

Suites définies explicitement. Recherches de limites et d'équivalents.

1. Étudier la convergence des suites de terme général

$$u_n = n - \sqrt[3]{n^3 + 1} \quad ; \quad v_n = \sin\left(\pi \frac{n^2 + 2n + 3}{n + 1}\right) \quad ; \quad w_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Pour les deux premières, proposer un équivalent.

- 2.a. Donner un développement limité à l'ordre 1 de $u_n = \sqrt[n]{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$, autrement dit trouver des réels a et b tels que $u_n = a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

- b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 \sqrt[n]{2} - 2 \sqrt[n]{3})^n$.

3. Pour tout n entier naturel, on note $N(n)$ le nombre de chiffres de l'entier n dans son écriture décimale, et $S(n)$ la somme de ses chiffres.

Par exemple, $N(23) = 2$ et $S(23) = 5$.

- a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \log(n) \leq N(n) \leq 1 + \log(n)$, où $\log$ est le logarithme décimal.
 b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \leq S(n) \leq 9(1 + \log(n))$.
 c. Soit $u_n = \frac{S(n+1)}{S(n)}$. Montrer que la suite (u_n) est bornée, donner ses bornes inférieure et supérieure.

Suites définies par récurrence.

4. Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \geq -1$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Déterminer son sens de variation, étudier sa convergence.

5. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sin(u_n).$$

- a. Montrer que (u_n) décroît et tend vers zéro.
 b. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, avec $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$.
 c. On rappelle le lemme de Cesàro, hors programme, que l'on ne demande pas de démontrer :
si (v_n) est une suite réelle de limite l , alors on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k = l$. En déduire un équivalent de la suite (u_n) .

6. Soient (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

Que dire de la suite $(u_n - v_n)$? Exprimer u_n et v_n en fonction de n .

7. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une application 1-lipschitzienne. Soit (x_n) une suite réelle définie par la donnée de $x_0 \in [a, b]$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}$. Montrer que la suite (x_n) converge vers un réel l tel que $f(l) = l$.

8. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on suppose que $\forall x \in [a, b] \quad |f'(x)| < 1$.

- a. Montrer que f admet un unique point fixe α .
 b. Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \in [a, b]$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

9*. Points fixes répulsifs ou attractifs

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \rightarrow I$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, soit $x_0 \in I$ un point fixe de f . Soit par ailleurs (u_n) une suite telle que $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

- a. On suppose que $|f'(x_0)| > 1$. Montrer que la suite (u_n) ne converge vers x_0 que si elle est stationnaire.
- b. On suppose que $|f'(x_0)| < 1$. Montrer que, si u_0 est suffisamment proche de x_0 , alors la suite (u_n) converge vers x_0 .

10. Soient a et b deux réels tels que $0 < b \leq a$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2}{v_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}.$$

- a. Montrer que ces suites sont adjacentes et déterminer leur limite commune l .
- b. Montrer que la suite (x_n) , définie par $x_n = \ln \left(\frac{u_n - l}{u_n + l} \right)$, est une suite géométrique.
- c. En déduire une expression explicite de u_n en fonction de n et de x_0 .

11*. Méthode de Newton

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, convexe, de classe $\mathcal{C}^2$, avec $f(a) < 0 < f(b)$.

- a. Montrer que f admet un unique zéro, noté α , sur $[a, b]$.
- b. On définit une suite (u_n) par $u_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$, où l'on a posé $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et qu'elle converge vers α .
- c. On suppose dans cette question que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[a, b]$. En appliquant à φ l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe un réel positif M tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq M (u_n - \alpha)^2.$$

On dit que la vitesse de convergence de (u_n) vers α est **quadratique**, ou encore **d'ordre 2**.

Suites définies implicitement.

12. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $g_n : x \mapsto \int_n^x e^{t^2} dt$.

