Écrire un script Python affichant les six premiers termes des suites (u_n) et (u'_n) . Que peut-on conjecturer sur le comportement asymptotique de ces suites ?

2. Soit (v_n) une suite réelle admettant un développement asymptotique de la forme

$$v_n = a + \lambda k_1^n + O(k_2^n), \quad \text{avec } 0 < |k_2| < |k_1| < 1, \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

On pose $v'_n = \frac{v_{n+1} - k_1 v_n}{1 - k_1}$ pour tout n . Montrer que $v'_n = a + O(k_2^n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, et comparer les vitesses de convergence des suites (v_n) et (v'_n) .

3.a. Montrer que $x_n = \sin\left(\frac{\pi}{6 \times 2^n}\right)$ pour tout n entier naturel.

b. En déduire une preuve de la conjecture faite à la question 1.

1. Il semblerait que les deux suites convergent vers le nombre π , la deuxième plus rapidement que la première.

2. On a le développement asymptotique

$$v'_n = \frac{1}{1 - k_1} \left(a + \lambda k_1^{n+1} + O(k_2^n) - k_1 a - \lambda k_1^{n+1} + O(k_2^n) \right) = a + O(k_2^n).$$

Déjà, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$ puis, pour n assez grand, on a $v_n - a \neq 0$ et

$$\frac{v'_n - a}{v_n - a} = \frac{O(k_2^n)}{\lambda k_1^n + O(k_2^n)} = \frac{O(k_2^n)}{k_1^n (\lambda + o(1))} = O\left(\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^n\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc (v'_n) converge vers a plus rapidement que (v_n) .

3.a. L'égalité est vraie pour $n = 0$ et, si elle est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ donné, alors $1 - x_n^2 = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{6 \times 2^n}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6 \times 2^n}\right)$ et, comme $\frac{\pi}{6 \times 2^n} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, le cosinus est positif, donc

$$1 - \sqrt{1 - x_n^2} = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{6 \times 2^n}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{6 \times 2^{n+1}}\right)$$

et comme, de nouveau, le sinus est positif,

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x_n^2}}{2}} = \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{6 \times 2^{n+1}}\right)} = \sin\left(\frac{\pi}{6 \times 2^{n+1}}\right),$$

ce qui achève la récurrence.

b. On a donc $u_n = 6 \times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{6 \times 2^n}\right)$ pour tout n , d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pi$ (facile en utilisant $\sin(x) \sim x$ au voisinage de 0) puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u'_n = \pi$. En développant un peu plus, i.e. en

utilisant $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$ au voisinage de zéro, on obtient

$$u_n = 6 \times 2^n \left(\frac{\pi}{6 \times 2^n} - \frac{1}{6} \frac{\pi^3}{6^3 \times 8^n} + O\left(\frac{1}{32^n}\right) \right) = \pi - \frac{\pi^3}{216} \left(\frac{1}{4}\right)^n + O\left(\left(\frac{1}{16}\right)^n\right).$$

On reconnaît un développement asymptotique de la forme proposée question **2.** avec $a = \pi$, $\lambda = -\frac{\pi^3}{216}$, $k_1 = \frac{1}{4}$ et $k_2 = \frac{1}{16}$, on a bien $0 < |k_2| < |k_1| < 1$. On “accélère” donc la convergence de la suite (u_n) vers π en la remplaçant par la suite (u'_n) avec

$$u'_n = \frac{u_{n+1} - k_1 u_n}{1 - k_1} = \frac{4u_{n+1} - u_n}{3}.$$

C'est le **procédé d'accélération de convergence de Richardson-Romberg**.

Planche math-info 4

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$.

1. Avec Python, calculer u_n pour n de 1 à 10, puis $\frac{1}{u_{10^k}}$ pour $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ et conjecturer son comportement lorsque n ou k tend vers l'infini.

