

Structure d'espace vectoriel. Familles libres.

1. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs dans un espace vectoriel E , soit a un vecteur de E n'appartenant pas à $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Montrer que la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre.

Supposons $\lambda_1(e_1 + a) + \dots + \lambda_p(e_p + a) = 0_E$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ scalaires. On a alors (*) : $(\lambda_1 + \dots + \lambda_p)a = -(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p)$.

Si $\sum_{i=1}^p \lambda_i \neq 0$, on déduit $a = -\frac{1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_p} (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, ce qui est exclu.

On a donc $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 0$, puis $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0_E$ d'après (*), ce qui entraîne que tous les λ_i sont nuls puisque la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre. On a ainsi prouvé que la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre aussi.

2. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts, soit pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la fonction $f_i : x \mapsto |x - a_i|$. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Notons d'abord que chaque fonction f_i est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, sauf au point a_i .

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels, supposons $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$. S'il existait un indice $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ pour

lequel λ_j est non nul, alors la fonction $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ (qui est par hypothèse la fonction nulle)

ne serait pas dérivable au point a_j , ce qui constitue une absurdité. Les coefficients λ_i sont donc tous nuls, ce qui prouve la liberté de la famille.

- 3*. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel E , soit $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, soit G un supplémentaire de F dans E . Pour tout vecteur a de G , on pose $F_a = \text{Vect}(e_1 + a, \dots, e_p + a)$.

a. Montrer que G est un supplémentaire de F_a dans E .

b. Montrer que $F_a = F_b$ si et seulement si $a = b$.

-
- a. Soit $x \in E$. Comme $E = F + G$, il existe un vecteur z de G et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p + z$. On peut alors écrire

$$x = (\lambda_1(e_1 + a) + \dots + \lambda_p(e_p + a)) + (z - (\lambda_1 + \dots + \lambda_p)a),$$

ce qui montre que $x \in F_a + G$. Ainsi, $E = F_a + G$.

Soit $x \in F_a \cap G$, alors x peut se mettre sous la forme $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i(e_i + a)$ et $x \in G$. Posons

$y = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$, alors $y \in F$, et $y \in G$ car $y = x - \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i\right)a$. Donc $y = 0_E$ puisque F et G

sont en somme directe. La famille $(e_1, \dots, e_p)$ étant libre, on en déduit que les λ_i sont tous nuls, puis que $x = 0_E$. Ainsi, $F_a \cap G = \{0_E\}$.

En conclusion, $E = F_a \oplus G$.

- b. Supposons $F_a = F_b$. Alors le vecteur $e_1 + a$, qui appartient clairement à F_a , appartient aussi

à F_b , donc il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $e_1 + a = \sum_{i=1}^p \lambda_i(e_i + b)$. Cette relation entraîne

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i - e_1 = \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \right) b - a \in F \cap G$$

(le premier membre est dans F , le second est dans G , et les deux sont égaux). Donc ce vecteur est nul, i.e.

$$(\lambda_1 - 1)e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_p e_p = 0_E.$$

La famille $(e_1, \dots, e_p)$ étant libre, on en déduit que $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$, donc $e_1 + a = e_1 + b$, puis $a = b$.

La réciproque est triviale!

Espaces vectoriels de dimension finie.

4. Soient F, G, H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension n .

- a. On suppose que $\dim(F) + \dim(G) > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.
- b. On suppose que $\dim(F) + \dim(G) + \dim(H) > 2n$. Montrer que $F \cap G \cap H \neq \{0\}$.

a. La formule de Grassmann donne

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) > n - \dim(F + G).$$

Or, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E , donc $\dim(F + G) \leq n$, on obtient donc $\dim(F \cap G) > 0$, soit $F \cap G \neq \{0_E\}$.

b. On applique deux fois la formule de Grassmann:

$$\begin{aligned} \dim(F \cap G \cap H) &= \dim((F \cap G) \cap H) \\ &= \dim(F \cap G) + \dim(H) - \dim((F \cap G) + H) \\ &= \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) - \dim(F + G) - \dim((F \cap G) + H) \\ &> 2n - \left(\dim(F + G) + \dim((F \cap G) + H) \right). \end{aligned}$$

Or, $F + G$ et $(F \cap G) + H$ étant deux sous-espaces vectoriels de E , la somme de leurs dimensions ne peut excéder $2n$, on déduit donc $\dim(F \cap G \cap H) > 0$.

Applications linéaires.

5. Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E . On suppose que p et q commutent ($p \circ q = q \circ p$). Montrer que $f = p \circ q$ et $g = p + q - p \circ q$ sont des projecteurs de E , déterminer leur image et leur noyau en fonction des images et noyaux de p et q . On pourra éventuellement noter que $\text{id}_E - g = (\text{id}_E - p) \circ (\text{id}_E - q)$.

• Il est immédiat que $f \circ f = f$, donc f est un projecteur. De $f = p \circ q$, on tire $\text{Ker } q \subset \text{Ker } f$. Comme on a aussi $f = q \circ p$, alors $\text{Ker } p \subset \text{Ker } f$. Le sous-espace vectoriel $\text{Ker } f$ contient les deux sous-espaces $\text{Ker } p$ et $\text{Ker } q$, donc il contient leur somme : $\text{Ker } p + \text{Ker } q \subset \text{Ker } f$. Inversement, si $x \in \text{Ker } f$, on écrit $x = q(x) + (x - q(x))$, avec $q(x) \in \text{Ker } p$ et $x - q(x) \in \text{Ker } q$ (vérifications immédiates, laissées au lecteur). Donc $\text{Ker } f = \text{Ker } p + \text{Ker } q$.

De même, de $f = p \circ q$, on tire $\text{Im } f \subset \text{Im } p$, et de $f = q \circ p$, on tire $\text{Im } f \subset \text{Im } q$. Donc $\text{Im } f \subset \text{Im } p \cap \text{Im } q$. Inversement, si $x \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$, alors $x = p(x) = q(x)$ (tout vecteur appartenant à l'image d'un projecteur est invariant par ce projecteur), donc $x = p(q(x)) = f(x) \in \text{Im } f$. Finalement, $\text{Im } f = \text{Im } p \cap \text{Im } q$.

• Notons $p' = \text{id}_E - p$ et $q' = \text{id}_E - q$: ce sont les projecteurs respectivement “associés” aux projecteurs p et q (cf. cours), autrement dit ce sont des projecteurs tels que $\text{Im } p' = \text{Ker } p$, $\text{Ker } p' = \text{Im } p$, et de même $\text{Im } q' = \text{Ker } q$ et $\text{Ker } q' = \text{Im } q$. De plus, p' et q' commutent (évident). Donc, en appliquant ce qui précède, $g' = p' \circ q' = q' \circ p'$ est un projecteur tel que $\text{Ker } g' = \text{Ker } p' + \text{Ker } q' = \text{Im } p + \text{Im } q$ et $\text{Im } g' = \text{Im } p' \cap \text{Im } q' = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

Comme $g = \text{id}_E - g'$, donc g est le projecteur associé à g' , c'est donc le projecteur tel que

$$\text{Ker } g = \text{Im } g' = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q \quad \text{et} \quad \text{Im } g = \text{Ker } g' = \text{Im } p + \text{Im } q.$$

6. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E vérifiant la relation $u^2 - 3u + 2\text{id}_E = 0$. Démontrer la relation

$$E = \text{Ker}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{id}_E).$$

Première méthode : par analyse-synthèse

• **Analyse** : Soit $x \in E$, supposons (*) : $x = y + z$ avec $y \in \text{Ker}(u - \text{id}_E)$ et $z \in \text{Ker}(u - 2\text{id}_E)$; on a alors $u(y) = y$ et $u(z) = 2z$, donc (**) : $u(x) = u(y) + u(z) = y + 2z$. Des relations (*) et (**), on tire que $y = 2x - u(x)$ et $z = u(x) - x$. Ce sont des conditions **nécessaires** portant sur y et z : si une décomposition du vecteur x existe, ce **ne** peut être que celle-ci, on a donc prouvé l'**unicité**.

• **Synthèse** : c'est une vérification consistant à prouver que les vecteurs x et y obtenus ci-dessus répondent bien à toutes les conditions imposées. Soit donc $x \in E$, posons $y = 2x - u(x)$ et $z = u(x) - x$. On vérifie immédiatement que $y + z = x$. Par ailleurs,

$$(u - \text{id}_E)(y) = -(u - \text{id}_E)(u(x) - 2x) = -((u - \text{id}_E) \circ (u - 2\text{id}_E))(x) = -(u^2 - 3u + 2\text{id}_E)(x) = 0$$

d'après l'hypothèse de l'énoncé, donc $y \in \text{Ker}(u - \text{id}_E)$. De même,

$$(u - 2\text{id}_E)(z) = (u - 2\text{id}_E)(u(x) - x) = ((u - 2\text{id}_E) \circ (u - \text{id}_E))(x) = (u^2 - 3u + 2\text{id}_E)(x) = 0$$

donc $z \in \text{Ker}(u - 2\text{id}_E)$. Cette “synthèse” montre que les conditions données sur y et z sont **suffisantes** et prouve l'**existence** de la décomposition.

