

Suites définies explicitement. Recherches de limites et d'équivalents.

1. Étudier la convergence des suites de terme général

$$u_n = n - \sqrt[3]{n^3 + 1} \quad ; \quad v_n = \sin\left(\pi \frac{n^2 + 2n + 3}{n + 1}\right) \quad ; \quad w_n = \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

a. Un DL donne $u_n = n \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = n \left(1 - \left(1 + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{3n^2}$,
d'où immédiatement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b. On a

$$\begin{aligned} v_n &= \sin\left(\pi \frac{(n+1)^2 + 2}{n+1}\right) = \sin\left((n+1)\pi + \frac{2\pi}{n+1}\right) \\ &= (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^{n+1} \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

en utilisant $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

c. Ici, on a $0 \leq w_n \leq \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

2.a. Donner un développement limité à l'ordre 1 de $u_n = \sqrt[n]{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$, autrement dit trouver des réels a et b tels que $u_n = a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 \sqrt[n]{2} - 2 \sqrt[n]{3})^n$.

a. $u_n = 2^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln 2} = 1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, en utilisant le développement limité $e^x = 1 + x + o(x)$ au voisinage de zéro.

b. Posons $x_n = (3 \sqrt[n]{2} - 2 \sqrt[n]{3})^n$. En développant comme en **a.**, on obtient

$$3 \sqrt[n]{2} - 2 \sqrt[n]{3} = 3 \left(1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2 \left(1 + \frac{\ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{3 \ln 2 - 2 \ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\text{Donc } \ln x_n = n \ln(3 \sqrt[n]{2} - 2 \sqrt[n]{3}) = n \ln \left(1 + \frac{3 \ln 2 - 2 \ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3 \ln 2 - 2 \ln 3,$$

en utilisant l'équivalent $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de zéro ou, ce qui revient au même, le développement limité $\ln(1+x) = x + o(x)$. Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = e^{3 \ln 2 - 2 \ln 3} = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9}$.

3. Pour tout n entier naturel non nul, on note $N(n)$ le nombre de chiffres de l'entier n dans son écriture décimale, et $S(n)$ la somme de ses chiffres.

Par exemple, $N(23) = 2$ et $S(23) = 5$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \log(n) \leq N(n) \leq 1 + \log(n)$, où $\log$ est le logarithme décimal.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \leq S(n) \leq 9(1 + \log(n))$.

c. Soit $u_n = \frac{S(n+1)}{S(n)}$. Montrer que la suite (u_n) est bornée, donner ses bornes inférieure et supérieure.

- a. Les nombres s'écrivant avec N chiffres dans le système de numération décimale sont les entiers allant de 10^{N-1} à $10^N - 1$. Pour s'en persuader, les nombres à trois chiffres vont de 100 à 999. Pour tout entier naturel non nul n , on a donc $10^{N(n)-1} \leq n \leq 10^{N(n)}$. En passant au logarithme décimal (fonction croissante), cela donne $N(n) - 1 \leq \log(n) \leq N(n)$. Il ne reste plus qu'à ajouter 1 à l'inégalité de gauche, et on déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \log(n) \leq N(n) \leq 1 + \log(n) .$$

- b. L'inégalité $S(n) \geq 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est triviale, par ailleurs les "chiffres" du système décimal étant majorés par 9, on a aussi, en utilisant a.,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \leq S(n) \leq 9 N(n) \leq 9 (1 + \log(n)) .$$

- c. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$, donc la suite (u_n) est minorée par 0. En fait on a $\inf_{n \in \mathbb{N}^*} u_n = 0$ puisque, en prenant des entiers n de la forme $10^k - 1$ dont l'écriture décimale est constituée de k chiffres 9, on a $S(n) = 9k$, $S(n+1) = 1$ donc $u_n = \frac{1}{9k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$. La suite (u_n) n'admet pas de minimum, mais une borne inférieure qui vaut 0 et qui n'est pas atteinte.

- On a $u_1 = \frac{S(2)}{S(1)} = \frac{2}{1} = 2$ et c'est la valeur maximale de la suite (u_n) . En effet, on a $S(n+1) \leq S(n) + 1$ pour tout n puisque:

- si l'écriture décimale de n se termine par un chiffre autre que 9, alors $S(n+1) = S(n) + 1$;
- si l'écriture décimale de n se termine par une séquence de k chiffres 9, on a alors $S(n+1) = S(n) - 9k + 1 < S(n)$.

Donc $u_n = \frac{S(n+1)}{S(n)} \leq \frac{S(n)+1}{S(n)} = 1 + \frac{1}{S(n)} \leq 2$, cette dernière inégalité résultant de $S(n) \geq 1$. En conclusion, $\max_{n \in \mathbb{N}^*} u_n = u_1 = 2$.

Suites définies par récurrence.

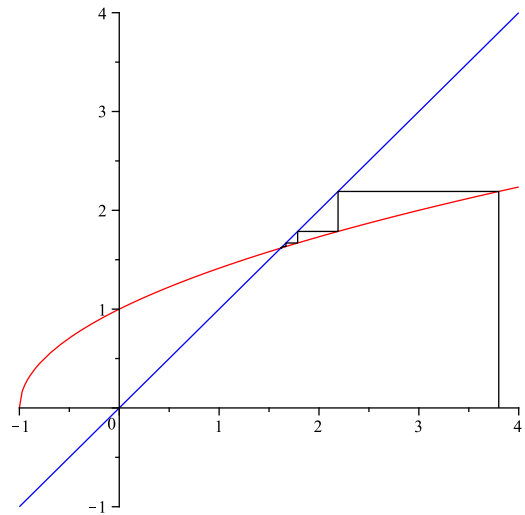
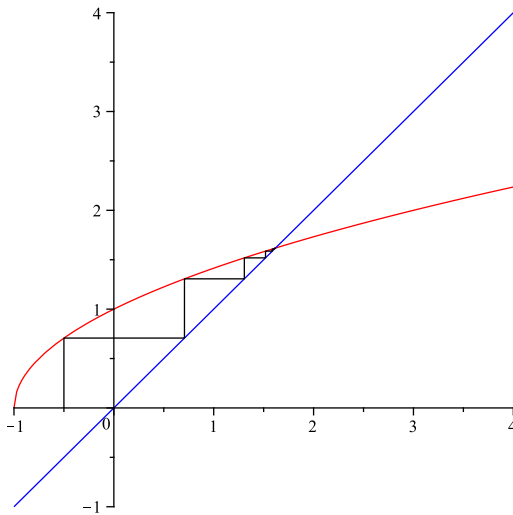
4. Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \geq -1$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Déterminer son sens de variation, étudier sa convergence.

