

Séries à termes positifs.

1. Nature des séries de terme général u_n , avec

$$\text{a. } u_n = \frac{n!}{n^n} \quad ; \quad \text{b. } u_n = e^{-\sqrt{n}} \quad ; \quad \text{c. } u_n = \frac{\ln(n)}{(e^n - 1)^\alpha} \quad ; \quad \text{d. } u_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n \ln^2(n)}.$$

a. On applique la règle de d'Alembert (série à termes strictement positifs) :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}.$$

Comme $e^{-1} < 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente.

b. Ici, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ puisque $\sqrt{n} - \sqrt{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure. Essayons la comparaison à une série de Riemann (règle $n^\alpha u_n$) : choisissons $\alpha = 2$, alors $n^2 u_n = n^2 e^{-\sqrt{n}} = e^{2 \ln n - \sqrt{n}}$. Comme $\ln n = o(\sqrt{n})$ (croissances comparées), l'exposant $2 \ln n - \sqrt{n}$ est équivalent à $-\sqrt{n}$ et tend donc vers $-\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 0$ ce qui signifie que $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et assure la convergence de la série.

c. On a $u_n > 0$ et, de $e^n - 1 \sim e^n$, on tire $u_n \sim v_n$ avec $v_n = e^{-\alpha n} \ln(n)$, les deux séries sont donc de même nature. Or, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = e^{-\alpha} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\alpha}$. De la règle de d'Alembert, on déduit donc la convergence de $\sum v_n$ pour $\alpha > 0$ et sa divergence pour $\alpha < 0$. Enfin, pour $\alpha = 0$, on a $u_n = v_n = \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc divergence grossière.

En conclusion, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

d. On a

$$u_n = \exp\left(n \ln^2(n) \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)\right) = \exp\left(n \ln^2(n) \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = e^{-\ln^2(n)} \cdot \exp\left(O\left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right)\right).$$

Comme $\frac{\ln^2(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées, le facteur $\exp\left(O\left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right)\right)$ tend vers 1, donc $u_n \sim v_n$ avec $v_n = e^{-\ln^2(n)}$. Ensuite, $n^2 v_n = e^{2 \ln(n) - \ln^2(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ puisque l'exposant de l'exponentielle tend vers $-\infty$, donc $v_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum v_n$ converge alors, et $\sum u_n$ aussi puisque les deux séries à termes positifs sont de même nature (termes généraux équivalents).

2. Calculer les sommes

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{et} \quad T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Les deux séries sont convergentes, puisque leurs termes généraux sont respectivement équivalents à $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^3}$.

- On décompose en éléments simples: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, on observe alors un télescopage en calculant une somme partielle:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

puis $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$.

- On décompose en éléments simples: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$. Ici aussi, on observe un télescopage lors du calcul d'une somme partielle:

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}, \end{aligned}$$

les termes pour k de 3 à n s'annihilant. Enfin, $T = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{1}{4}$.

3. On considère les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n} dt$.

- Prouver la relation $W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_n$.
- On pose $u_n = \sqrt{n} W_n$. Montrer que la série de terme général $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ converge.
- En déduire l'existence d'un réel strictement positif K tel que $W_n \sim \frac{K}{\sqrt{n}}$.

- On écrit

$$W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t (1 - \sin^2 t) dt = W_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{2n} t \sin t) \sin t dt.$$

Une intégration par parties donne alors

$$W_{n+1} = W_n + \left[\frac{\sin t \cos^{2n+1} t}{2n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{W_{n+1}}{2n+1},$$

ce qui conduit à la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (2n+2) W_{n+1} = (2n+1) W_n,$$

ce qu'il fallait prouver.

b. On a

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\frac{W_{n+1}}{W_n}\right) = \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\frac{2n+1}{2n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{2n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

la série est donc convergente.

c. La série étudiée en **b.** est télescopique puisque $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. Comme cette série converge, on en déduit la convergence de la suite associée, de terme général $\ln(u_n)$. Il existe donc un réel l tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = l$. Par continuité de la fonction exponentielle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = K \text{ avec } K = e^l > 0. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n = K, \text{ soit } W_n \sim \frac{K}{\sqrt{n}}.$$

4. En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer la partie entière du nombre

$$N = \sum_{k=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue et strictement décroissante, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut alors écrire $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} < \frac{1}{\sqrt{k}}$, ou encore $\int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} < \frac{1}{\sqrt{k}} < \int_{k-1}^k \frac{dt}{\sqrt{t}}$, l'inégalité de droite étant prise en compte seulement pour $k \geq 2$ (même si elle a aussi un sens pour $k = 1$). En sommant ces inégalités, on obtient

$$\int_1^{10001} \frac{dt}{\sqrt{t}} < N = \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}} < 1 + \int_1^{10000} \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

soit $2(\sqrt{10001} - 1) < N < 1 + 2(100 - 1) = 199$.

Comme, d'autre part, $2(\sqrt{10001} - 1) > 2(100 - 1) = 198$, on a donc $198 < N < 199$ et $\lfloor N \rfloor = 198$.

