

CORRIGÉ du D.S. de MATHÉMATIQUES numéro 1
PSI2 2025-2026

PROBLÈME 1 *d'après Centrale 2024, filière PC*

PARTIE A. Formules de Taylor

A.1. Initialisation: pour $n = 0$, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, il résulte du **théorème fondamental de l'analyse** que $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$, ce qu'il fallait prouver.

Hérédité: Supposons la formule vraie pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^{n+2}$. Alors f est a fortiori de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, l'hypothèse de récurrence donne donc la relation

$$(*) : \quad f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt .$$

On effectue alors une intégration par parties dans le "reste intégral" en posant

$$\begin{cases} u(t) = f^{(n+1)}(t) \\ v'(t) = \frac{(b-t)^n}{n!} \end{cases} , \quad \text{soit} \quad \begin{cases} u'(t) = f^{(n+2)}(t) \\ v(t) = -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases} , \quad \text{ainsi}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} dt . \end{aligned}$$

En réinjectant dans (*), on obtient la formule voulue au rang $n+1$.

A.2. Comme f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, la fonction $|f^{(n+1)}|$ est continue sur le segment $[a, b]$, d'où l'existence de M_{n+1} par le **théorème des bornes atteintes**. Il suffit alors de majorer **en valeur absolue** le reste intégral obtenu en **A.1.**:

$$\left| \int_a^b \frac{(b-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \right| \leq \int_a^b \frac{(b-t)^n |f^{(n+1)}(t)|}{n!} dt \leq M_{n+1} \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} dt = \frac{M_{n+1} (b-a)^{n+1}}{(n+1)!} ,$$

ce qu'il fallait prouver.

A.3. La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$. Par une récurrence facile, on obtient $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$. En particulier, $f(0) = 0$ et, pour

$$k \text{ entier naturel non nul, } \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k} .$$

Par ailleurs, $M_{n+1} = \max_{x \in [0, 1]} |f^{(n+1)}(x)| = n!$, l'inégalité de Taylor-Lagrange ci-dessus donne alors, pour tout n entier naturel, la majoration

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \right| = \left| f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (1-0)^k \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} .$$

En notant $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$ la somme partielle d'ordre n de la **série harmonique alternée**, on vient de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(2) - S_n) = 0$, la série mentionnée est donc convergente (ce qui résulte aussi du **théorème spécial des séries alternées**) et sa somme est

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(2) .$$

PARTIE B. La méthode de Héron

B.1. C'est clair pour $n = 0$, et l'hérédité est immédiate aussi!

B.2. On calcule

$$\begin{aligned}c_{n+1}(a)^2 - a &= \frac{1}{4} \left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)} \right)^2 - a = \frac{1}{4} \left(c_n(a)^2 - 2a + \frac{a^2}{c_n(a)^2} \right) \\&= \frac{1}{4 c_n(a)^2} \left(c_n(a)^4 - 2a c_n(a)^2 + a^2 \right).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_{n+1}(a)^2 - a = \frac{(c_n(a)^2 - a)^2}{4 c_n(a)^2} \geq 0,$$

donc (décalage d'indice) $c_n(a)^2 \geq a$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et, comme $c_n(a)$ et $\sqrt{a}$ sont des réels positifs, $c_n(a) \geq \sqrt{a}$.

B.3. On observe que, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$c_{n+1}(a) - c_n(a) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c_n(a)} - c_n(a) \right) = \frac{1}{2 c_n(a)} (a - c_n(a)^2) \leq 0,$$

la suite $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante à partir du rang 1. Comme elle est minorée (par 0, ou encore par $\sqrt{a}$), elle est convergente. Sa limite l est positive et vérifie l'équation "aux points fixes" $l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{a}{l} \right)$, soit $l^2 = a$, donc $l = \sqrt{a}$.

B.4. On a $c_1(2) = \frac{3}{2}$, et on prouve la majoration demandée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

- pour $n = 1$, on a $c_1(2)^2 - 2 = \frac{1}{4} = 8 \times \left(\frac{1}{32} \right)^{2^0}$, l'inégalité à prouver est donc alors une égalité ;

- si l'inégalité est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ donné alors, en utilisant la minoration $c_n(2)^2 \geq 2$,

$$c_{n+1}(2)^2 - 2 \leq \frac{(c_n(2)^2 - 2)^2}{4 c_n(2)^2} \leq \frac{1}{8} \left(8 \times \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \right)^2 = 8 \times \left(\frac{1}{32} \right)^{2^n},$$

ce qui prouve l'hérédité.