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est définie sur l'intervalle $I = [-1, +\infty[$ et cet intervalle est stable par f puisque $f(I) = [0, +\infty[\subset I$. La suite (u_n) est donc bien définie si l'on initialise avec $u_0 \in I$. Recherchons les points fixes de f :

$$f(x) = x \iff \sqrt{1+x} = x \iff \left\{ 1+x = x^2 \quad \text{et} \quad x \geq 0 \right\} \iff x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\text{nombre d'or}) .$$

Posons désormais $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ pour simplifier l'écriture. Comme f est continue sur I , la seule limite possible pour la suite (u_n) est α . De la croissance de f sur I , on déduit que chacun des intervalles $I_1 = [-1, \alpha]$ et $I_2 = [\alpha, +\infty[$ est stable par f . D'autre part, on a $f(x) \geq x$ sur I_1 et $f(x) \leq x$ sur I_2 . Donc :

- si $u_0 \in I_1$, alors la suite (u_n) est croissante. Comme elle est majorée par α , elle converge. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ (car seule limite possible).
- si $u_0 \in I_2$, la suite est décroissante. Elle converge car elle est minorée par α . Enfin, ici aussi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.



Dessins réalisés avec $u_0 = -0.5$ et $u_0 = 3.8$ respectivement

5. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sin(u_n) .$$

- Montrer que (u_n) décroît et tend vers zéro.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, avec $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$.
- On rappelle le lemme de Cesàro que l'on ne demande pas de démontrer : si (v_n) est une suite réelle de limite l , alors on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k = l$. En déduire un équivalent de la suite (u_n) .

- Le segment $[0, 1]$ est stable par la fonction sinus et $\sin x \leq x$ sur cet intervalle, donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge. La fonction sinus étant continue, la limite l de la suite (u_n) vérifie $\sin(l) = l$, et on s'assure que $l = 0$ est la seule solution.
- On a $v_n = \frac{1}{\sin^2 u_n} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_n^2 - \sin^2 u_n}{u_n^2 \sin^2 u_n}$. Comme u_n tend vers zéro, on peut utiliser le développement limité en 0 de la fonction sinus pour montrer que le dénominateur est équivalent à u_n^4 alors que le numérateur est équivalent à $\frac{1}{3}u_n^4$. Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{3}$.

c. Soit $w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k$; on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{1}{3}$ par Cesàro, mais par télescopage, $w_n = \frac{1}{n} \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{n} \frac{1}{u_0^2}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{u_0^2} = 0$, il reste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3}$, soit $u_n^2 \sim \frac{3}{n}$ et, comme u_n est positif, $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

6. Soient (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

Que dire de la suite $(u_n - v_n)$? Exprimer u_n et v_n en fonction de n .

On note que $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n$, la suite $(u_n - v_n)$ est donc constante, de valeur $u_0 - v_0 = -1$. Donc $u_n = v_n - 1$ pour tout n .

En remplaçant dans la deuxième relation de récurrence, on a alors $v_{n+1} = 2(v_n - 1) + 3v_n$, soit $v_{n+1} = 5v_n - 2$, on reconnaît l'expression d'une suite arithmético-géométrique, on résout alors l'équation $l = 5l - 2$, ce qui donne $l = \frac{1}{2}$, et on introduit la suite (w_n) telle que $w_n = v_n - \frac{1}{2}$. On constate alors que $w_{n+1} = 5w_n$, la suite (w_n) est géométrique de raison 5, donc $w_n = 5^n w_0 = \frac{3}{2} \times 5^n$, puis $v_n = w_n + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times 5^n + \frac{1}{2}$.

Enfin, $u_n = v_n - 1 = \frac{3}{2} \times 5^n - \frac{1}{2}$.

7. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une application 1-lipschitzienne. Soit (x_n) une suite réelle définie par la donnée de $x_0 \in [a, b]$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}$. Montrer que la suite (x_n) converge vers un réel l tel que $f(l) = l$.

Pour $x \in [a, b]$, posons $g(x) = \frac{f(x) + x}{2}$. En ajoutant les inégalités $a \leq x \leq b$ et $a \leq f(x) \leq b$, on obtient $a \leq g(x) \leq b$, autrement dit le segment $[a, b]$ est stable par g , ce qui montre déjà que la suite (x_n) est bien définie et qu'elle prend ses valeurs dans $[a, b]$.

Soient $(x, y) \in [a, b]^2$; alors $g(y) - g(x) = \frac{1}{2} [(f(y) - f(x)) + (y - x)]$; comme f est 1-lipschitzienne, on a $|f(y) - f(x)| \leq |y - x|$, on en déduit que $g(y) - g(x)$ est du même signe que $y - x$, donc que la fonction g est croissante sur $[a, b]$.

Il en résulte que la suite (x_n) est monotone : en effet, $x_{n+2} - x_{n+1} = g(x_{n+1}) - g(x_n)$ est du même signe que $x_{n+1} - x_n$, donc (par récurrence) du même signe que $x_1 - x_0$, d'où la monotonie de la suite (x_n) .

La suite (x_n) est monotone et bornée, elle est donc convergente, notons $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, on a bien sûr $l \in [a, b]$ (en passant à la limite dans les inégalités $a \leq x_n \leq b$). La fonction f est continue sur $[a, b]$ car elle est lipschitzienne, on en déduit que g est continue aussi. En

passant à la limite dans la relation $x_{n+1} = g(x_n)$, on obtient $l = g(l)$, ce qui équivaut à $l = f(l)$.

8. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on suppose que $\forall x \in [a, b] \quad |f'(x)| < 1$.

a. Montrer que f admet un unique point fixe α .

b. Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \in [a, b]$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

a. Posons $g(x) = f(x) - x$ pour $x \in [a, b]$. Alors g est continue sur $[a, b]$ avec $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Du théorème des valeurs intermédiaires, on déduit l'existence d'un point $\alpha \in [a, b]$ tel que $g(\alpha) = 0$, i.e. $f(\alpha) = \alpha$. On a donc l'existence d'un point fixe de f .

Si f admettait un autre point fixe β avec $\beta \neq \alpha$ (supposons $\alpha < \beta$), l'égalité des accroissements finis affirmerait l'existence d'un point $c \in]\alpha, \beta[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = 1,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc unicité du point fixe de f .

b. La fonction $x \mapsto |f'(x)|$ est continue sur le segment $[a, b]$, elle y admet donc un maximum k atteint en un point c de $[a, b]$. On a alors nécessairement $k = |f'(c)| < 1$, et

$$\forall x \in [a, b] \quad |f'(x)| \leq k,$$

donc, par l'inégalité des accroissements finis, f est k -lipschitzienne sur $[a, b]$. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq k |u_n - \alpha|,$$

puis par une récurrence immédiate, $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$ donc, par majoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

9*. Points fixes répulsifs ou attractifs

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \rightarrow I$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, soit $x_0 \in I$ un point fixe de f . Soit par ailleurs (u_n) une suite telle que $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

a. On suppose que $|f'(x_0)| > 1$. Montrer que la suite (u_n) ne converge vers x_0 que si elle est stationnaire.

b. On suppose que $|f'(x_0)| < 1$. Montrer que, si u_0 est suffisamment proche de x_0 , alors la suite (u_n) converge vers x_0 .

a. Soit k un réel tel que $1 < k < |f'(x_0)|$; par continuité de f' , on a $|f'| \geq k$ dans un voisinage de x_0 , c'est-à-dire dans un intervalle de la forme $V = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$. Si la suite (u_n) tend vers x_0 , alors il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite se trouvent dans V (*cette affirmation n'est rien d'autre que la définition de la notion de limite*). Mais alors, pour $n \geq N$, on a

$$|u_{n+1} - x_0| = |f(u_n) - f(x_0)| = |f'(c_n)| |u_n - x_0|$$

(égalité des accroissements finis), où c_n appartient à l'intervalle $[x_0, u_n]$ ou $[u_n, x_0]$, donc à V , ce qui entraîne que $|f'(c_n)| \geq k$. On a donc $|u_{n+1} - x_0| \geq k |u_n - x_0|$ pour $n \geq N$ d'où, par une récurrence immédiate, pour $n \geq N$, $|u_n - x_0| \geq k^{n-N} |u_N - x_0|$, et cette dernière expression tend vers $+\infty$ si $u_N \neq x_0$ ce qui contredirait l'hypothèse $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0$. Ainsi, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0$, on a nécessairement $u_N = x_0$, puis la suite est alors stationnaire à partir du rang N . On dit que x_0 est un point fixe **répulsif**.

- b. Soit k un réel tel que $|f'(x_0)| < k < 1$, de façon analogue à ci-dessus, on a alors $|f'| \leq k$ dans un voisinage $V = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ de x_0 (avec $\varepsilon > 0$) ; des inégalités d'accroissements finis, on déduit de plus (*détails laissés à l'improbable lecteur*) que cet intervalle V est stable par f . Si on prend $u_0 \in V$, alors on a $u_n \in V$ pour tout n et, de façon semblable à la question a., on obtient $|u_n - x_0| \leq k^n |u_0 - x_0|$ pour tout n , d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0$. On dit que x_0 est un point fixe **attractif**.

10. Soient a et b deux réels tels que $0 < b \leq a$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2}{v_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}.$$

- a. Montrer que ces suites sont adjacentes et déterminer leur limite commune l .
b. Montrer que la suite (x_n) , définie par $x_n = \ln \left(\frac{u_n - l}{u_n + l} \right)$, est une suite géométrique.
c. En déduire une expression explicite de u_n en fonction de n et de x_0 .

- a. Les suites u et v sont définies par

$$u_0 = a \quad ; \quad v_0 = b \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Les nombres u_{n+1} et v_{n+1} sont respectivement la **moyenne arithmétique** et la **moyenne harmonique** des nombres u_n et v_n . Une récurrence immédiate montre que, pour tout n , u_n et v_n sont bien définis et sont strictement positifs. De l'inégalité $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2 \geq 0$, on déduit que, quels que soient les réels strictement positifs x et y avec $x \leq y$, on a $x \leq \frac{2xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$. De là, on montre facilement par récurrence sur n la suite d'inégalités $v_n \leq v_{n+1} \leq u_{n+1} \leq u_n$: la suite (v_n) est donc croissante, et la suite (u_n) est décroissante ; on en tire aussi que

$$0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq u_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{1}{2} (u_n - v_n)$$

puis, par récurrence, que $0 \leq u_n - v_n \leq \frac{1}{2^n} (u_0 - v_0)$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ et les suites sont adjacentes.

Soit l leur limite commune ; on voit facilement (*à condition d'y penser!*) que $u_{n+1}v_{n+1} = u_n v_n$, donc la suite $(u_n v_n)$ est constante : $u_n v_n = u_0 v_0 = ab$ pour tout n . En passant à la limite, on obtient $l^2 = ab$, d'où $l = \sqrt{ab}$ puisque l doit être positif. Le nombre l est la **moyenne géométrique** de a et b .

- b. Un peu de calcul, utilisant $u_n v_n = l$ pour tout entier n :

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \ln \left(\frac{u_{n+1} - l}{u_{n+1} + l} \right) = \ln \left(\frac{u_n + v_n - 2l}{u_n + v_n + 2l} \right) = \ln \left(\frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{u_n + v_n + 2\sqrt{u_n v_n}} \right) \\
&= \ln \left(\frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2} \right) = 2 \ln \left(\frac{\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}} \right) \\
&= 2 \ln \left(\frac{u_n - \sqrt{u_n v_n}}{u_n + \sqrt{u_n v_n}} \right) = 2 \ln \left(\frac{u_n - l}{u_n + l} \right) = 2x_n .
\end{aligned}$$

Donc (x_n) est une suite géométrique de raison 2.