5. Donner un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$, on peut donc appliquer les méthodes de comparaison série-intégrale. Pour $k \geq 2$, on a l'encadrement

$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$, d'où on tire $\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$, l'inégalité de droite étant alors valable seulement pour $k \geq 3$. En sommant pour k allant de 2 à n , on obtient $\int_2^{n+1} f(t) dt \leq S_n = \sum_{k=2}^n f(k) \leq f(2) + \int_2^n f(t) dt$, soit

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \frac{1}{2 \ln(2)} + \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)).$$

Le minorant et le majorant étant tous deux équivalents à $\ln(\ln(n))$ (le lecteur le démontrera en détail!), on déduit par le théorème d'encadrement que $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

6. Séries de Bertrand

On appelle ainsi les séries $\sum_{n \geq 2} u_n$, avec $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, où α et β sont deux réels. On se propose d'étudier leur convergence.

- a. On suppose $\alpha > 1$. En étudiant $n^\gamma u_n$, pour un choix convenable de γ , montrer que la série converge.
- b. On suppose $\alpha < 1$. En considérant $n u_n$, montrer que la série diverge.
- c. On suppose $\alpha = 1$. Par comparaison à une intégrale, discuter de la nature de la série $\sum u_n$.

- a. L'expression $n^\gamma u_n = n^{\gamma-\alpha} (\ln n)^{-\beta}$ tend vers zéro dès que l'exposant $\gamma - \alpha$ est strictement négatif (et ceci quel que soit le réel β) d'après les théorèmes de croissances comparées. Choisissons donc γ tel que $1 < \gamma < \alpha$ (ce qui est possible) ; on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\gamma u_n = 0$

d'après ce qui précède, donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$, et la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\gamma}$ converge d'après le cours, donc par comparaison $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

- b. Si $\alpha < 1$, alors $n u_n = n^{1-\alpha} (\ln n)^{-\beta}$ tend vers $+\infty$ (et ceci quel que soit le réel β) d'après les théorèmes de croissances comparées. Donc u_n est prépondérant devant $\frac{1}{n}$, autrement dit $\frac{1}{n} = o(u_n)$; comme on sait que la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, par comparaison, on déduit que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

- c. Pour $x \in [2, +\infty[$, posons $f(x) = \frac{1}{x (\ln x)^\beta}$. La fonction f est continue et positive sur $[2, +\infty[$, et elle est dérivable avec $f'(x) = -\frac{\beta + \ln x}{x^2 (\ln x)^{\beta+1}}$; on a donc $f'(x) \leq 0$ pour x suffisamment grand (précisément pour $x \geq e^{-\beta}$), donc f est décroissante sur $[e^{-\beta}, +\infty[$. On peut donc affirmer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est de même nature que

l'intégrale impropre $\int_2^{+\infty} f(t) dt$. Or, un calcul de primitive sur $[2, +\infty[$ donne

- si $\beta = 1$, $\int \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln t) + C$;

- si $\beta \neq 1$, $\int \frac{dt}{t (\ln t)^\beta} = \frac{1}{1-\beta} \frac{1}{(\ln t)^{\beta-1}} + C$.

L'intégrale impropre considérée converge si et seulement si la primitive (c'est à une constante près, mais cela ne change rien) admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, et ceci est vérifié si et seulement si $\beta > 1$. La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^\beta}$ converge donc si et seulement si $\beta > 1$.

Conclusion. La série de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge donc si et seulement si

$$(\alpha > 1) \quad \text{ou} \quad (\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \beta > 1) .$$

7. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente. Pour tout n , on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

a. Démontrer la relation $\sum_{k=0}^n R_k - \sum_{k=1}^n k u_k = (n+1) R_n$.

b. En cas de convergence de la série $\sum n u_n$, montrer que $(n+1) R_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k u_k$.

c. En déduire que les séries $\sum n u_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature et que, en cas de convergence, elles ont la même somme.

a. Notons que $u_k = R_{k-1} - R_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k u_k &= \sum_{k=1}^n k (R_{k-1} - R_k) = \sum_{k=1}^n k R_{k-1} - \sum_{k=1}^n k R_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) R_k - \sum_{k=1}^n k R_k = R_0 + \sum_{k=1}^{n-1} [(k+1) - k] R_k - n R_n \\ &= \sum_{k=0}^n R_k - (n+1) R_n , \end{aligned}$$

ce qui donne bien l'égalité demandée.

b. Fixons un entier n . Soit p un entier supérieur à n , on a alors

$$(n+1) \sum_{k=n+1}^p u_k = \sum_{k=n+1}^p (n+1) u_k \leq \sum_{k=n+1}^p k u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k u_k .$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient $(n+1)R_n = (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} ku_k$.

c. • Si la série $\sum_{n \geq 1} nu_n$ converge, alors ses restes $\sum_{k=n+1}^{+\infty} ku_k$ existent et tendent vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$; de la question b., on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)R_n = 0$ et, de la question a.,

on déduit la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} R_n$ et l'égalité des sommes $\sum_{k=0}^{+\infty} R_k = \sum_{k=1}^{+\infty} ku_k$.