B.5. Enfin, en utilisant toujours $c_n(2) \geq \sqrt{2}$,

$$0 \leq c_n(2) - \sqrt{2} = \frac{c_n(2)^2 - 2}{c_n(2) + \sqrt{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \times 8 \times \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}},$$

ce qui donne bien l'estimation annoncée.

En observant que, pour $n = 6$, le nombre $8 \times \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}$ majorant l'erreur est de l'ordre de 10^{-48} , on voit que la méthode de Héron converge très très rapidement.

PARTIE C. La méthode de Newton

C.1. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite $\mathcal{T}$ d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Elle rencontre l'axe Ox au point d'abscisse $x = b$ annulant y dans l'équation précédente, soit $f(a) + f'(a)(b - a) = 0$, donc $b = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$.

C.2. Si f admettait un autre zéro d dans I , disons avec $c < d$, le **théorème de Rolle** affirmerait que la dérivée f' s'annule quelque part dans l'intervalle $]c, d[$, ce qui est contraire aux hypothèses.

C.3. Si $r \in [0, \rho]$, alors $J_r \subset J_\rho \subset I$ et les fonctions $|f'|$ et $|f''|$ sont **continues** sur le **segment** J_r , d'où l'existence de s_r et de i_r par le **théorème des bornes atteintes**. Comme la valeur i_r "est atteinte", i.e. il existe $x \in J_r$ tel que $|f'(x)| = i_r$ et comme f' ne s'annule pas sur I , on a bien $I_r > 0$.

C.4. Si $r' \leq r''$, alors $J_{r'} \subset J_{r''}$, d'où il résulte immédiatement que $s_{r'} \leq s_{r''}$ et que $0 < i_{r''} \leq i_{r'}$, donc par manipulation d'inégalités entre réels positifs,

$$K_{r'} = \frac{s_{r'}}{2 i_{r'}} \leq \frac{s_{r''}}{2 i_{r''}} = K_{r''} ,$$

la fonction $r \mapsto K_r$ est donc croissante sur $[0, \rho]$. On a alors

$$\forall r \in [0, \rho] \quad 0 \leq r K_r \leq \rho K_\rho$$

et cet encadrement montre que $\lim_{r \rightarrow 0^+} r K_r = 0$. En prenant $r > 0$ "assez petit", on aura alors $r K_r < 1$.

C.5. Comme $f(c) = 0$, on observe que

$$|c_{n+1} - c| = \left| c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)} - c \right| = \left| \frac{(c_n - c) f'(c_n) - f(c_n)}{f'(c_n)} \right| = \frac{|f(c) - (f(c_n) + (c - c_n) f'(c_n))|}{|f'(c_n)|} .$$

On minore le dénominateur par i_r et l'inégalité de Taylor-Lagrange permet de majorer le numérateur par $\frac{s_r}{2} (c_n - c)^2$. On obtient finalement

$$|c_{n+1} - c| \leq \frac{s_r}{2 i_r} (c_n - c)^2 = K_r |c_n - c|^2 .$$

Comme $c_n \in J_r$, on a $|c_n - c| \leq r$, puis $|c_{n+1} - c| \leq K_r r |c_n - c| \leq |c_n - c| \leq r$ puisque $r K_r < 1$, et ceci prouve que $c_{n+1} \in J_r$.

C.6. La question précédente montre que, si $c_0 \in J_r$, c_n est bien défini pour tout n et $c_n \in J_r$.

Pour $n = 0$, l'inégalité à prouver est immédiate et c'est alors une égalité.

Si l'inégalité est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ donné, alors

$$|c_{n+1} - c| \leq K_r \frac{(K_r |c_0 - c|)^{2^{n+1}}}{K_r^2} = \frac{(K_r |c_0 - c|)^{2^{n+1}}}{K_r} ,$$

on a donc prouvé l'hérédité.

Comme $K_r |c - c_0| \leq r K_r < 1$, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (c_n - c) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = c$ et cette convergence est très rapide (beaucoup plus rapide qu'une suite géométrique grâce à l'exposant 2^n).

C.7. Il suffit de prendre $I = \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \mapsto x^2 - a$ et on retrouve la suite $(c_n(a))$ de la partie **B**.

PROBLÈME 2

PARTIE A.