- c. Cela permet d'explicitier u_n et v_n en fonction de n directement : on a $x_n = 2^n x_0$, et l'improbable lecteur vérifiera que, si l'on pose $r = e^{x_0} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, on trouve

$$u_n = \sqrt{ab} \frac{1 + r^{2^n}}{1 - r^{2^n}} \quad \text{et} \quad v_n = \sqrt{ab} \frac{1 - r^{2^n}}{1 + r^{2^n}} ,$$

ce qui, puisque $0 \leq r < 1$, montre une convergence très rapide des suites (u_n) et (v_n) vers leur limite commune $l = \sqrt{ab}$.

11*. Méthode de Newton

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, convexe, de classe $\mathcal{C}^2$, avec $f(a) < 0 < f(b)$.

- a. Montrer que f admet un unique zéro, noté α , sur $[a, b]$.
- b. On définit une suite (u_n) par $u_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$, où l'on a posé $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et qu'elle converge vers α .
- c. On suppose dans cette question que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[a, b]$. En appliquant à φ l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe un réel positif M tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq M (u_n - \alpha)^2 .$$

On dit que la vitesse de convergence de (u_n) vers α est **quadratique**, ou encore **d'ordre 2**.

- a. • La fonction f , continue, admet au moins un zéro α sur $]a, b[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
- Si f admettait deux zéros α et β avec $a < \alpha < \beta < b$, alors par convexité de f sur le segment $[a, \beta]$, le graphe de f serait en-dessous de sa sécante sur ce segment, et alors

$$\forall x \in]a, \beta[\quad f(x) \leq f(a) + (x - a) \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = f(a) \frac{\beta - x}{\beta - a} < 0 ,$$

ce qui contredit $f(\alpha) = 0$.

- Remarquons que $f'(\alpha) > 0$: en effet, si on avait $f'(\alpha) \leq 0$, alors on aurait $f' \leq 0$ sur $[a, \alpha]$ puisque f' est croissante, donc f serait décroissante sur cet intervalle et $f(a) \geq f(\alpha) = 0$, absurde. Comme f' est croissante, on a $f' > 0$ sur $[\alpha, b]$.

- b. La fonction φ est bien définie sur $[\alpha, b]$ (puisque $f' > 0$ sur cet intervalle, cf. ci-dessus), elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle avec $\varphi' = \frac{f f''}{f'^2} \geq 0$. On a, en effet, $f \geq 0$ sur $[\alpha, b]$. Donc φ est croissante sur cet intervalle ; comme $\varphi(\alpha) = \alpha$ et

$$\alpha = \varphi(\alpha) \leq \varphi(b) = b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b,$$

on déduit que l'intervalle $J = [\alpha, b]$ est stable par φ . il en résulte que la suite (u_n) est bien définie et que tous ses termes se trouvent dans J , cette suite est donc bornée.

Sur J , on a $\varphi(x) \leq x$ (évident), donc la suite (u_n) est décroissante. La suite (u_n) , décroissante et minorée, converge donc, et sa limite l vérifie $\varphi(l) = l$, soit $f(l) = 0$, donc $l = \alpha$.

- c. Notons que $\varphi'(\alpha) = 0$. Posons $C = \max_{t \in J} |\varphi''(t)|$ avec $J = [\alpha, b]$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^3$, alors φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur J , et l'inégalité de Taylor-Lagrange pour φ à l'ordre 1 donne

$$|u_{n+1} - \alpha| = |\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)| = \left| \varphi(u_n) - (\varphi(\alpha) + (u_n - \alpha) \varphi'(\alpha)) \right| \leq C \frac{(u_n - \alpha)^2}{2},$$

d'où l'inégalité demandée avec $M = \frac{C}{2}$.

Suites définies implicitement.

12. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $g_n : x \mapsto \int_n^x e^{t^2} dt$.

- a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel x_n tel que $g_n(x_n) = 1$.

- b. Donner un équivalent de (x_n) .

- c. Soit k un entier naturel. Montrer que l'on a $x_n = n + o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- a. La fonction g_n prend des valeurs négatives sur $] -\infty, n[$ donc ne prend pas la valeur 1 sur cet intervalle. Par ailleurs, elle est continue et strictement croissante sur $[n, +\infty[$ (d'après le théorème fondamental de l'analyse, elle est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée strictement positive puisque $g'_n(x) = e^{x^2}$), elle établit donc une bijection de $[n, +\infty[$ vers son image. Or, $g_n(n) = 0$, et la minoration, valable pour $x \geq n$: $g_n(x) \geq \int_n^x e^t dt = e^x - e^n$ montre que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$. Donc $g_n([n, +\infty[) = \mathbb{R}_+$. Comme 1 appartient à l'intervalle image, il admet donc un unique antécédent x_n dans $[n, +\infty[$, et finalement dans $\mathbb{R}$.

- b. On a déjà $x_n \geq n$ d'après a. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in]n, x_n[$ tel que

$$1 = g_n(x_n) - g_n(n) = (x_n - n) g'_n(c_n) = (x_n - n) e^{c_n^2},$$

donc $0 \leq x_n - n = e^{-c_n^2} \leq 1$, ce qui donne déjà l'encadrement (grossier): $n \leq x_n \leq n + 1$ d'où l'on déduit l'équivalent $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

- c. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $c_n \geq n$, on a plus précisément $0 \leq x_n - n = e^{-c_n^2} \leq e^{-n^2}$. Or e^{-n^2} est négligeable devant e^{-n} , lui-même négligeable devant $\frac{1}{n^k}$ pour tout k par croissances

comparées usuelles, donc $x_n - n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$, ce qu'il fallait prouver.