• Si la série $\sum_{k \geq 0} R_k$ converge, soit $X = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k$ sa somme ; la question a. montre que, pour

tout n entier, on a $\sum_{k=1}^n ku_k = \sum_{k=0}^n R_k - (n+1)R_n \leq \sum_{k=0}^n R_k \leq X$: la série à termes positifs $\sum ku_k$, dont les sommes partielles sont majorées, est donc convergente ; en appliquant le point précédent, on retrouve bien sûr l'égalité des sommes.

8. Étudier la suite (u_n) définie par $0 < u_0 \leq \frac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Déterminer la nature des séries de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, puis u_n^2 et enfin u_n .

• Soit $f : x \mapsto \sin x$. L'intervalle $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ est stable par f puisque son image est $]0, 1]$ et on a $f(x) \leq x$ pour tout $x \in I$ (rappelons en effet l'inégalité classique $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leq |x|$). On en déduit que la suite (u_n) prend toutes ses valeurs dans l'intervalle I , et qu'elle est décroissante. Comme elle est décroissante et minorée, elle converge donc vers un point adhérent à I (c'est-à-dire appartenant à $\bar{I} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) et qui est un point fixe de f . On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, car c'est le seul point fixe de f .

• La première série considérée est "télescopique", exprimons en effet sa somme partielle d'ordre n :

$$\sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^n [\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)] = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Cette série (à termes négatifs) est donc divergente.

• Reprenons le terme général de la série précédente, et faisons-en un petit développement limité : puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, il est légitime d'écrire

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= \ln\left(\frac{\sin u_n}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_n - \frac{1}{6}u_n^3 + o(u_n^3)}{u_n}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{6}u_n^2 + o(u_n^2)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{6}u_n^2. \end{aligned}$$

Autrement dit, $u_n^2 \sim -6 \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$. Ce sont des séries à termes positifs, le critère des équivalents s'applique donc : les deux séries sont de même nature, donc $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ diverge.

- Comme $0 < u_n \leq 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < u_n^2 < u_n$: la divergence de $\sum_n u_n^2$ entraîne alors la divergence de la série $\sum_n u_n$.

9. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \text{Arctan}(k)$.

a. Donner un équivalent de S_n .

b. Montrer qu'il existe un réel α tel que l'on ait le développement asymptotique

$$S_n = \frac{n\pi}{2} - \ln(n) + \alpha + o(1).$$

a. Le résultat est $S_n \sim \frac{n\pi}{2}$. Voici différentes façons d'y parvenir:

- le plus rapide (*mais hors programme*) est sans doute d'utiliser le théorème de Cesàro:

comme $\text{Arctan}(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$, ce théorème donne $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \text{Arctan}(k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$, d'où le résultat.

- faire une comparaison série-intégrale (*dans la lettre et l'esprit du programme, mais un peu long!*): la fonction Arctan est croissante, on déduit facilement que

$$\int_0^n \text{Arctan}(t) dt \leq S_n \leq \int_1^{n+1} \text{Arctan}(t) dt,$$

on calcule ces intégrales (une i.p.p.) et on conclut que $S_n \sim \frac{\pi}{2} \text{Arctan}(n) \sim \frac{n\pi}{2}$.

- utiliser (*après l'avoir démontrée*) la relation $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$.

On a alors $S_n = \frac{n\pi}{2} - \sum_{k=1}^n \text{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right)$ et, comme $\text{Arctan}(x) \leq x$ pour $x \geq 0$, on a alors

$0 \leq \sum_{k=1}^n \text{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right) \leq H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et, comme il est connu (?) que $H_n \sim \ln(n)$, on déduit

que le terme $\sum_{k=1}^n \text{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right)$ est négligeable devant $\frac{n\pi}{2}$, ce qui suffit.

- il y a sûrement encore plein d'autres méthodes!

b. Reprenons la dernière méthode envisagée. On a $\text{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} + r_k$ avec $r_k = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$, donc

$$S_n = \frac{n\pi}{2} - \sum_{k=1}^n \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{n\pi}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n r_k .$$

Comme $r_k = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$, la série $\sum_{k \geq 1} r_k$ converge, notons σ sa somme. Le développement asymptotique $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ étant connu, avec γ constante d'Euler, nous avons donc

$$S_n = \frac{n\pi}{2} - \ln(n) - (\sigma + \gamma) + o(1) ,$$

ce qui correspond aux attentes de l'énoncé, avec $\alpha = -(\sigma + \gamma)$.

10. Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série à termes strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{u_1 + \cdots + u_n} .$$

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. *En cas de divergence, on pourra considérer l'expression $\ln(1 - v_n)$.*

-
- Si $\sum u_n$ converge, l'encadrement $0 \leq v_n \leq \frac{u_n}{u_1}$ montre la convergence de la série $\sum v_n$.
 - Supposons $\sum u_n$ divergente. Remarquons que $1 - v_n > 0$ pour tout n et

$$\ln(1 - v_n) = \ln\left(\frac{u_1 + \cdots + u_{n-1}}{u_1 + \cdots + u_n}\right) = \ln(u_1 + \cdots + u_{n-1}) - \ln(u_1 + \cdots + u_n) .$$

La série $\sum \ln(1 - v_n)$ est donc une série télescopique, et elle est divergente puisque la suite associée $(\ln(u_1 + \cdots + u_n))$ diverge (et, plus précisément, tend vers $+\infty$). Examinons alors deux cas:

- si (v_n) tend vers zéro, alors $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(1 - v_n)$ donc $\sum v_n$ diverge par le critère des équivalents des séries à termes positifs ;
- si (v_n) ne tend pas vers zéro, alors la série $\sum v_n$ est grossièrement divergente.