2. On pose $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - k^2\pi^2}$ et $g(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$.

a. Calculer la limite de g en 0. Montrer que f et g (une fois prolongée) sont continues sur l'intervalle $[0, \pi[$.

b. Représenter f et g sur $[0, \pi[$. Conjecturer un résultat... que l'on admettra!

c. Pour $x \in]0, \pi[$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

Indication: Calculer de deux manières différentes $G(x) = \int_0^x g(t) dt$.

d. En déduire la limite de u_n .

1. cf. script. On pourrait conjecturer que la deuxième suite converge vers $\frac{\pi}{2}$, et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{\pi}$.

2.a. On écrit $g(t) = \frac{N(t)}{D(t)}$ avec $D(t) = t \sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^2$ et $N(t) = t \cos(t) - \sin(t)$ que l'on développe un petit peu: $N(t) = t(1 + o(t)) - (t + o(t^2)) = o(t^2)$, c'est suffisant pour affirmer que $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$. On prolongera désormais g par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$, et g sera ainsi une fonction continue sur $[0, \pi[$ (puisque la continuité sur l'intervalle ouvert $]0, \pi[$ est immédiate).

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, \pi[$, posons $f_k(t) = \frac{2t}{t^2 - k^2\pi^2}$. Chaque fonction f_k est définie et continue sur $[0, \pi[$. Si $S = [a, b]$ est un segment inclus dans $[0, \pi[$, alors

$$\forall t \in S \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad |f_k(t)| = \frac{2t}{k^2\pi^2 - t^2} \leq \frac{2b}{k^2\pi^2 - b^2}$$

qui est sommable puisque $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Cette majoration étant “uniforme”, on a en fait prouvé

que $\|f_k\|_{\infty, S} \leq \frac{2b}{k^2\pi^2 - b^2}$, ce qui prouve la convergence normale, donc uniforme, de la série de fonctions $\sum f_k$ sur tout segment inclus dans $[0, \pi[$. Par théorème du cours, la fonction somme f est alors continue sur $[0, \pi[$.

Remarque. On peut aussi dire que la fonction $f_1 : t \mapsto \frac{2t}{t^2 - \pi^2}$ est continue sur $[0, \pi[$, et que la série de fonctions $\sum_{k \geq 2} f_k$ converge normalement sur $[0, \pi[$ d'où la continuité de la somme $\sum_{k=2}^{+\infty} f_k$.

- b. On conjecture que $f = g$ sur $[0, \pi[$... et, du coup, on l'admet! *Oui, pour le démontrer, il y a un peu de boulot!*
- c. La fonction g est continue sur $[0, \pi[$ donc admet des primitives sur cet intervalle, celle qui s'annule en 0 est donnée par

$$G(x) = \int_0^x \left(\frac{\cos(t)}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right) dt = [\ln(\sin t) - \ln(t)]_0^x = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Pour ce calcul, on convient bien sûr que $\frac{\sin(t)}{t}$ vaut 1 pour $t = 0$, c'est le prolongement par continuité bien connu.

Mais on a aussi $g = f = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k$, les fonctions f_k étant continues sur $[0, x]$, la convergence de la série étant normale sur le segment $[0, x]$ d'après **a.**, on peut donc intervertir série et intégrale, d'où

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{2t}{t^2 - k^2\pi^2} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} [\ln|t^2 - k^2\pi^2|]_0^x \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} [\ln(k^2\pi^2 - t^2)]_0^x = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \end{aligned}$$

Pour $x \in]0, \pi[$ fixé, on a donc $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$.

- d. Par continuité de l'exponentielle, on déduit, pour $x \in]0, \pi[$, que

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}.$$

En particulier, pour $x = \frac{\pi}{2}$,

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi}.$$

Planche math-info 5

Pour t réel non nul, on pose $\varphi(t) = \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)$, on pose $\varphi(0) = 0$.