A.1. On intègre sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ une fonction continue, positive et non partout nulle, son intégrale W_n est donc strictement positive (**théorème de stricte positivité**). On écrit

$$W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t (1 - \sin^2 t) dt = W_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{2n} t \sin t) \sin t dt .$$

Une intégration par parties donne alors, avec $u(t) = \sin(t)$ et $v(t) = -\frac{\cos^{2n+1}(t)}{2n+1}$,

$$W_{n+1} = W_n + \left[\frac{\sin(t) \cos^{2n+1}(t)}{2n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{W_{n+1}}{2n+1} ,$$

ce qui conduit à la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (2n+2) W_{n+1} = (2n+1) W_n ,$$

ce qu'il fallait prouver.

A.2. On a $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$, puis $W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_n$, d'où

$$W_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} W_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

(multiplier numérateur et dénominateur par $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) = 2^n n!$).

NB. La réponse étant donnée, on peut aussi se contenter de vérifier par récurrence.

A.3. Comme en **A.1.**, en intégrant par parties, on trouve $(2n+3) W'_{n+1} = (2n+2) W'_n$ puis, avec $W'_0 = 1$ et comme en **A.2.**, on en déduit

$$W'_n = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} .$$

A.4. Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \cos t \leq 1$, d'où $\cos^{2n+2} t \leq \cos^{2n+1} t \leq \cos^{2n} t$. En intégrant ces inégalités sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient $W_{n+1} \leq W'_n \leq W_n$. On a donc $\frac{W_{n+1}}{W_n} \leq \frac{W'_n}{W_n} \leq 1$ pour tout n . D'autre part, $\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Le théorème d'encadrement donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W'_n}{W_n} = 1$, c'est-à-dire $W'_n \sim W_n$.

A.5. L'équivalence $W'_n \sim W_n$ s'écrit $\frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \sim \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2}$, ce qui peut encore s'écrire

$$\pi \sim 2 \times \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n)! (2n+1)!} = 2 \times \frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)} \sim \frac{2^{4n} (n!)^4}{n ((2n)!)^2} ,$$

c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{n ((2n)!)^2} = \pi$.

A.6.a. On calcule :

$$\begin{aligned} b_n - b_{n-1} &= \ln \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right) = \ln \left(\frac{n!}{(n-1)!} \times e \times \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} \times \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \ln \left[e \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n-\frac{1}{2}} \right] = 1 + \left(n - \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

b. Puis on développe (calculs laissés au lecteur ou à la lectrice), on obtient :

$$b_n - b_{n-1} = 1 + \left(n - \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

soit $b_n - b_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$.

c. En prenant l'expression opposée, on a $b_{n-1} - b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$. En vertu du critère des équivalents pour les séries à termes positifs, comme la série $\sum \frac{1}{12n^2}$ converge, on déduit la convergence de la série de terme général $b_{n-1} - b_n$, donc la série de terme général opposé $b_n - b_{n-1}$ est convergente. Comme c'est la série télescopique associée à la suite (b_n) , cette suite est donc convergente, c'est-à-dire admet une limite réelle B , puis par continuité de l'exponentielle, $a_n = e^{b_n}$ converge vers $A = e^B$, qui est un réel strictement positif.

A.7. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} = A$, ce qui s'écrit encore $n! \sim A \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$. En reportant dans la formule

de Wallis, on trouve $\frac{2^{4n} (n!)^4}{n ((2n)!)^2} \sim \frac{2^{4n} A^4 n^2 \left(\frac{n}{e} \right)^{4n}}{n A^2 (2n) \left(\frac{2n}{e} \right)^{4n}} = \frac{A^2}{2}$, et cette expression doit tendre

vers π lorsque n tend vers l'infini, donc $\frac{A^2}{2} = \pi$ et, A étant positif, $A = \sqrt{2\pi}$: on obtient la **formule de Stirling** (cette formule fait désormais partie de votre cours, mais doit être utilisée avec modération, c'est-à-dire uniquement en dernier recours) :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

A.8. La relation $u_n \sim v_n$ s'écrit aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$. Si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe alors un

rang N à partir duquel $\left| \frac{v_n}{u_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$, ce qui s'écrit encore $(1 - \varepsilon)u_n \leq v_n \leq (1 + \varepsilon)u_n$.