En conclusion, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont, dans tous les cas, de même nature.

11. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Convergence et calcul de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\cos \frac{x}{2^n}\right)$.

Notons d'abord que, pour tout n , $\frac{x}{2^n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, intervalle dans lequel le cosinus reste positif, ce qui garantit la bonne définition du terme général. Lorsque t tend vers 0, on a

$$\ln(\cos(t)) = \ln\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) = -\frac{t^2}{2} + o(t^2) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t^2}{2}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$, on peut utiliser ce développement limité en 0, on en déduit que

$$\ln\left(\cos \frac{x}{2^n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x^2}{2^{2n+1}}, \text{ ce qui garantit la convergence de la série à étudier.}$$

Le calcul de la somme se fait grâce à une astuce: exprimons une somme partielle

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\cos \frac{x}{2^k}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k}\right).$$

Or, la relation $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$ permet d'écrire $\cos(a) = \frac{\sin(2a)}{2 \sin(a)}$ lorsque $\sin(a) \neq 0$, i.e. a réel non multiple de π . Donc

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \prod_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2^k}\right)} = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)},$$

en observant un "produit télescopique". En utilisant enfin $\sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$, on déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\right) = \frac{\sin(x)}{x},$$

puis, par continuité de la fonction logarithme, $S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$.

12*. Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ pour tout n .

a. Montrer que la série de terme général $\frac{u_n}{S_{n-1}}$ est de même nature que la série $\sum u_n$.

En cas de divergence de cette dernière, on écrira un encadrement de l'intégrale $\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t}$.

b. On suppose que la série $\sum u_n$ diverge. Montrer que, pour tout $\alpha > 1$, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.

c. On suppose que la série $\sum u_n$ converge, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ pour tout n . Montrer que la série de terme général $\frac{u_n}{R_n}$ est divergente.

a. • Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, notons S sa somme. On a alors $\frac{u_n}{S_{n-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{S}$, donc la série

$\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{S_{n-1}}$ est de même nature que $\sum u_n$, donc convergente.

- Supposons la série $\sum u_n$ divergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante sur $[S_{n-1}, S_n]$, on a l'encadrement

$$\frac{u_n}{S_n} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t} \leq \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{u_n}{S_{n-1}}.$$

L'inégalité de gauche ne sert à rien, mais la série de terme général $v_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t}$ diverge: en effet, il s'agit d'une série télescopique puisque $v_n = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$. Or, la suite de terme général $\ln(S_n)$ diverge (elle tend vers $+\infty$), la série télescopique associée $\sum v_n$ diverge donc aussi, puis la série $\sum \frac{u_n}{S_{n-1}}$ est aussi divergente, par comparaison de séries à termes positifs.

- b. Reprenons les mêmes idées. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ étant décroissante sur $[S_{n-1}, S_n]$, on a l'inégalité

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

La série de terme général $v_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} (S_{n-1}^{1-\alpha} - S_n^{1-\alpha})$ converge puisque la suite $(S_n^{1-\alpha})$ est convergente (de limite nulle). On déduit, par comparaison de séries à termes positifs, que la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.

Remarque. Avec $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ est en fait toujours convergente, le cas où la série $\sum u_n$ converge étant immédiat à traiter.

- c. On ne change pas vraiment une équipe qui gagne! La suite (R_n) est positive décroissante et tend vers 0. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t} \leq \frac{R_{n-1} - R_n}{R_n} = \frac{u_n}{R_n}.$$

La série de terme général $\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t} = \ln(R_{n-1}) - \ln(R_n)$ diverge car $\ln(R_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{u_n}{R_n}$ est aussi divergente.

Séries à termes quelconques. Convergence absolue.

13. On rappelle le développement asymptotique $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

- a. Soit $u_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{3k-1}{3k} \right)$. Montrer qu'il existe des constantes a et b telles que

$$\ln(u_n) = a \ln(n) + b + o(1) .$$

- b.** En déduire la nature de la série de terme général u_n .

- a.** On a

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{3k}\right) = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{3k} + r_k\right) ,$$

avec $r_k = \ln\left(1 - \frac{1}{3k}\right) + \frac{1}{3k} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. La série $\sum_{k \geq 1} r_k$ est donc convergente, notons R sa somme. Alors

$$\ln(u_n) = -\frac{1}{3}H_n + \sum_{k=1}^n r_k = -\frac{1}{3}\left(\ln(n) + \gamma + o(1)\right) + \left(R + o(1)\right) .$$

On obtient donc le développement demandé avec $a = -\frac{1}{3}$ et $b = R - \frac{\gamma}{3}$.

- b.** On a donc $u_n = e^{\ln(u_n)} = e^{a \ln(n)} e^b e^{o(1)}$. Le facteur $e^{o(1)}$ tend vers 1, on peut donc écrire $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^b n^a$, soit $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{n^{1/3}}$ avec $K > 0$. Par comparaison à une série de Riemann, on déduit la divergence de la série $\sum u_n$.