1.a. Représenter φ sur $[-3, 3]$ à l'aide de Python.

b. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. On fixe $a \in \mathbb{R}_+^*$.

a. Montrer que, pour tout réel x , il existe un unique réel y tel que $\int_x^y \varphi(t) dt = a$. Ce réel y est alors noté $f(x)$.

b. Montrer que l'application f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer qu'il existe un unique réel b tel que $f(-b) = b$.

d. Écrire une fonction Python prenant $a > 0$ pour argument et retournant les nombres $f(0)$ et b à 10^{-1} près.

1.a. cf. script.

b. La fonction φ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, une étude locale en 0 s'impose. Tout d'abord, $\lim_{t \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 = \varphi(0)$ donc φ est continue en 0. Elle est par ailleurs dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $\varphi'(t) = \frac{2}{t^3} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)$. Comme

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 e^{-x^2} = 0$$

par croissances comparées, le théorème de la limite de la dérivée permet d'affirmer que φ est dérivable en 0 avec $\varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t) = 0$, finalement φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2.a. Soit Φ une primitive de φ sur $\mathbb{R}$, par exemple $\Phi : x \mapsto \int_0^x \varphi(t) dt$. Alors Φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car elle est dérivable avec $\Phi' = \varphi$ positive et ne s'annulant qu'en zéro), elle établit donc une bijection entre $\mathbb{R}$ et son image. Or, la fonction φ étant positive et non intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car elle tend vers 1 en $+\infty$), on déduit que $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et, φ étant paire, Φ est impaire donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = -\infty$, donc $\Phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Finalement, Φ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Les réels $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$ étant donnés, l'équation $\int_x^y f(t) dt = a$ équivaut à $\Phi(y) - \Phi(x) = a$ et admet donc pour unique solution $y = \Phi^{-1}(\Phi(x) + a)$. On posera donc $f(x) = \Phi^{-1}(\Phi(x) + a)$ pour tout x réel.

b. Le "théorème de la bijection" du cours de première année indique que, Φ étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\Phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, la bijection réciproque Φ^{-1} est aussi continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est continue et strictement croissante comme composée de fonctions du même métal.

c. On a les équivalences

$$\begin{aligned} f(-b) = b &\iff \Phi^{-1}(\Phi(-b) + a) = b \iff \Phi(-b) + a = \Phi(b) \\ &\iff a = \Phi(b) - \Phi(-b) \iff a = 2\Phi(b) \end{aligned}$$

puisque la fonction Φ est paire. L'unique solution est donc $b = \Phi^{-1}\left(\frac{a}{2}\right)$.

d. Pour retourner $f(0)$ qui est l'unique réel y (qui est positif) tel que $\int_0^y \varphi(t) dt = a$, on calcule cette intégrale pour des bornes supérieures y que l'on initialise à 0 et que l'on incrémente de 10^{-1} à chaque itération d'une boucle **while** jusqu'à atteindre ou dépasser la valeur a . On utilise la relation de Chasles pour ne pas recalculer l'intégrale depuis la borne inférieure 0 à chaque fois.

Planche math-info 6

On dispose d'une urne avec n boules numérotées de 1 à n , on effectue n tirages avec remise. La variable aléatoire X compte le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors de cette expérience aléatoire.

1. Avec Python:

- Écrire une fonction prenant comme argument n et simulant la variable X .
- Écrire une fonction prenant comme arguments n et k et renvoyant une valeur approchée de $P(X = k)$.
- Écrire une fonction prenant comme argument n et retournant une valeur approchée de l'espérance $E(X)$. La tester avec $n = 3$.

2. Déterminer la loi de X pour $n = 3$.

3. Dans le cas général, calculer $P(X = 1)$ et $P(X = n)$.

4. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit X_i la variable indicatrice de l'événement A_i : "la i -ième boule a été tirée". En utilisant les X_i , calculer $E(X)$ et $V(X)$.

1. cf. script.