Pour $n \geq N$, par sommation de ces inégalités pour k allant de $n+1$ à l'infini (les séries sont supposées convergentes), on a alors $(1 - \varepsilon)R_n \leq R'_n \leq (1 + \varepsilon)R_n$. On a donc prouvé l'existence d'un rang N à partir duquel $\left| \frac{R'_n}{R_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$, et ceci quel que soit $\varepsilon > 0$, ce qui

montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R'_n}{R_n} = 1$, soit $R'_n \sim R_n$.

A.9. Pour tout $k \geq 2$, on a, par décroissance de l'application $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, l'encadrement

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}.$$

On somme pour k allant de $n+1$ à un certain entier naturel N (avec $N > n$):

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} = \int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}.$$

Enfin, on fait tendre N vers l'infini, cela donne $\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$. Comme les termes extrêmes sont équivalents entre eux, le théorème d'encadrement permet de conclure que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

A.10. En **A.6.**, on a obtenu $b_{n-1} - b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$. La question **A.8.** s'applique alors et montre

que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (b_{k-1} - b_k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{12k^2}$. En posant $B = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$, et en utilisant **A.9.**

et la transitivité de la relation d'équivalence, on a donc $b_n - B \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n}$, ce qui s'écrit aussi $b_n = B + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. En prenant l'exponentielle,

$$a_n = e^{b_n} = e^B \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Enfin,

$$n! = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n a_n = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

ce qui est le résultat attendu avec $C = \frac{1}{12}$.

PARTIE B.

B.1. Une première intégration par parties, avec $u'(t) = 1$ et $v(t) = \cos^{2n}(t)$, donne

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t) dt = \left[t \cos^{2n}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) \cos^{2n-1}(t) dt = 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) \cos^{2n-1}(t) dt.$$

Une deuxième intégration par parties, avec $u'(t) = t$ et $v(t) = \sin(t) \cos^{2n-1}(t)$, donne

$$\begin{aligned} W_n &= 2n \left[\frac{t^2}{2} \sin(t) \cos^{2n-1}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - n J_n + 2n \left(n - \frac{1}{2} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin^2(t) \cos^{2n-2}(t) dt \\ &= -n J_n + (2n^2 - n) (J_{n-1} - J_n). \end{aligned}$$

Finalement, la relation obtenue peut s'écrire $W_n = -2n^2 J_n + n(2n-1) J_{n-1}$.

B.2. Divisons par W_n la relation obtenue ci-dessus :

$$1 = -2n^2 \frac{J_n}{W_n} + n(2n-1) \frac{J_{n-1}}{W_{n-1}} \frac{W_{n-1}}{W_n} = -2n^2 \frac{J_n}{W_n} + 2n^2 \frac{J_{n-1}}{W_{n-1}}$$

(en tenant compte de la relation $\frac{W_{n-1}}{W_n} = \frac{2n}{2n-1}$, cf. question **A.1.**). Finalement,

$$\frac{1}{n^2} = 2 \left(\frac{J_{n-1}}{W_{n-1}} - \frac{J_n}{W_n} \right).$$

B.3.a. Sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction sinus est concave puisque sa dérivée seconde $-\sin$ est négative. Le graphe de la fonction sinus est alors, sur ce segment, situé au-dessus de sa sécante, ce qui se traduit par l'inégalité $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$, équivalente à l'inégalité demandée.

b. On élève au carré l'inégalité précédente (les deux membres sont positifs), donc $t^2 \leq \frac{\pi^2}{4} \sin^2(t)$ pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit

$$0 \leq J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi^2}{4} \sin^2(t) \cos^{2n}(t) dt = \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^{2n}(t) dt,$$

soit $0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4} (W_n - W_{n+1})$. En remplaçant ensuite W_{n+1} par $\frac{2n+1}{2n+2} W_n$ (cf. question

A.1.), on obtient $0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4} W_n \left(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\right) = \frac{\pi^2}{8(n+1)} W_n$. Il est alors clair que

$J_n = o(W_n)$, soit encore que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{J_n}{W_n} = 0$.

B.4. D'après **B.2.**, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{J_{k-1}}{W_{k-1}} - \frac{J_k}{W_k} \right) = 2 \left(\frac{J_0}{W_0} - \frac{J_n}{W_n} \right)$$

(somme télescopique). Comme $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \frac{\pi^3}{24}$, il reste $S_n = \frac{\pi^2}{6} - 2 \frac{J_n}{W_n}$.

B.5. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{J_n}{W_n} = 0$, la suite (S_n) des sommes partielles de la série est convergente, donc

la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (de toute façon, c'est du cours), et

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}.$$