- 13.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit P_n la fonction polynôme définie par $P_n(x) = x^n + x - 1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet une unique racine réelle positive, que l'on notera x_n . Vérifier que $x_n \in]0, 1[$. Montrer que la suite (x_n) est croissante. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ (indication : pour $\varepsilon > 0$ fixé, on pourra exprimer $P_n(1 - \varepsilon)$). Une autre méthode consiste à raisonner par l'absurde en supposant que $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \neq 1$).

On a $P'_n(x) = n x^{n-1} + 1$, donc $P'_n(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$, la fonction P_n est **continue et strictement croissante** sur $\mathbb{R}_+$, elle établit donc une **bijection** de $\mathbb{R}_+$ vers son image $[-1, +\infty[$. Comme 0 appartient à l'intervalle image, il admet donc un unique antécédent, d'où la présence d'une unique racine réelle positive x_n du polynôme P_n . De $P_n(0) = -1 < 0$ et $P_n(1) = 1 > 0$, on déduit tranquillement que $0 < x_n < 1$.

La fonction P_n est strictement croissante sur $]0, 1[$; par ailleurs, pour $x \in]0, 1[$ fixé, on a $P_{n+1}(x) < P_n(x)$. En particulier,

$$0 = P_n(x_n) = P_{n+1}(x_{n+1}) < P_n(x_{n+1})$$

et, de la croissance de la fonction P_n , on déduit $x_n < x_{n+1}$: la suite (x_n) est croissante. Comme elle est majorée (par 1), elle est donc convergente.

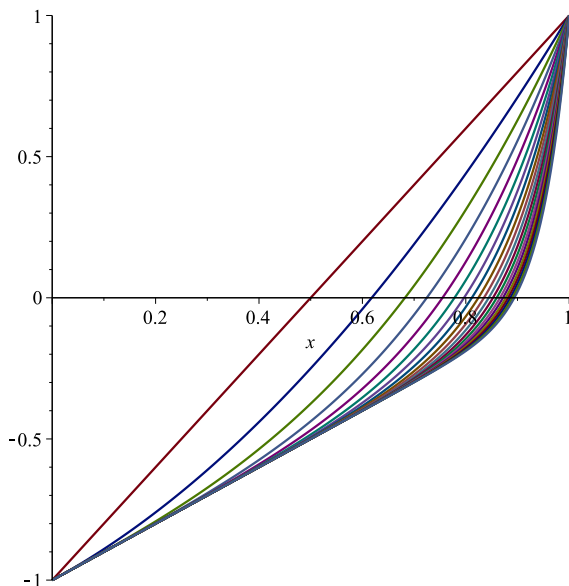
Fixons $\varepsilon > 0$. Alors $P_n(1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon)^n - \varepsilon \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\varepsilon < 0$. On en déduit que, à partir d'un certain rang, on a $P_n(1 - \varepsilon) < 0$, ce qui signifie que $1 - \varepsilon < x_n < 1$ (croissance de la fonction P_n). Bilan : on a prouvé

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies 1 - \varepsilon < x_n < 1,$$

ce qui se traduit par $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$.

Autre méthode: Pour montrer que la limite de la suite est 1, maintenant que l'on sait que la suite (x_n) converge, on peut raisonner par l'absurde en supposant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ avec $l \neq 1$. On a alors nécessairement $l \in]0, 1[$. Pour tout n , on a $x_n^n = 1 - x_n$ et on a une contradiction en passant à la limite: en effet, le second membre tend vers $1 - l$, et le premier terme $x_n^n = e^{n \ln(x_n)}$ tend vers 0 puisque $\ln(x_n) \rightarrow \ln(l) < 0$, l'exposant de l'exponentielle tend donc vers $-\infty$. D'où $0 = 1 - l$, soit $l = 1$, ce qui est contradictoire. En conclusion, $l = 1$.

Ce schéma permet de visualiser la suite (x_n) .

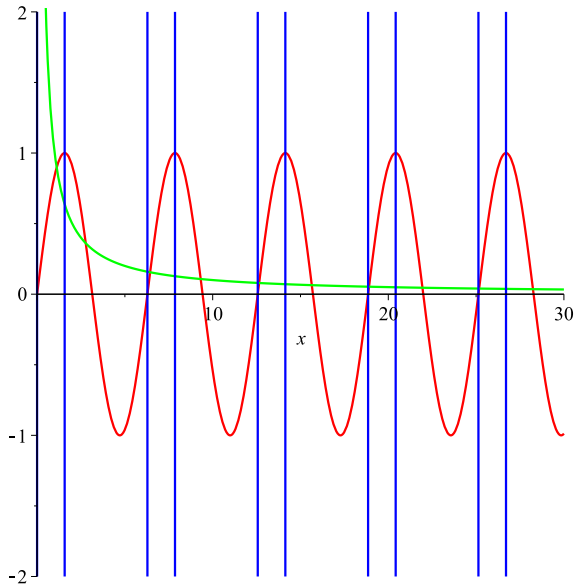


14. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\sin x = \frac{1}{x}$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $I_n = \left[2n\pi, \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi\right]$. Montrer que la suite $(x_n - 2n\pi)$ converge vers zéro en décroissant, donner un équivalent du terme général de cette suite.

L'équation proposée équivaut à $x \sin x = 1$. Or, la fonction $f : x \mapsto x \sin x$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle I_n (sa dérivée $f'(x) = \sin x + x \cos x$ est la somme de deux termes positifs et non simultanément nuls sur $I_n = \left[2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$), elle établit donc une bijection de I_n vers $f(I_n) = \left[f(2n\pi), f\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \left[0, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$. Comme le nombre 1 appartient à l'intervalle image, il admet un unique antécédent x_n par f dans I_n . Posons $y_n = x_n - 2n\pi$; on a alors $y_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et, par périodicité de la fonction sinus, $\sin y_n = \sin x_n = \frac{1}{x_n}$, on en déduit alors que $y_n = \arcsin\left(\frac{1}{x_n}\right)$. De l'encadrement $2n\pi \leq x_n \leq 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, on déduit que la suite (x_n) est croissante, puis que la suite $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ est décroissante, puis que la suite $(y_n) = \left(\arcsin \frac{1}{x_n}\right)$ est décroissante ; on en déduit aussi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = 0$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$; on en déduit même plus précisément que $x_n \sim 2n\pi$, puis que $\frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{2n\pi}$, et enfin que $y_n \sim \frac{1}{2n\pi}$ (en utilisant $\arcsin x \sim x$ au voisinage de 0).

