DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 1
COMMENTAIRES
PSI2 2025-2026

PROBLÈME 1

A.1. On montre l'hérédité par une hipépé dans le reste intégral, ce n'est pas bien méchant. Quelques erreurs de signes: une primitive de $t \mapsto (b-t)^n$ est $t \mapsto -\dfrac{(b-t)^{n+1}}{n+1}$.

A.2. L'existence de M_{n+1} résulte du théorème des bornes atteintes: toute fonction **continue** sur un **segment** est bornée et atteint ses bornes. Les deux hypothèses essentielles, en gras et soulignées ci-dessus, doivent impérativement être mentionnées et éventuellement soulignées sur la copie. C'est comme quand on écrit la recette du coq au vin, il semble essentiel de mentionner que cela nécessite un **coq** et du **vin**!

Pour ceux qui auraient oublié, un **segment** de $\mathbb{R}$ est un intervalle fermé borné, i.e. de la forme $[a, b]$ avec a et b réels et $a < b$.

Ensuite, on majore la valeur absolue du reste intégral en utilisant l'inégalité triangulaire sur les intégrales (le mentionner ?). J'observe quelques cafouillages dans le bon maniement des valeurs absolues, il est vrai que c'est souvent un point délicat.

A.3. Comment pouvez-vous affirmer que $\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}$ tend vers zéro si vous n'avez pas calculé (ou au moins majoré) M_{n+1} ?

B.1. La question est assez débile, pas la peine d'y consacrer deux pages!

B.2. Pour passer de $c_n(a)^2 \geq a$ à $c_n(a) \geq \sqrt{a}$, mentionner la positivité des réels manipulés.

B.3. Peu de récurrences aboutissent correctement. Certains ont lu $2n-1$ au lieu de 2^{n-1} et se contentent d'écrire "par une récurrence immédiate"!!! Merci de ne pas donner au correcteur l'impression que vous le prenez pour un imbécile!

B.5. Question rarement bien comprise.

C.1. Cette question donne l'interprétation graphique de la méthode de Newton étudiée dans les questions suivantes.

C.2. On peut conclure, soit par le théorème de Rolle, soit en observant que f' est de signe constant (car continue et ne s'annulant pas: mentionner alors le **TVI**), donc f est strictement monotone donc est injective.

C.3. Encore le théorème des bornes atteintes: toute fonction **continue** sur un **segment**...

C.5. Question peu réussie, il est vrai qu'il n'était pas forcément évident de trouver les bons points d'application de l'inégalité de Taylor-Lagrange, en l'occurrence il fallait prendre ici $a = c_n$ et $b = c$ (et non l'inverse) pour pouvoir majorer $|c_{n+1} - c|$.

PROBLÈME 2

Du grand classique: les intégrales de Wallis, la formule de Stirling, le calcul de $\zeta(2)$ (lire "zéta de 2", i.e. somme de la série de Riemann d'exposant 2). Il y a quelques points un peu techniques.

A.1. Pour le caractère **STRICTEMENT** positif de W_n, il y a un théorème dans le cours de première année (que j'appellerai **théorème de stricte positivité**) qui dit que "l'intégrale sur un segment d'une fonction **continue** de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle". Je n'ai vu mentionner la **continuité** de l'intégrande que sur une ou deux copies!!! Ensuite, c'est une hipépé.

A.2. Pourquoi pas une récurrence puisque la réponse est donnée ? Certains calculs sont un peu escamotés.

A.4. Attention à l'écriture: dans plusieurs copies, j'ai vu $\lim_{n\to+\infty} W'_n = W_n$, ce qui n'a pas de sens! La limite d'une suite (ou d'une fonction) ne peut pas dépendre de la variable, qui est ici l'entier n. Vous pensez probablement plutôt à un équivalent!?

A.5. On utilise notamment $2n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$, c'était cité dans un certain nombre de copies, mais un peu passé sous silence dans d'autres!

A.6.b. Très peu de bonnes réponses: il faut dire que les annihilations et le facteur $\left(n - \dfrac{1}{2}\right)$ obligeaient à développer $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ à l'ordre trois pour obtenir un "premier terme non nul" dans le développement asymptotique, i.e. un équivalent.

A.6.c. Si le **b.** a été traité correctement (sinon, il est difficile de raconter quelque chose de cohérent ici), c'est le moment d'utiliser le lien entre suites et séries (télescopiques).

A.8. Ici, il faut revenir à la définition de la limite et "ouvrir la boîte à epsilons"! Des erreurs sur plusieurs copies: certains pensent que deux suites tendant vers 0 sont nécessairement équivalentes, aïe! Il suffit de penser à $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$!

J'ai vu pas mal de choses aberrantes, du genre: si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n \sim \sum v_n$ (???).

A.9. Classique comparaison série-intégrale. La question est souvent bien commencée, mais certains s'égarent en cours de route! Il est vrai qu'il faut encadrer ici un reste, pas une somme partielle. En sommant les inégalités pour k de 1 à n par exemple, on n'aboutit pas!

A.10. Question technique, jamais abordée!

B.1. et **B.2.** Des questions un peu calculatoires, souvent abandonnées en cours de route. Il faut s'entraîner!

B.3.a. Concavité rarement bien exploitée: la courbe est au-dessus de sa sécante.