

PROBLÈME 1

PARTIE A. Formules de Taylor

L'objectif de cette partie est de faire ou refaire certaines démonstrations du programme d'analyse de première année.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, où a et b sont deux réels avec $a < b$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n est un entier naturel.

A.1. Prouver la relation (dite **formule de Taylor avec reste intégral**):

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

On pourra procéder par récurrence sur l'entier n .

A.2. En déduire l'**inégalité de Taylor-Lagrange**:

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{M_{n+1} (b-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

en posant $M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$. On justifiera l'existence de ce nombre M_{n+1} .

A.3. Une application. En considérant la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$, prouver la relation

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

PARTIE B. La méthode de Héron

Il s'agit d'une méthode datant de l'antiquité pour calculer de façon approchée des racines carrées de réels positifs.

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On définit la suite $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} c_0(a) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad c_{n+1}(a) = \frac{1}{2} \left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)} \right) \end{cases}.$$

B.1. Montrer par récurrence que $c_n(a)$ est bien défini et que $c_n(a) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

B.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de $c_{n+1}(a)^2 - a$ faisant intervenir $(c_n(a)^2 - a)^2$.
En déduire que $c_n(a) \geq \sqrt{a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

B.3. Étudier les variations de la suite $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$, puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(a) = \sqrt{a}$.

B.4. Calculer $c_1(2)$. À l'aide de la question **B.2.**, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad c_n(2)^2 - 2 \leq 8 \times \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}.$$

B.5. En déduire que, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{2} = c_n(2) + O\left(\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right).$$

PARTIE C. La méthode de Newton

Dans toute cette partie, on note I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ dont la dérivée première f' ne s'annule pas sur I .

On suppose qu'il existe un point $c \in I$ tel que $f(c) = 0$. Pour tout $r > 0$, on pose $J_r = [c-r, c+r]$.

C.1. Soit $a \in I$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a rencontre l'axe Ox en un point d'abscisse b . Exprimer b en fonction de a . Faire un schéma.

C.2. Montrer que c est le seul zéro de f sur l'intervalle I .

Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\begin{cases} c_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N} & c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)} \end{cases}.$$

L'objectif de ce qui suit est de montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $J_r \subset I$ et tel que, si $c_0 \in J_r$, alors la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et converge vers c .

C.3. Soit $\rho > 0$ tel que $J_\rho \subset I$. Justifier que, pour tout $r \in [0, \rho]$, les nombres $s_r = \max_{J_r} |f''|$ et $i_r = \min_{J_r} |f'|$ sont bien définis et que $i_r > 0$.

On note $K_r = \frac{s_r}{2 i_r}$ pour $r \in [0, \rho]$.

C.4. Montrer que l'application $r \mapsto K_r$ est croissante sur $[0, \rho]$, puis qu'il existe $r > 0$ tel que $r K_r < 1$.

Dans toute la suite, on fixe $r > 0$ tel que $J_r \subset I$ et $r K_r < 1$.

C.5. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $c_n \in J_r$. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que

$$|c_{n+1} - c| \leq K_r |c_n - c|^2,$$

puis en déduire que $c_{n+1} \in J_r$.

C.6. Montrer que, si $c_0 \in J_r$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad |c_n - c| \leq \frac{(K_r |c_0 - c|)^{2^n}}{K_r}$, et conclure.

C.7. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Expliquer pourquoi la méthode de Héron décrite dans la partie **B.** pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{a}$ est un cas particulier de la méthode de Newton.

PROBLÈME 2

Pour tout entier naturel n , on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n} dt$ et $W'_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n+1} dt$ (intégrales de Wallis).

PARTIE A.

A.1. Montrer que $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et, à l'aide d'une intégration par parties, prouver la relation $W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_n$.

A.2. En déduire la relation $W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2}$ pour tout entier naturel n .

A.3. Écrire une relation liant W'_n et W'_{n+1} . En déduire la relation $W'_n = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$.

A.4. Montrer que $W_{n+1} \leq W'_n \leq W_n$ pour tout n entier naturel. En déduire que $W'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n$.

A.5. De l'équivalence $W'_n \sim W_n$, déduire la **formule de Wallis** : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{n ((2n)!)^2} = \pi$.

A.6. On pose $a_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis $b_n = \ln(a_n)$.

a. Pour $n \geq 2$, vérifier la relation

$$b_n - b_{n-1} = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

b. Obtenir un équivalent de $b_n - b_{n-1}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

c. En déduire que la suite (a_n) admet une limite A strictement positive.

A.7. Démontrer la **formule de Stirling** : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

A.8. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs, toutes deux convergentes.

On suppose que $u_n \sim v_n$. Démontrer que $R_n \sim R'_n$, où $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ sont les restes d'ordre n de ces deux séries.

A.9. En utilisant la comparaison à une intégrale, démontrer l'équivalence $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

A.10. De la question **A.6.**, déduire un développement asymptotique de $n!$ de la forme

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{C}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

où C est une constante à déterminer.

PARTIE B.

Dans cette partie, on pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 (\cos t)^{2n} dt$ pour tout entier naturel n .

B.1. Par deux intégrations par parties, montrer la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad W_n = -2n^2 J_n + n(2n-1) J_{n-1}.$$

B.2. En déduire que $\frac{1}{n^2} = 2 \left(\frac{J_{n-1}}{W_{n-1}} - \frac{J_n}{W_n} \right)$ pour tout n entier naturel non nul.

B.3.a. Montrer, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'inégalité $t \leq \frac{\pi}{2} \sin t$. On pourra exploiter la concavité de la fonction sinus sur l'intervalle considéré.

b. En déduire que $0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4} (W_n - W_{n+1})$ pour tout entier naturel n , puis que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{J_n}{W_n} = 0.$$

Pour tout entier naturel non nul n , on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

B.4. En utilisant **B.2.**, transformer l'expression de S_n .

B.5. En déduire la valeur de la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.