14.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier relatif pair.

- b.** En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \sin((2 + \sqrt{3})^n \pi)$.

- a.** On développe par la formule du binôme de Newton:

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (\sqrt{3})^k + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k} (\sqrt{3})^k \\ &= 2 \sum_{p=0}^N \binom{n}{2p} 2^{n-2p} 3^p \end{aligned}$$

en posant $N = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, et en réindexant avec $p = 2k$ puisque seuls les termes d'indices pairs apportent une contribution. Les coefficients binomiaux étant des entiers naturels, on observe que le résultat est un entier relatif pair que nous noterons $2K_n$ avec $K_n \in \mathbb{Z}$.

- b.** La fonction sinus étant 2π -périodique et impaire, on peut écrire

$$u_n = \sin(2K_n \pi - (2 - \sqrt{3})^n \pi) = -\sin((2 - \sqrt{3})^n \pi) .$$

Comme $|2 - \sqrt{3}| < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((2 - \sqrt{3})^n \pi) = 0$ et, en utilisant l'équivalent usuel $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on a $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -(2 - \sqrt{3})^n \pi$, d'où la convergence absolue de la série de terme général u_n (comparaison à une série géométrique convergente).

15. Déterminer la nature des séries suivantes et, en cas de convergence, calculer leur somme :

a) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$; b) $\sum_{n \geq 1} (\ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2))$ avec a et b réels.

a. Posons $u_n = \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$. On a $u_n \sim \frac{1}{9n^2}$, ce qui assure déjà la convergence de la série.

Décomposons en éléments simples : $u_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3(n+1)+1} \right)$.

Si l'on note S_n la somme partielle d'ordre n , on observe un télescopage :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{3k+1} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{3(k+1)+1} \right) = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{3k+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{3k+1} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+4} \right).$$

Il s'ensuit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{3}$.

b. Posons $u_n = \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$, et cherchons-en un équivalent!

En utilisant le DL "fort" à l'ordre un en zéro de $\ln(1+x)$, soit $\ln(1+x) = x + O(x^2)$, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= (1+a+b) \ln(n) + a \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + b \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \\ &= (1+a+b) \ln(n) + a \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + b \left(\frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= (1+a+b) \ln(n) + \frac{a+2b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

On en déduit la discussion suivante:

- si $a+b+1 \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$, la série est donc grossièrement divergente ;

- si $a+b+1 = 0$ et $a+2b \neq 0$, alors $u_n \sim (a+2b) \frac{1}{n}$. Par comparaison à la série harmonique, on déduit que $\sum u_n$ diverge. *Le critère des équivalents s'applique car l'équivalent trouvé montre que u_n reste de signe constant à partir d'un certain rang.*

- si $a+b+1 = 0$ et $a+2b = 0$, alors $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série $\sum u_n$ est alors absolument convergente.

Bilan. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a = -2$ et $b = 1$.

Posons donc maintenant $u_n = \ln n - 2 \ln(n+1) + \ln(n+2)$. On constate que $u_n = v_n - v_{n+1}$ en posant $v_n = \ln(n) - \ln(n+1)$, on reconnaît donc une série télescopique. Si on note S_n sa somme partielle d'ordre n , on a

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (v_k - v_{k+1}) = v_1 - v_{n+1} = \ln(n+2) - \ln(n+1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln(2).$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\ln(2)$, c'est-à-dire $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln(2)$.

16. Déterminer la nature des séries $\sum_n u_n$ dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = \sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1}$; b) $u_n = \ln n \cdot \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$; c) $\sin \left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$.

a. On recherche un équivalent de u_n en écrivant

$$u_n = n \left(\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{1/3} - \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \right) = n \left(1 + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right),$$

donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$. Comme on travaille ici sur des séries dont le terme général est de signe constant, ces deux séries sont de même nature, donc $\sum u_n$ diverge.

b. En utilisant le DL: $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ lorsque x tend vers zéro, on obtient

$$u_n = v_n + w_n, \text{ avec } v_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \text{ et } w_n = -\frac{1}{2} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \frac{\ln(n)}{n}.$$

La série $\sum v_n$ converge en vertu du théorème spécial des séries alternées, puisque la suite $\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)$ décroît à partir d'un certain rang (étudier la fonction associée) et tend vers zéro. Pour la série $\sum w_n$ (dont les termes sont négatifs APCR), le critère des équivalents s'applique ; or, la série $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ diverge puisque $\frac{\ln(n)}{n} > \frac{1}{n}$, donc $\sum w_n$ diverge. Finalement, $\sum u_n$ diverge.

c. En écrivant $n^2 = (n-1)(n+1) + 1$, on obtient

$$u_n = \sin \left((n-1)\pi + \frac{\pi}{n+1} \right) = (-1)^{n+1} \sin \left(\frac{\pi}{n+1} \right).$$

Or, la suite $\left(\sin \left(\frac{\pi}{n+1} \right) \right)$ est décroissante et tend vers 0, donc $\sum u_n$ converge.