2. Si $n = 3$, alors $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. Sur les $3^3 = 27$ tirages équiprobables, 3 conduisent à la réalisation de l'événement $\{X = 1\}$, $3! = 6$ conduisent à la réalisation de l'événement $\{X = 3\}$, les 18 restants à la réalisation de l'événement $\{X = 2\}$. Donc

$$P(X = 1) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}, \quad P(X = 2) = \frac{18}{27} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad P(X = 3) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$$

3. Avec n quelconque, $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. Sur les $|\Omega| = n^n$ tirages équiprobables, n conduisent à la réalisation de l'événement $\{X = 1\}$ donc $P(X = 1) = \frac{n}{n^n} = \frac{1}{n^{n-1}}$. Avec le même raisonnement, $P(X = n) = \frac{n!}{n^n}$.

4. Clairement $X = \sum_{i=1}^n X_i$. D'autre part, $P(X_i = 0) = \frac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ pour tout i donc

$X_i \sim \mathcal{B}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$ et $E(X_i) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Par linéarité de l'espérance,

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right).$$

Par la formule de Koenig-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Or

$$X^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j = \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i \neq j} X_i X_j$$

et, pour $i \neq j$, la variable $X_i X_j$ suit une loi de Bernoulli avec

$$\begin{aligned} P(X_i X_j = 0) &= P(\{X_i = 0\} \cup \{X_j = 0\}) \\ &= P(X_i = 0) + P(X_j = 0) - P(X_i = 0, X_j = 0) \\ &= \frac{2(n-1)^n - (n-2)^n}{n^n} \end{aligned}$$

donc $E(X_i X_j) = 1 - \frac{2(n-1)^n - (n-2)^n}{n^n}$. Finalement,

$$E(X^2) = n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right) + n(n-1) \left(1 - \frac{2(n-1)^n - (n-2)^n}{n^n}\right).$$

Afin de ne pas heurter les plus sensibles de mes lecteurs ou lectrices, je n'achève pas le calcul.

Planche math-info 7

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

1. Notons a_n le n -ième coefficient du développement en série entière de f . Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f , en déduire une relation entre a_n et a_{n+1} . Écrire un script Python pour calculer a_n .

2. On pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ pour x réel et $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire une fonction Python pour calculer $S_n(x)$ en fonction de n et de x .

3. Tracer les points M_n de coordonnées (n, a_n) pour n de 0 à 10. Que peut-on conjecturer sur la suite (a_n) ? Monotonie et limite de la suite (a_n) ? *Pour déterminer la limite de a_n , on cherchera un réel α tel que la série $\sum \ln \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^\alpha \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$ converge.*

4. Tracer les points P_n de coordonnées $(n, 2S_n(-1))$ pour n de 0 à 10. Que peut-on conjecturer sur la limite $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2S_n(-1))$? Prouver cette conjecture.

1. On a $f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{f(x)}{2(1-x)}$, soit **(E)**: $2(x-1)f'(x) + f(x) = 0$. Avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-1, 1[$, cela donne

$$2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 ,$$

donc, par unicité du développement en série entière, $2(n+1)a_{n+1} - (2n+1)a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour programmer le calcul des a_n de façon récursive, il sera plus commode d'écrire $a_n = \frac{2n-1}{2n} a_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, cf. script.

Remarque. D'après le cours, on a aussi

$$a_n = \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n = \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right) \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} .$$

2. cf. script.

3. On peut conjecturer que (a_n) décroît et tend vers 0. La décroissance est facile puisque $a_n > 0$ et $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$. Pour la limite nulle, utilisons l'indication, soit α un réel, posons

$$u_n = \ln \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^\alpha \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \alpha \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right) ,$$

soit encore $u_n = (\alpha - 1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right)$. On fait un petit développement limité "à l'économie", i.e. en utilisant $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ lorsque $x \rightarrow 0$, cela donne

$$u_n = (\alpha - 1) \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{2\alpha - 1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

En choisissant $\alpha = \frac{1}{2}$, la série $\sum u_n$ est alors absolument convergente, donc convergente, puisque son terme général est un $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Mais l'on observe que, avec $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$u_n = \ln(\sqrt{n+1} a_{n+1}) - \ln(\sqrt{n} a_n) ,$$

on reconnaît donc une série télescopique. On a donc prouvé la convergence de la suite de terme général $\ln(\sqrt{n} a_n)$. Posons $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{n} a_n)$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} a_n = e^l > 0$, puis

