

Séries à termes positifs.

1. Nature des séries de terme général u_n , avec

$$\text{a. } u_n = \frac{n!}{n^n} \quad ; \quad \text{b. } u_n = e^{-\sqrt{n}} \quad ; \quad \text{c. } u_n = \frac{\ln(n)}{(e^n - 1)^\alpha} \quad ; \quad \text{d. } u_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n \ln^2(n)}.$$

2. Calculer les sommes

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{et} \quad T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

3. On considère les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n} dt$.

a. Prouver la relation $W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_n$.

b. On pose $u_n = \sqrt{n} W_n$. Montrer que la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge.

c. En déduire l'existence d'un réel strictement positif K tel que $W_n \sim \frac{K}{\sqrt{n}}$.

4. En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer la partie entière du nombre

$$N = \sum_{k=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

5. Donner un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$

6. Séries de Bertrand

On appelle ainsi les séries $\sum_{n \geq 2} u_n$, avec $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, où α et β sont deux réels. On se propose d'étudier leur convergence.

a. On suppose $\alpha > 1$. En étudiant $n^\gamma u_n$, pour un choix convenable de γ , montrer que la série converge.

b. On suppose $\alpha < 1$. En considérant nu_n , montrer que la série diverge.

c. On suppose $\alpha = 1$. Par comparaison à une intégrale, discuter de la nature de la série $\sum u_n$.

7. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente. Pour tout n , on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

a. Démontrer la relation $\sum_{k=0}^n R_k - \sum_{k=1}^n k u_k = (n+1) R_n$.

b. En cas de convergence de la série $\sum n u_n$, montrer que $(n+1) R_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k u_k$.

c. En déduire que les séries $\sum n u_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature et que, en cas de convergence, elles ont la même somme.

8. Étudier la suite (u_n) définie par $0 < u_0 \leq \frac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Déterminer la nature des séries de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, puis u_n^2 et enfin u_n .

9. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \text{Arctan}(k)$.

a. Donner un équivalent de S_n .

b. Montrer qu'il existe un réel α tel que l'on ait le développement asymptotique

$$S_n = \frac{n\pi}{2} - \ln(n) + \alpha + o(1).$$

10. Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série à termes strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{u_1 + \dots + u_n}.$$

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. *En cas de divergence, on pourra considérer l'expression $\ln(1 - v_n)$.*

11. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. Convergence et calcul de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\cos \frac{x}{2^n}\right)$.

12*. Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ pour tout n .

a. Montrer que la série de terme général $\frac{u_n}{S_{n-1}}$ est de même nature que la série $\sum u_n$.

En cas de divergence de cette dernière, on écrira un encadrement de l'intégrale $\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t}$.

b. On suppose que la série $\sum u_n$ diverge. Montrer que, pour tout $\alpha > 1$, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.

c. On suppose que la série $\sum u_n$ converge, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ pour tout n . Montrer que la série de terme général $\frac{u_n}{R_n}$ est divergente.

Séries à termes quelconques. Convergence absolue.

13. On rappelle le développement asymptotique $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

a. Soit $u_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{3k-1}{3k}\right)$. Montrer qu'il existe des constantes a et b telles que

$$\ln(u_n) = a \ln(n) + b + o(1).$$

b. En déduire la nature de la série de terme général u_n .

14.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier relatif pair.

b. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \sin((2 + \sqrt{3})^n \pi)$.

15. Déterminer la nature des séries suivantes et, en cas de convergence, calculer leur somme :

a) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$; b) $\sum_{n \geq 1} (\ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2))$ avec a et b réels.

16. Déterminer la nature des séries $\sum_n u_n$ dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$; b) $u_n = \ln n \cdot \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$; c) $\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$.

17. Donner un développement limité de $f : x \mapsto \frac{\sin x}{1+x}$ sous la forme $f(x) = a + bx + cx^2 + O(x^3)$.

En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$, avec $u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{(-1)^n + \sqrt{n}}$.

18. Nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$, avec $u_n = (-1)^n \left(\operatorname{Arccos} \frac{1}{n} - \operatorname{Arccos} \frac{1}{n^2} \right)$.

19. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$.

a. Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge.

b. Exprimer la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$, puis la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ sous forme d'intégrales.

c. Calculer S . On pourra utiliser le changement de variable $t = \cos(2u)$.

20. Soit x un réel non multiple de 2π . On pose $S_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$.

a. Montrer que la suite (S_n) est bornée.

b. En remarquant que $\cos(nx) = S_n - S_{n-1}$, montrer que la série de terme général $u_n = \frac{\cos(nx)}{n}$ est convergente.

c. En exploitant l'inégalité $|\cos(\theta)| \geq \cos^2(\theta)$, montrer la divergence de la série $\sum |u_n|$.

21*.a. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0$.

b. Soit $x \in]0, 2\pi[$, soit n un entier naturel non nul. Prouver l'identité

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{ikx} - e^{ik\pi}}{ik} = -\frac{1}{2i} \int_{\pi}^x \frac{e^{\frac{it}{2}}}{\sin \frac{t}{2}} (1 - e^{int}) dt .$$

c. Convergence et somme de $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k}$.

Autres exercices sur les séries.

22. On note l^1 l'ensemble des suites réelles **sommables**, c'est-à-dire des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ soit absolument convergente.

On note l^2 l'ensemble des suites réelles **de carré sommable**, c'est-à-dire des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ soit (absolument) convergente.

- Montrer que l^1 est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- Montrer que $l^1 \subset l^2$, et montrer que cette inclusion est stricte.
- Soient $u \in l^2, v \in l^2$. Montrer que $uv \in l^1$, où uv est la suite réelle définie par $(uv)_n = u_n v_n$.
- En déduire que l^2 est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- Pour $u \in l^2, v \in l^2$, on pose $\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur l^2 .

23*. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes, on suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et que la suite (v_n) est sommable. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = 0$.

24. On admet le développement asymptotique $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- En déduire la somme de la série harmonique alternée

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

- On modifie l'ordre des termes de cette dernière série de la façon suivante:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} + \dots$$

Montrer que la nouvelle série obtenue converge et calculer sa somme.

25. On étudie la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. **a.** Quelle est sa nature ?

- On note S la somme de la série, et on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ ses sommes partielles. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$.

- Avec Python, trouver n tel que $S_n \leq S \leq S_n + 10^{-4}$.

- Représenter les points de coordonnées (n, S_n) pour $n \leq 200$.

- On permute les termes: $T_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots$ (n termes), en alternant un terme positif, deux termes négatifs, dans l'ordre. Représenter les points (n, T_n) avec $n \leq 200$.

- Même question avec deux termes positifs puis un négatif.