- a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel x_n tel que $g_n(x_n) = 1$.
- b. Donner un équivalent de (x_n) .
- c. Soit k un entier naturel. Montrer que l'on a $x_n = n + o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit P_n la fonction polynôme définie par $P_n(x) = x^n + x - 1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet une unique racine réelle positive, que l'on notera x_n . Vérifier que $x_n \in]0, 1[$. Montrer que la suite (x_n) est croissante. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ (indication : pour $\varepsilon > 0$ fixé, on pourra exprimer $P_n(1 - \varepsilon)$). Une autre méthode consiste à raisonner par l'absurde en supposant que $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \neq 1$).

14. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\sin x = \frac{1}{x}$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $I_n = \left[2n\pi, \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi\right]$. Montrer que la suite $(x_n - 2n\pi)$ converge vers zéro en décroissant, donner un équivalent du terme général de cette suite.
15. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = x e^x - n$.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n , et montrer qu'elle est strictement positive.
 - Montrer les inégalités $1 \leq u_n \leq \ln(n)$ pour $n \geq 3$.
 - Montrer que $u_n \sim \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
 - Trouver un équivalent de $u_n - \ln(n)$.
- 16.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution, que l'on notera x_n , dans $\mathbb{R}_+^*$.
- Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.
 - Donner un développement asymptotique de x_n avec trois termes non nuls, plus un reste.

Autres exercices sur les suites. Ensembles dénombrables.

17. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.
18. **Théorème de Cesàro**
- a***. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ (v_n est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite u). On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$.
 - b**. Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = l$ ($l \in \mathbb{R}$). Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = l$.
 - c**. Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$ avec $l \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.
 - d**. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.
19. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs. Pour tout n , on pose $y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}$.
- a**. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ lorsque (x_n) est une suite constante de valeur $a > 0$.
 - b**. Même question lorsque $x_n = a b^{2^n}$ avec $a > 0, b > 0$.
 - c***. Montrer que (y_n) converge si et seulement s'il existe un réel positif M tel que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \leq M^{2^n}$.

20. Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dite **sous-additive** si elle vérifie

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad u_{m+n} \leq u_m + u_n .$$

- a. Pour quels réels α la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $v_n = n^\alpha$ est-elle sous-additive ? Lorsque c'est le cas, déterminer la limite de $\frac{v_n}{n}$.
- b. Quelles sont les suites réelles $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant $\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad w_{m+n} = w_m + w_n$? Déterminer alors la limite de $\frac{w_n}{n}$.
- c*. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle sous-additive, on suppose que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ est minorée et on pose $\alpha = \inf \left\{ \frac{u_n}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \alpha$. On pourra fixer $\varepsilon > 0$ et considérer un entier p tel que $\alpha \leq \frac{u_p}{p} \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$, puis utiliser une division euclidienne.

21. Soit (u_n) une suite réelle. On suppose qu'il existe un réel k appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et une suite réelle (r_n) de limite nulle, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1}| \leq k |u_n| + |r_n| .$$

On se donne par ailleurs un réel ε strictement positif.

- a. Justifier l'existence d'un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|r_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}(1 - k)$.
- b. Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq N$, on a $|u_n| \leq k^{n-N} |u_N| + \frac{\varepsilon}{2}$.
- c. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

22*. Une suite réelle (a_n) est dite **convexe** si on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leq \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$. Elle est dite **concave** si la suite $(-a_n)$ est convexe.

- a. Par quelle propriété simple de la suite (d_n) , de terme général $d_n = a_{n+1} - a_n$, se traduit la convexité d'une suite réelle (a_n) ? Quelles sont les suites réelles qui sont à la fois convexes et concaves ?
- b. Soit (a_n) une suite convexe majorée. Montrer qu'elle est décroissante.
- c. Dans cette question, (a_n) est une suite convexe bornée et on pose $d_n = a_{n+1} - a_n$ pour tout n .
 - i. Montrer que la suite (a_n) est convergente.
 - ii. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geq 2p$. Prouver les inégalités $2(a_n - a_p) \leq n d_{n-1} \leq 0$.
 - iii. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n d_n = 0$.

23.a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

- b. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ est infini non dénombrable. On pourra supposer qu'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et chercher une contradiction en considérant l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \varphi(n)\}$.