17. Donner un développement limité de $f : x \mapsto \frac{\sin x}{1+x}$ sous la forme $f(x) = a + bx + cx^2 + O(x^3)$.

En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$, avec $u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{(-1)^n + \sqrt{n}}$.

Écrivons $\frac{\sin x}{1+x} = (\sin x)(1+x)^{-1}$ et développons chacun des facteurs à l'ordre deux au voisinage de zéro :

$$\frac{\sin x}{1+x} = (x + O(x^3)) (1 - x + x^2 + O(x^3)) = x - x^2 + O(x^3).$$

Notons à ce sujet que, d'après la formule de Taylor-Young, toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle contenant 0 admet en ce point un développement limité à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, que l'on peut écrire $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$, mais qui peut s'écrire aussi $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + O(x^{n+1})$, ce qui donne une information un peu plus précise sur le comportement du reste.

En divisant numérateur et dénominateur par $\sqrt{n}$ et en utilisant le fait que la fonction sinus est impaire, on peut écrire

$$u_n = \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = f\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$, le DL ci-dessus fournit un développement asymptotique de u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = x_n + y_n + z_n :$$

la série de terme général $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (*critère spécial des séries alternées*), la série de terme général $z_n = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge absolument (*comparaison à une série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2}$, convergente*) ; par contre, la série de terme général $y_n = -\frac{1}{n}$ est divergente. On en déduit que $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

18. Nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$, avec $u_n = (-1)^n \left(\operatorname{Arccos} \frac{1}{n} - \operatorname{Arccos} \frac{1}{n^2} \right)$.

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ tendent vers zéro, on aura sûrement des renseignements sur le comportement asymptotique du terme général u_n en partant d'une étude locale de la fonction Arccos au voisinage de 0. Vous ne connaissez pas son DL ? Pas grave, on connaît la dérivée : sur $] -1, 1[$, la fonction Arccos est dérivable et $(\operatorname{Arccos})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On peut donc développer cette dérivée :

$$(\operatorname{Arccos})'(x) = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right),$$

donc, par intégration de ce DL (en n'oubliant pas la constante!), on a le DL :

$$\operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad \text{en fait on se contentera de } \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - x + o(x^2).$$

On a alors

$$u_n = (-1)^n \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - \left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$, comme somme de deux séries convergentes

(la première par le critère des séries alternées, la deuxième absolument convergente par comparaison à une série de Riemann).

19. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$.

a. Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge.

b. Exprimer la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$, puis la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ sous forme d'intégrales.

c. Calculer S . On pourra utiliser le changement de variable $t = \cos(2u)$.

a. On a $0 \leq a_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Par ailleurs,

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^1 t^n (t-1) \sqrt{1-t^2} dt \leq 0,$$

la suite (a_n) est donc décroissante. Par le critère spécial des séries alternées, on déduit que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge.

b. Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k t^k \right) \sqrt{1-t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 - (-t)} \sqrt{1-t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t} dt + R_n, \end{aligned}$$

en posant $R_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1} \sqrt{1-t^2}}{1+t} dt$ (on aura reconnu, en effet, une série géométrique

de raison $-t$). Enfin, sur $[0, 1]$, on a $\sqrt{1-t^2} \leq 1$ et $1+t \geq 1$ donc $\frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t} \leq 1$, d'où

$|R_n| \leq \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{1}{n+2}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$, ce qui montre que

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t} dt.$$

- c. Calculons $S = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt$. Différents changements de variable sont envisageables pour calculer cette intégrale, par exemple poser $t = \cos 2u$, soit $u = \frac{1}{2} \operatorname{Arccos} t$. Le lecteur expert en trigonométrie s'assurera que l'on obtient ainsi $S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 u du$, il ne reste plus qu'à linéariser $\sin^2 u$, et finalement $S = \frac{\pi}{2} - 1$.

20. Soit x un réel non multiple de 2π . On pose $S_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$.

- a. Montrer que la suite (S_n) est bornée.
b. En remarquant que $\cos(nx) = S_n - S_{n-1}$, montrer que la série de terme général $u_n = \frac{\cos(nx)}{n}$ est convergente.
c. En exploitant l'inégalité $|\cos(\theta)| \geq \cos^2(\theta)$, montrer la divergence de la série $\sum |u_n|$.

- a. Un calcul classique, utilisant l'exponentielle complexe, donne $S_n = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Donc $|S_n| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$ et la suite (S_n) est bornée.

- b. Exprimons une somme partielle de la série à étudier:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{S_{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} = -S_0 + \frac{S_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) S_k \\ &= \frac{S_n}{n} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)}. \end{aligned}$$

De a., on déduit que $\frac{S_k}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$, la série de terme général $\frac{S_k}{k(k+1)}$ est donc convergente. Comme (S_n) est bornée, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 0$. Les sommes partielles $\sum_{k=1}^n u_k$ admettent donc une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, ce qu'il fallait démontrer.