$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^l}{\sqrt{n}}$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Remarque. De l'expression $a_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$ et de la formule de Stirling, on peut déduire plus précisément l'équivalent $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

4. On dirait bien que $l = \sqrt{2}$... Prouvons-le, pardi!

Il s'agit en fait de montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Posons $u_n(x) = a_n x^n$, les fonctions u_n sont continues sur le segment $I = [-1, 0]$ et la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur ce segment. En effet, pour $x \in I$ fixé, la suite de terme général $|u_n(x)| = a_n |x|^n$ décroît et tend vers zéro (conséquence facile de la question 3.), et la série $\sum u_n(x)$ est alternée, on peut donc majorer son reste:

$$|R_n(x)| := \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| = a_{n+1} |x|^{n+1} \leq a_{n+1}.$$

Cette majoration **uniforme** du reste montre que $\|R_n\|_{\infty, I} \leq a_{n+1}$, donc $\|R_n\|_{\infty, I} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui prouve la convergence uniforme de la série $\sum u_n$ sur I . La fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est alors continue sur I et en particulier au point -1 (à droite). Comme S coïncide avec f sur $] -1, 0]$, on a donc

$$S(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ce qui prouve que $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 S_n(-1) = \sqrt{2}$.

Remarque. On a ainsi calculé la somme d'une série, à savoir $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Planche math-info 8

1. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on introduit la matrice $M(a, b) = \begin{pmatrix} 3a - 2b & -6a + 6b + 3 \\ a - b & -2a + 3b + 1 \end{pmatrix}$.

On pose $e(a, b) = |\lambda_1 - \lambda_2|$, où λ_1 et λ_2 sont les deux valeurs propres complexes de $M(a, b)$.

Écrire une fonction `ecart(a, b)` retournant une valeur approchée à 10^{-2} près de $e(a, b)$.

2.a. Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $0 < p < 1$. Écrire une fonction `hasard(p)` qui, étant donné p , réalise la simulation de 500 valeurs (a, b) du couple aléatoire (A, B) , et renvoie le nombre de fois où `ecart(a, b)` est supérieur à 10^{-1} .

b. Pour $p = \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \dots, \frac{99}{100}$, relier les points de coordonnées $\left(p, \frac{\text{hasard}(p)}{500}\right)$.

c. Sur le même graphique, tracer la courbe représentative de $p \mapsto \frac{2-2p+p^2}{2-p}$ pour $p \in]0, 1[$.

3.a. Montrer que $M(a, b)$ est semblable à $N(a, b) = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

b. À quelle condition $N(a, b)$ est-elle diagonalisable ?

c. Calculer la probabilité de l'événement: " $M(A, B)$ est diagonalisable".

1. et 2. cf. script.

3.a. On peut observer que $M(a, b) - (a+1)I_2 = \begin{pmatrix} 2a-2b-1 & -6a+6b+3 \\ a-b & -3a+3b \end{pmatrix}$ est de rang au plus 1 puisque ses colonnes sont liées par la relation $3C_1 + C_2 = 0$, et ceci montre aussi que $a+1 \in \text{Sp}(M(a, b))$ et que le vecteur $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $M(a, b)$ pour la valeur propre $a+1$. On cherche alors un vecteur $X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $M(a, b) \cdot X_2 = X_1 + bX_2$, soit $(M(a, b) - bI_2)X_2 = X_1$, ce qui ramène à l'équation $(a-b)x + (-2a+2b+1)y = 1$, et on voit que $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. On a donc $M(a, b) = P \cdot N(a, b) \cdot P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Si $b \neq a+1$, la matrice $N(a, b)$ admet deux valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable. Si $b = a+1$, elle a alors une seule valeur propre et ce n'est pas une matrice scalaire, elle n'est donc pas diagonalisable.

