DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 1

PSI2 2025-2026 **à rendre le 25/09/2025**

PROBLÈME 1

Définitions :

Soit (a_n) une suite de réels **non nuls**. On dit que “ le **produit infini** $\prod_{n\geq 0} a_n$ est convergent” si la suite (P_n) définie par $P_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$ admet une limite réelle **non nulle**. Dans ce cas, on note alors $\prod_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} P_n$. Pour tout entier naturel n, le réel P_n est appelé **produit partiel d'ordre** n et, en cas de convergence, le réel $P = \lim_{n\to+\infty} P_n$ est aussi appelé **produit infini** des a_n.

Remarque. L'indice de départ de la multiplication ne sera pas toujours 0, il est facile d'adapter.

PARTIE A. Étude de produits infinis

A.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$. Calculer les produits partiels P_n correspondants ($n \geq 1$). Le produit infini $\prod_{n\geq 1} a_n$ est-il convergent ?

A.2. Montrer qu'une condition nécessaire pour que le produit infini $\prod_{n\geq 0} a_n$ soit convergent est que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$. La condition est-elle suffisante ?

A.3. On considère les produits infinis

$$P = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) \qquad ; \qquad Q = \prod_{k=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Exprimer les produits partiels P_{2n}, P_{2n+1} et Q_n. En déduire la convergence des deux produits infinis considérés et leur valeur.

A.4. Dans cette question, on pose $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que l'on peut écrire $\ln(a_n) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - r_n$ et préciser un équivalent de r_n.

b. En déduire la nature de la série de terme général $\ln(a_n)$.

c. Quelle est la nature du produit infini $\prod_{n\geq 1} a_n$? *On précisera la limite de* $P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

A.5. Soit (u_n) une suite de réels **positifs**.

a. Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n \ln(1 + u_n)$ sont de même nature.

b. Montrer que le produit infini $\prod (1 + u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

A.6.a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2n}$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge, mais que le produit infini $\prod_{n\geq 1} (1 + u_n)$ converge.

b. Proposer une suite réelle $(v_n)_{n\geq 1}$ telle que $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge, mais $\prod_{n\geq 1} (1 + v_n)$ diverge.

PARTIE B. Une équation fonctionnelle

B.1. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]-\pi,\pi[$, soit le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 1} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

a. En utilisant la relation de trigonométrie $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$, simplifier l'expression du produit partiel $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ pour n entier naturel non nul.

b. En déduire la convergence du produit infini considéré et préciser sa valeur, notée $P(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n(x)$.

B.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est continue en 0 et qu'elle vérifie la relation fonctionnelle

$$\textbf{(E):} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(2x) = f(x)\,\cos(x)\ .$$

a. Soit $x \in]-\pi,\pi[$. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) P_n(x)$. En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x et du nombre $a = f(0)$.

b. Montrer par récurrence sur l'entier naturel p que l'expression de $f(x)$ obtenue à la question **B.2.a.** ci-dessus reste valable pour tout x appartenant à l'intervalle $]-2^p\pi\,,\,2^p\pi[$.

c. Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues en 0 et solutions de **(E)** ?

PROBLÈME 2

Une introduction aux séries de Fourier

Pour n entier naturel et t réel, on pose $D_n(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$.

1. Vérifier la relation $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi$ pour tout n entier naturel.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et t réel non multiple de 2π, prouver que

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\ .$$

3. Soit $h : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que l' intégrale $I_\alpha = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} h(u)\sin(\alpha u)\mathrm{d}u$ tend vers 0 lorsque le réel α tend vers $+\infty$.

On considère maintenant une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π-périodique. Pour tout k entier relatif, on pose

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(un \textbf{coefficient de Fourier})}\ .$$

4. Pour n entier naturel et t réel, prouver la relation

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\,e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t-u)\,D_n(u)\,\mathrm{d}u\ .$$

5. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\, e^{ikt} - g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_t(u)\, \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right) u\right) \mathrm{d}u,$

où h_t est une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$ que l'on explicitera.

6. Montrer que la fonction h_t est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi, \pi]$.

7. Montrer que, pour tout t réel, les séries numériques $\displaystyle\sum_{n\geq 0} c_n(g)\, e^{int}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} c_{-n}(g)\, e^{-int}$ sont convergentes, et prouver la relation

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(g)\, e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(g)\, e^{-int}\ .$$

On a ainsi obtenu le **développement en série de Fourier** *de la fonction g, que l'on écrira*

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)\, e^{int}\ .$$

EXERCICE

On note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

Pour tout endomorphisme f de l'espace vectoriel E, on note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f, i.e. $C(f) = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\big\}$.

De la même façon, si A est une matrice carrée d'ordre n, on notera $C(A)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n qui commutent avec A, i.e. $C(A) = \big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\big\}$.

1. Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, l'ensemble $C(f)$ est une sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, et qu'il est stable par la loi $\circ$ de composition.

2.a. Soit A une matrice carrée d'ordre n. Montrer l'équivalence

$$C(A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad A\, E_{i,j} = E_{i,j}\, A\ ,$$

où l'on note $E_{i,j}$ la “matrice élémentaire” dont le coefficient d'indices (i,j) vaut 1 et tous les autres sont nuls.

b. En déduire que $C(A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si A est une “matrice scalaire” (c'est-à-dire de la forme $A = \lambda\, I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

c. Quels sont les endomorphismes $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $C(f) = \mathcal{L}(E)$?

3. On suppose dans cette question que l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est **nilpotent d'indice** n, c'est-à-dire que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

a. Montrer qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $\mathcal{B} = \big(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0)\big)$ soit une base de E.

b. Écrire la matrice A de l'endomorphisme f dans une telle base $\mathcal{B}$.

c. Décrire les matrices A^k, pour k entier de 0 à $n-1$.

d. Montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \cdots, A^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

e. Montrer que $C(f) = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, f, f^2, \cdots, f^{n-1})$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $C(f)$?