- c. On a $|u_n| = \frac{|\cos(nx)|}{n} \geq \frac{\cos^2(nx)}{n} = \frac{1 + \cos(2nx)}{2n}$. Distinguons deux cas:

- si x est multiple de π , on a $|u_n| = \frac{1}{n}$, d'où la divergence ;

- sinon, la série $\sum \frac{\cos(2nx)}{2n}$ converge d'après **b.**, alors que $\sum \frac{1}{2n}$ diverge. Par somme, la série à termes positifs $\sum \frac{1 + \cos(2nx)}{2n}$ diverge, puis $\sum |u_n|$ diverge par comparaison.

21*.a. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0$.

b. Soit $x \in]0, 2\pi[$, soit n un entier naturel non nul. Prouver l'identité

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{ikx} - e^{ik\pi}}{ik} = -\frac{1}{2i} \int_{\pi}^x \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin \frac{t}{2}} (1 - e^{int}) dt .$$

c. Convergence et somme de $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k}$.

a. Par une i.p.p., on obtient

$$\int_a^b f(t) e^{int} dt = \frac{1}{in} \left(\left[f(t) e^{int} \right]_a^b - \int_a^b f'(t) e^{int} dt \right) ,$$

d'où la majoration $\left| \int_a^b f(t) e^{int} dt \right| \leq \frac{C}{n}$, avec par exemple

$$C = |f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)| dt ,$$

et la conclusion en découle.

b. Calculons:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{e^{ikx} - e^{ik\pi}}{ik} &= \sum_{k=1}^n \int_{\pi}^x e^{ikt} dt = \int_{\pi}^x e^{it} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikt} \right) dt \\ &= \int_{\pi}^x e^{it} \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}} dt = \int_{\pi}^x e^{i\frac{t}{2}} \frac{1 - e^{int}}{-2i \sin \frac{t}{2}} dt , \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

c. Soit $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{e^{ikx}}{k}$ la somme partielle d'ordre n . D'après **b.**, on peut écrire

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\pi}}{k} - \frac{1}{2} \int_{\pi}^x \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin \frac{t}{2}} dt + \frac{1}{2} \int_{\pi}^x \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin \frac{t}{2}} e^{int} dt \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{2} \int_{\pi}^x \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt - \frac{1}{2} i(x - \pi) + \frac{1}{2} \int_{\pi}^x \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{\sin \frac{t}{2}} e^{int} dt . \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, la dernière intégrale tend vers 0 d'après **a.** puisque la fonction $t \mapsto \frac{e^{\frac{it}{2}}}{\sin \frac{t}{2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\pi, x]$ ou $[x, \pi]$. Il est classique (!?) que la série

harmonique alternée converge et a pour somme $\ln(2)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \right) = \ln(2)$,

on en déduit la convergence de la suite $(S_n(x))$ et

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = -\ln(2) - \ln \left(\sin \frac{x}{2} \right) - \frac{i}{2} (x - \pi).$$

Ainsi, pour $x \in]0, 2\pi[$, on a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{k} = -\ln(2) - \ln \left(\sin \frac{x}{2} \right)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}$.

Autres exercices sur les séries.

22. On note l^1 l'ensemble des suites réelles **sommables**, c'est-à-dire des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ soit absolument convergente.

On note l^2 l'ensemble des suites réelles **de carré sommable**, c'est-à-dire des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ soit (absolument) convergente.

- a. Montrer que l^1 est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- b. Montrer que $l^1 \subset l^2$, et montrer que cette inclusion est stricte.
- c. Soient $u \in l^2$, $v \in l^2$. Montrer que $uv \in l^1$, où uv est la suite réelle définie par $(uv)_n = u_n v_n$.
- d. En déduire que l^2 est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- e. Pour $u \in l^2$, $v \in l^2$, on pose $\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur l^2 .

- a. On a $0 \in l^1$ donc $l^1 \neq \emptyset$. Si $u \in l^1$, il est clair que $\lambda u \in l^1$ pour tout λ réel. Enfin, si u et v sont dans l^1 , alors les séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ sont convergentes donc la série $\sum (|u_n| + |v_n|)$ converge ; de l'inégalité triangulaire $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$, on déduit, par comparaison de séries à termes positifs, que $u + v \in l^1$. L'ensemble l^1 est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- b. Si $u \in l^1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on a donc $|u_n| \leq 1$ à partir d'un certain rang. Pour n assez grand, il vient alors $0 \leq u_n^2 \leq |u_n|$. Par comparaison de séries à termes positifs, on déduit que $\sum u_n^2$ converge. On a ainsi prouvé l'inclusion $l^1 \subset l^2$. L'inclusion est stricte puisque la suite u définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ est de carré sommable, mais n'est pas sommable.

c. On a $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$, conséquence de l'identité remarquable

$$(|u_n| - |v_n|)^2 = u_n^2 - 2|u_n||v_n| + v_n^2 \geq 0.$$

Si u et v appartiennent à l^2 , on obtient ainsi que la série $\sum |u_n v_n|$ converge, donc $uv \in l^1$.

d. On a $0 \in l^2$ donc $l^2 \neq \emptyset$. Si $u \in l^2$, il est clair que $\lambda u \in l^2$ pour tout λ réel. Enfin, si u et v sont dans l^2 , alors la série $\sum u_n v_n$ converge (absolument) d'après c., et de $(u_n + v_n)^2 = u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2$, on déduit que la série $\sum (u_n + v_n)^2$ est convergente, donc $u + v \in l^2$. Ainsi, l^2 est bien un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

e. Si u et v sont dans l^2 , alors la série $\sum u_n v_n$ converge d'après c., donc $\langle u, v \rangle$ est bien défini. Le caractère bilinéaire de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une formalité. On a $\langle u, u \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \geq 0$ et, si cette expression est nulle, alors tous les termes sont nuls (*somme de termes positifs*), donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 0$, soit $u = 0$. On a ainsi prouvé le caractère défini positif, on a bien affaire à un produit scalaire sur l'espace vectoriel l^2 .