Les x_n sont certains des points d'intersection de la sinusoïde rouge et de l'hyperbole verte,

je vous laisse trouver lesquels!



15. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = x e^x - n$.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n , et montrer qu'elle est strictement positive.
- Montrer les inégalités $1 \leq u_n \leq \ln(n)$ pour $n \geq 3$.
- Montrer que $u_n \sim \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- Trouver un équivalent de $u_n - \ln(n)$.

- Soit $f = f_0 : x \mapsto x e^x$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = (x+1)e^x$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$, strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. Comme f est négative sur $\mathbb{R}_-$, l'équation proposée $f(x) = n$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}_-$. Mais f établit une bijection (continue strictement croissante) de $]0, +\infty[$ vers son image qui est aussi $]0, +\infty[$, donc l'équation proposée admet bien une unique solution réelle u_n , qui appartient à $\mathbb{R}_+^*$.
- On a $f(1) = e < n = f(u_n)$ dès que $n \geq 3$; comme f est croissante, on en déduit $u_n \geq 1$. De même, $f(\ln n) = (\ln n) e^{\ln(n)} = n \ln(n) > n = f(u_n)$, donc par la croissance de f , on déduit aussi $u_n \leq \ln(n)$.
- Pour tout n , on a $u_n e^{u_n} = n$, soit (*): $\ln(u_n) + u_n = \ln(n)$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$: en effet, notons g la bijection réciproque de la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$, c'est aussi une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$ donc qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = +\infty$. Par croissance comparée, on a donc $\ln(u_n) = o(u_n)$ lorsque

n tend vers $+\infty$. De (*), on déduit alors $u_n \sim \ln(n)$.

- d. On a ensuite $u_n - \ln(n) = -\ln(u_n)$. Comme $u_n \sim \ln(n)$, on peut écrire $u_n = (1 + \varepsilon_n) \ln(n)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$. Du coup, $\ln(u_n) = \ln(\ln n) + \ln(1 + \varepsilon_n)$, le deuxième terme étant alors évidemment négligeable devant le premier, donc $\ln(u_n) \sim \ln(\ln n)$. Donc

$$u_n - \ln(n) \sim -\ln(\ln n) .$$

16.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution, que l'on notera x_n , dans $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.

c. Donner un développement asymptotique de x_n avec trois termes non nuls, plus un reste.

a. Soit $f : x \mapsto x + \ln(x)$. Alors f est continue et strictement croissante (comme somme de deux fonctions strictement croissantes) sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f établit une bijection (**théorème de la bijection**) de $\mathbb{R}_+^*$ vers son image. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, on a $f(\mathbb{R}_+^*) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. Donc f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre n a un unique antécédent $x_n = f^{-1}(n)$, la notation f^{-1} représentant ici la bijection réciproque de f .

b. Le théorème de la bijection indique que f^{-1} est aussi une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$. On a donc $\lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y) = +\infty$ et, en particulier, $x_n = f^{-1}(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

c. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, on déduit, par croissances comparées, que $n = x_n + \ln(x_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x_n$, i.e. le terme $\ln(x_n)$ est négligeable devant le terme x_n . Donc $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$, soit $x_n = n + o(n)$, ce qui donne le premier terme du développement asymptotique qui est l'équivalent. Pour aller plus loin, on doit rechercher un équivalent de la différence. Or,

$$x_n - n = -\ln(x_n) = -\ln(n + o(n)) = -\ln(n(1 + o(1))) = -\ln(n) + \ln(1 + o(1)) = -\ln(n) + o(1) .$$

On a donc $x_n - n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(n)$, et le développement à deux termes

$$x_n = n - \ln(n) + o(\ln(n)) .$$

Enfin,

$$\begin{aligned} x_n - (n - \ln(n)) &= (x_n - n) + \ln(n) = -\ln(x_n) + \ln(n) = -\ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \\ &= -\ln\left(1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n} , \end{aligned}$$

ce qui donne le développement asymptotique à trois termes:

$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) .$$

Autres exercices sur les suites. Ensembles dénombrables.

17. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

β

On a d'abord

$$0 \leq (u_n + v_n)^2 = u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 \leq 2(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)^2 = 0$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 0$.

Ensuite, $u_n v_n = (u_n + v_n)^2 - (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ensuite, $(u_n - v_n)^2 = (u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Enfin, $u_n = \frac{1}{2}((u_n + v_n) + (u_n - v_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $v_n = \frac{1}{2}((u_n + v_n) - (u_n - v_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

18. Théorème de Cesàro

a*. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ (v_n est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite u). On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$.

b. Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = l$ ($l \in \mathbb{R}$). Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = l$.

c. Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$ avec $l \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

d. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

a. Nous devons prouver l'assertion

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies |v_n - l| \leq \varepsilon.$$

Notons d'abord que $v_n - l = \frac{(u_1 - l) + (u_2 - l) + \dots + (u_n - l)}{n}$.

Soit donc $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, il existe un entier N tel que $|u_k - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout k tel que $k \geq N$. Si n est un entier plus grand que N , on peut écrire

$$v_n - l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N (u_k - l) + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n (u_k - l). \quad (*)$$

On majore directement le second terme de (*) en utilisant l'inégalité triangulaire : puisque $|u_k - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $k \geq N$, on a donc

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n (u_k - l) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n |u_k - l| \leq \frac{1}{n} (n - N) \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

L'entier N ayant été fixé, la quantité $\sum_{k=1}^N (u_k - l)$ est alors une constante (indépendante de la "variable" n) ; le premier terme $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^N (u_k - l)$ de (*) tend donc vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$ et il est donc en valeur absolue inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$ lorsque n est supérieur à un certain entier naturel N' . Pour $n \geq \max\{N, N'\}$, on a alors $|v_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

b. Nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - u_{n-1}) = l$, d'où, en posant

$$v_n = \frac{(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1})}{n} ,$$

nous savons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ d'après la question **a**.