Bilan: La matrice $N(a, b)$, et donc aussi la matrice $M(a, b)$ qui lui est semblable, est diagonalisable si et seulement si $b \neq a+1$.

c. Notons E l'événement " $M(A, B)$ est diagonalisable". Alors $E = \{B \neq A+1\}$, il est plus facile de travailler sur l'événement contraire $\bar{E} = \{B = A+1\}$. Ainsi, en posant $q = 1-p$,

$$\begin{aligned} P(B = A+1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{A = k\} \cap \{B = k+1\}) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(A = k) P(B = k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}pq^k = p^2q \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k \\ &= \frac{p^2(1-p)}{1-(1-p)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P(E) = 1 - P(B = A+1) = \frac{2-2p+p^2}{2-p}.$$

Planche math-info 9

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}$.

- Montrer que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$.
- On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ ce développement en série entière. Écrire une fonction en langage Python qui calcule c_n , prenant n comme argument. Calculer c_n pour $n \in \llbracket 0, 199 \rrbracket$.
- Avec Python, comparer c_n et c_{n+6} pour $n \in \llbracket 0, 184 \rrbracket$. Faire une conjecture.
- En considérant la fonction $g : x \mapsto (1-x^6)f(x) - \frac{1}{1-x}$, prouver cette conjecture.
- Pour tout n entier naturel, on pose $D_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid 2p + 3q = n\}$, et $d_n = \text{Card}(D_n)$. Écrire une fonction Python prenant comme argument un entier naturel n et retournant la liste des éléments de l'ensemble D_n .
- Vérifier expérimentalement la relation $c_n = d_n$, puis la démontrer.

- Les fonctions $u : x \mapsto \frac{1}{1-x^2} = (1-x^2)^{-1}$ et $v : x \mapsto \frac{1}{1-x^3} = (1-x^3)^{-1}$ sont DSE sur $] -1, 1[$. Par produit de Cauchy, il en est donc de même de $f = uv$. Pour le calcul, précisons:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \text{avec} \quad a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \bmod 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

De même,

$$v(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{3k} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n, \quad \text{avec} \quad b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \bmod 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$\text{Enfin, pour } |x| < 1, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \text{ avec } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

- cf.* script.
- cf.* script. Il semblerait que $c_{n+6} = c_n + 1$.
- D'une part, on calcule, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$g(x) = \frac{1-x^6}{(1-x^2)(1-x^3)} - \frac{1}{1-x} = \frac{(1-x^6) - (1+x)(1-x^3)}{(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{-x^6 + x^4 + x^3 - x}{x^5 - x^3 - x^2 + 1} = -x.$$

D'autre part, sur $] -1, 1[$, on a

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - x^6 f(x) - \frac{1}{1-x} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+6} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \sum_{n=6}^{+\infty} c_{n-6} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\
&= \sum_{n=0}^5 (c_n - 1) x^n + \sum_{n=6}^{+\infty} (c_n - c_{n-6} - 1) x^n,
\end{aligned}$$

et ceci doit aussi être égal à $-x = 0x^0 - 1x^1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0x^n$ sur $] -1, 1[$. Par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients, ce qui donne notamment $c_n - c_{n-6} - 1 = 0$ pour tout $n \geq 6$, soit $c_{n+6} = c_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e. *cf.* script.

f. On a $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, mais a_k et b_{n-k} prenant leurs valeurs dans $\{0, 1\}$, il en est de même de leur produit, qui vaut alors 1 si et seulement si $a_k = 1$ et $b_{n-k} = 1$, donc si et seulement s'il existe p et q entiers naturels tels que $k = 2p$ et $n - k = 3q$. Donc c_n est égal au nombre d'entiers k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $2 \mid k$ et $3 \mid n - k$, c'est aussi le nombre de couples (p, q) dans $\llbracket 0, n \rrbracket^2$, donc dans $\mathbb{N}^2$, tels que $2p + 3q = n$. Ainsi $c_n = d_n$.