23*. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes, on suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et que

la suite (v_n) est sommable. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = 0$.

La suite (u_n) est bornée car elle est convergente. Notons $U = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

Posons par ailleurs $S = \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|$.

Donnons-nous $\varepsilon > 0$, il existe alors un rang N à partir duquel $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2S}$. Le cas $S = 0$ ne se produit que si (v_n) est la suite nulle, auquel cas l'exercice est trivial. Pour $n \geq N$, on a alors

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right| &\leq \left| \sum_{k=0}^{N-1} u_k v_{n-k} \right| + \left| \sum_{k=N}^n u_k v_{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} |u_k| |v_{n-k}| + \sum_{k=N}^n |u_k| |v_{n-k}| \\ &\leq U \sum_{k=0}^{N-1} |v_{n-k}| + \frac{\varepsilon}{2S} \sum_{k=N}^n |v_{n-k}| \\ &\leq U \sum_{k=0}^{N-1} |v_{n-k}| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

puisque $\sum_{k=N}^n |v_{n-k}| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} |v_j| = S$.

Enfin, $\sum_{k=0}^{N-1} |v_{n-k}| = \sum_{j=n-N+1}^n |v_j| \leq \sum_{j=n-N+1}^{+\infty} |v_j| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ puisque le reste d'ordre n d'une série convergente tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Il existe donc un entier N' tel que, pour tout $n \geq N'$, on ait $\sum_{k=0}^{N-1} |v_{n-k}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq \max\{N, N'\}$, on a alors

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right| \leq \varepsilon, \text{ ce qui prouve que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = 0.$$

24. On admet le développement asymptotique $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

a. En déduire la somme de la série harmonique alternée

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

b. On modifie l'ordre des termes de cette dernière série de la façon suivante:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} + \dots$$

Montrer que la nouvelle série obtenue converge et calculer sa somme.

a. Notons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ la somme partielle d'ordre n de cette nouvelle série. On a alors

$$S_{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \left(H_{2n} - \frac{1}{2}H_n\right) - \frac{1}{2}H_n = H_{2n} - H_n,$$

d'où le développement asymptotique

$$S_{2n} = (\ln(2n) + \gamma + o(1)) - (\ln(n) + \gamma + o(1)) = \ln(2) + o(1),$$

soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \ln(2)$. Comme $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \ln(2)$,

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(2)$, soit $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

b. Notons u_k le k -ème terme de cette série, ainsi $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{3}$, $u_3 = -\frac{1}{4}$, $u_4 = \frac{1}{5}$, etc. et posons $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$ la somme partielle d'ordre n . Ainsi,

$$U_{3n} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} + \dots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1}\right) - \frac{1}{2n}.$$

On a alors $U_{3n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \left(H_{4n} - \frac{1}{2}H_{2n}\right) - \frac{1}{2}H_n$, donc

$$U_{3n} = \ln(4n) + \gamma - \frac{1}{2}(\ln(2n) + \gamma + \ln(n) + \gamma) + o(1) = \frac{3}{2}\ln(2) + o(1).$$

Comme en **b.**, on conclut que la somme de la série proposée est $U = \frac{3}{2}\ln(2)$.

- 25.** On étudie la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. **a.** Quelle est sa nature ?
- b.** On note S la somme de la série, et on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ ses sommes partielles. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$.
- c.** Avec Python, trouver n tel que $S_n \leq S \leq S_n + 10^{-4}$.
- d.** Représenter les points de coordonnées (n, S_n) pour $n \leq 200$.
- e.** On permute les termes: $T_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots$ (n termes), en alternant un terme positif, deux termes négatifs, dans l'ordre. Représenter les points (n, T_n) avec $n \leq 200$.
- f.** Même question avec deux termes positifs puis un négatif.

- a.** C'est une série alternée vérifiant les hypothèses du théorème spécial: la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{k \geq 1}$ décroît et tend vers zéro. La série est donc convergente.
- b.** Posons $u_k = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, alors $S - S_{2n} = R_{2n}$ est du même signe que "le premier terme négligé" u_{2n+1} , donc est positif, cela donne l'inégalité $S_{2n} \leq S$. De même, $S - S_{2n+1} = R_{2n+1}$ est du signe de u_{2n+2} donc est négatif, donc $S \leq S_{2n+1}$.
- c.** L'encadrement de S recherché est vrai pour tout n pair dès que (*condition suffisante*) $|u_{n+1}| \leq 10^{-4}$, i.e. dès que $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 10^{-4}$, i.e. dès que $n \geq 10^8 - 1$ en utilisant l'encadrement obtenu en **b**.