Or, par télescopage, $v_n = \frac{u_n}{n} - \frac{u_0}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_0}{n} = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = l$.

c. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln x_{n+1} - \ln x_n) = \ln l$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln x_n = \ln l$ d'après la question **b**. En prenant enfin l'exponentielle (fonction continue), on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

d. Utilisons la question **c**.

• Avec $x_n = \binom{2n}{n}$, nous avons

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \text{ qui tend vers } 4 ,$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4$.

• Avec $x_n = \frac{n^n}{n!}$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tend vers e , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e$.

19. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs. Pour tout n , on pose $y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}$.

a. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ lorsque (x_n) est une suite constante de valeur $a > 0$.

- b.** Même question lorsque $x_n = a b^{2^n}$ avec $a > 0, b > 0$.
- c*.** Montrer que (y_n) converge si et seulement s'il existe un réel positif M tel que
- $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \leq M^{2^n}.$$

Remarque préliminaire. On peut commencer par noter que, dans tous les cas, la suite (y_n) est croissante. Elle est donc convergente si et seulement si elle est majorée.

- a.** On note la relation de récurrence $y_{n+1} = \sqrt{a + y_n}$. Soit donc la fonction $f : x \mapsto \sqrt{a + x}$ que l'on considère comme allant de $\mathbb{R}_+$ vers lui-même. Cette fonction f admet pour point fixe l'unique racine positive de l'équation $x^2 - x - a = 0$, c'est-à-dire le nombre $l = \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}$. Comme f est croissante avec $f(0) = \sqrt{a} > 0$ et $f(l) = l$, le segment $S = [0, l]$ est stable par f . Comme $y_1 = \sqrt{a} \in S$, on a $y_n \in S$ pour tout n , la suite (y_n) est donc majorée, donc convergente d'après la remarque préliminaire. Enfin, la limite de (y_n) est un point fixe de f (car f est continue), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = l = \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}$.
- b.** Notons (y_n) la suite des "radicaux itérés" obtenue avec $x_n = a$ pour tout n et que l'on a étudiée en **a**. Notons (y'_n) la suite obtenue avec $x_n = a b^{2^n}$. On voit facilement que $y'_n = b y_n$ pour tout n , donc la suite (y'_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y'_n = b l = b \left(\frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}} \right)$.
- c.** Si (x_n) et (x'_n) sont deux suites de réels positifs telles que $x_n \leq x'_n$ pour tout n , alors les suites de radicaux itérés associées vérifient $y_n \leq y'_n$ pour tout n . Donc:
- s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $x_n \leq M^{2^n}$ pour tout n , alors pour tout n , y_n est majoré par le n -ème terme y'_n de la suite de radicaux itérés associée à la suite $(x'_n) = (M^{2^n})$. Or, il résulte de **b.** que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y'_n = M \alpha$ où $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or. La suite (y'_n) étant majorée, il en est alors de même de la suite (y_n) , qui est alors convergente d'après la remarque préliminaire.
 - si (y_n) converge vers un réel (positif) l , on a facilement, pour tout n , les inégalités

$$x_n^{2^{-n}} \leq y_n \leq l.$$

Donc $x_n \leq l^{2^n}$ pour tout n , ce qui donne l'implication réciproque.

20. Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dite **sous-additive** si elle vérifie

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad u_{m+n} \leq u_m + u_n.$$

- a.** Pour quels réels α la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $v_n = n^\alpha$ est-elle sous-additive ? Lorsque c'est le cas, déterminer la limite de $\frac{v_n}{n}$.
- b.** Quelles sont les suites réelles $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant $\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad w_{m+n} = w_m + w_n$? Déterminer alors la limite de $\frac{w_n}{n}$.

c*. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle sous-additive, on suppose que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ est minorée et on pose $\alpha = \inf \left\{ \frac{u_n}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \alpha$. On pourra fixer $\varepsilon > 0$ et considérer un entier p tel que $\alpha \leq \frac{u_p}{p} \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$, puis utiliser une division euclidienne.

a. • Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons $f_n : x \mapsto (x+n)^\alpha - x^\alpha - n^\alpha$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Notons déjà que, si $\alpha < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -n^\alpha < 0$ et, si $\alpha > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0$.

Ensuite, $f'_n(x) = \alpha((x+n)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1})$.

On est maintenant armés pour discuter du signe de $f_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- si $\alpha < 0$, alors $f'_n > 0$ donc f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ avec une limite négative en $+\infty$, donc f_n est négative sur $\mathbb{R}_+^*$;

- si $0 < \alpha < 1$, alors $f'_n < 0$ donc f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ avec une limite nulle en 0, donc f_n est négative sur $\mathbb{R}_+^*$;

- si $\alpha > 1$, alors $f'_n > 0$ donc f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ avec une limite nulle en 0, donc f_n est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

En adjoignant à cela les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ dont l'étude est immédiate, on conclut que la suite (n^α) est sous-additive si et seulement si $\alpha \leq 1$.

• Lorsque $\alpha = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = 1$ et, pour $\alpha < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = 0$.

b. Si $w_{m+n} = w_m + w_n$ pour tout couple $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, alors $w_{n+1} = w_n + w_1$ et la suite (w_n) est arithmétique de raison w_1 . Avec l'initialisation $w_1 = w_1$ (!), on déduit que $w_n = n w_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et réciproquement une telle suite convient. On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_n}{n} = w_1$.

c. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne inférieure, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha \leq \frac{u_p}{p} \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq p$, posons la division euclidienne de n par p : on a $n = pq + r$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. La propriété de sous-additivité fournit alors la majoration $u_n \leq q u_p + u_r$. Donc

$$\alpha \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{q u_p + u_r}{n}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{q u_p + u_r}{n} &= \frac{u_p}{p} + \frac{q u_p + u_r}{n} - \frac{u_p}{p} \\ &= \frac{u_p}{p} + \frac{u_r}{n} - \frac{r u_p}{np} \\ &\leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \left(u_r - \frac{r u_p}{p} \right). \end{aligned}$$

En posant $M = \max_{0 \leq r \leq p-1} \left(u_r - \frac{r u_p}{p} \right)$, on a obtenu l'encadrement $\alpha \leq \frac{u_n}{n} \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{n}$ pour tout n supérieur à p . Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{n} = 0$, il existe un rang N à partir duquel $\frac{M}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour tout entier n tel que $n \geq \max\{p, N\}$, on a alors $\alpha \leq \frac{u_n}{n} \leq \alpha + \varepsilon$. Ceci prouve (en revenant à la définition de la limite) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \alpha = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n}$.

- 21.** Soit (u_n) une suite réelle. On suppose qu'il existe un réel k appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et une suite réelle (r_n) de limite nulle, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1}| \leq k |u_n| + |r_n|.$$

On se donne par ailleurs un réel ε strictement positif.

- a. Justifier l'existence d'un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|r_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}(1-k)$.
- b. Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq N$, on a $|u_n| \leq k^{n-N} |u_N| + \frac{\varepsilon}{2}$.
- c. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- a. Résulte immédiatement de $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$ puisque $\frac{\varepsilon}{2}(1-k) > 0$.
- b. Montrons par récurrence l'inégalité demandée pour tout entier n tel que $n \geq N$.

L'initialisation pour $n = N$ est claire.

Soit n tel que $n \geq N$, supposons que $|u_n| \leq k^{n-N} |u_N| + \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $|r_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}(1-k)$, on déduit

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| &\leq k \left(k^{n-N} |u_N| + \frac{\varepsilon}{2} \right) + |r_n| \\ &\leq k^{n-N+1} |u_N| + k \frac{\varepsilon}{2} + (1-k) \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq k^{(n+1)-N} |u_N| + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

- c. Le même réel strictement positif ε étant donné, et le même entier N lui étant associé, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (k^{n-N} |u_N|) = 0$, il existe un rang N_1 à partir duquel cette expression est majorée aussi par $\frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq \max\{N, N_1\}$, on a alors $|u_n| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
-

- 22*.** Une suite réelle (a_n) est dite **convexe** si on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leq \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$. Elle est dite **concave** si la suite $(-a_n)$ est convexe.

- a. Par quelle propriété simple de la suite (d_n) , de terme général $d_n = a_{n+1} - a_n$, se traduit la convexité d'une suite réelle (a_n) ? Quelles sont les suites réelles qui sont à la fois convexes et concaves ?
- b. Soit (a_n) une suite convexe majorée. Montrer qu'elle est décroissante.
- c. Dans cette question, (a_n) est une suite convexe bornée et on pose $d_n = a_{n+1} - a_n$ pour tout n .
 - i. Montrer que la suite (a_n) est convergente.
 - ii. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geq 2p$. Prouver les inégalités $2(a_n - a_p) \leq n d_{n-1} \leq 0$.

iii. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nd_n = 0$.

- a. La suite (a_n) est convexe si et seulement si, pour tout n , on a $a_{n+1} - a_n \leq a_{n+2} - a_{n+1}$, soit $d_n \leq d_{n+1}$. La convexité de la suite (a_n) équivaut donc à la croissance de la suite (d_n) et, bien évidemment, la concavité de (a_n) équivaut à la décroissance de la suite (d_n) .

La suite (a_n) est convexe et concave à la fois si et seulement si la suite (d_n) est à la fois croissante et décroissante, donc constante. Ceci caractérise les suites arithmétiques.

- b. Raisonnons par l'absurde: si (a_n) n'était pas décroissante, il existerait au moins un entier naturel N tel que $a_{N+1} > a_N$. Posons $\delta = a_{N+1} - a_N = d_N$, alors $\delta > 0$, et la croissance de la suite (d_n) , prouvée en a., nous apprend que $d_n \geq \delta$ pour tout $n \geq N$, soit $a_{n+1} \geq a_n + \delta$ pour tout $n \geq N$. Une récurrence immédiate donne alors $a_n \geq a_N + (n - N)\delta$ pour tout $n \geq N$, ce qui entraîne $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse que (a_n) est majorée.

- c. i. La suite (a_n) est décroissante d'après b., et elle est aussi minorée, elle est donc convergente.

ii. Comme la suite (a_n) est décroissante, la suite (d_n) est à valeurs négatives, ce qui donne déjà l'inégalité $nd_{n-1} \leq 0$.

Ensuite, la suite (d_n) étant croissante, écrivons

$$2(a_n - a_p) = 2 \sum_{k=p}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = 2 \sum_{k=p}^{n-1} d_k \leq 2 \sum_{k=p}^{n-1} d_{n-1} = 2(n-p) d_{n-1} \leq n d_{n-1},$$

la dernière inégalité résultant du fait que $2(n-p) \geq n$ et $d_{n-1} \leq 0$.

iii. Pour tout $n \geq 2$, posons $p_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, alors $p_n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 2p_n$. Il résulte de ii. que l'on a, pour tout $n \geq 2$, l'encadrement $2(a_n - a_{p_n}) \leq n d_{n-1} \leq 0$. Comme la suite (a_n) admet une limite A , la suite extraite (a_{p_n}) converge aussi vers A , et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - a_{p_n}) = A - A = 0$.

Par encadrement, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} nd_{n-1} = 0$. Par décalage d'indice, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)d_n = 0$. Enfin, $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$, donc par différence, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nd_n = 0$.

23.a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

- b. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ est infini non dénombrable. On pourra supposer qu'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et chercher une contradiction en considérant l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \varphi(n)\}$.

- a. L'application $f : \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(A) = \sum_{k \in A} 2^k$ est une bijection. Cela résulte de l'existence (surjectivité) et de l'unicité (injectivité) de l'écriture binaire d'un entier naturel.

- b. Supposons qu'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Alors $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \varphi(n)\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, il existe donc un (unique) entier m tel que $A = \varphi(m)$. Cet entier m appartient-il à A ? Je laisse le lecteur conclure que l'hypothèse de départ est absurde!