Moralité : $E = \text{Ker}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{id}_E)$.

Deuxième méthode : en utilisant le cours sur les projecteurs

Posons $p = u - \text{id}_E$, alors

$$p^2 = (u - \text{id}_E)^2 = u^2 - 2u + \text{id}_E = 3u - 2\text{id}_E - 2u + \text{id}_E = u - \text{id}_E = p :$$

l'endomorphisme p est donc un projecteur de l'espace E ; son **projecteur associé** est $q = \text{id}_E - p = \text{id}_E - (u - \text{id}_E) = 2\text{id}_E - u$. Rappelons que deux projecteurs p et q sont dits **associés** s'ils vérifient la relation $p + q = \text{id}_E$, et que cette relation équivaut aux conditions $\{\text{Ker } q = \text{Im } p ; \text{Im } q = \text{Ker } p\}$. On sait enfin que l'image et le noyau d'un projecteur sont supplémentaires (géométriquement, l'image est le sous-espace sur lequel on projette, le noyau est la direction de projection), on a donc

$$E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p = \text{Ker } p \oplus \text{Ker } q = \text{Ker } p \oplus \text{Ker } (-q) = \text{Ker } (u - \text{id}_E) \oplus \text{Ker } (u - 2\text{id}_E) .$$

7. Soient a et b deux réels distincts, soient f, p, q trois endomorphismes d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E vérifiant les relations

$$\begin{cases} p + q = \text{id}_E \\ a p + b q = f \\ a^2 p + b^2 q = f^2 \end{cases} .$$

- a. Vérifier la relation $(f - a \text{id}_E) \circ (f - b \text{id}_E) = 0$.
- b. Montrer que p et q sont des projecteurs associés.
- c. Montrer que $f^m = a^m p + b^m q$ pour tout entier naturel m .

- a. On développe, dans $\mathcal{L}(E)$:

$$\begin{aligned} (f - a \text{id}_E) \circ (f - b \text{id}_E) &= f^2 - (a + b) f + ab \text{id}_E \\ &= (a^2 p + b^2 q) - (a + b)(a p + b q) + ab(p + q) \\ &= [a^2 - (a + b)a + ab] p + [b^2 - (a + b)b + ab] q \\ &= 0 . \end{aligned}$$

- b. On a déjà la relation $p + q = \text{id}_E$, il ne reste plus qu'à montrer que p et q sont des projecteurs. En fait, il suffit de montrer que p est un projecteur car alors $q^2 = (\text{id}_E - p)^2 = \text{id}_E - 2p + p^2 = \text{id}_E - p = q$, donc q sera aussi un projecteur.

Mais on peut remarquer que $f - a \text{id}_E = (ap + bq) - a(p + q) = (b - a) q$, et de même $f - b \text{id}_E = (a - b) p$. La relation obtenue en **a.** se réécrit alors $-(a - b)^2 q \circ p = 0$, soit $q \circ p = 0$ puisque $a \neq b$. On a donc $(\text{id}_E - p) \circ p = 0$, soit $p - p^2 = 0$: l'endomorphisme p est bien un projecteur, et $q = \text{id}_E - p$ est le projecteur associé (autrement dit $\text{Ker } q = \text{Im } p$ et $\text{Im } q = \text{Ker } p$).

- c. La relation est vraie pour $m = 0$, $m = 1$ et $m = 2$. Si on la suppose vraie pour un m donné, alors

$$f^{m+1} = f \circ f^m = (ap + bq) \circ (a^m p + b^m q) = a^{m+1} p + b^{m+1} q$$

si l'on développe en tenant compte des relations $p \circ p = p$, $q \circ q = q$, $q \circ p = p \circ q = 0$. La preuve est donc achevée par récurrence.

8. Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , et F un sous-espace vectoriel de E .

a. Exprimer $u^{-1}(u(F))$ en fonction de F et de $\text{Ker } u$.

b. Exprimer $u(u^{-1}(F))$ en fonction de F et de $\text{Im } u$.

a. Soit $x \in E$, on a alors

$$\begin{aligned} x \in u^{-1}(u(F)) &\iff u(x) \in u(F) \\ &\iff \exists y \in F \quad u(x) = u(y) \\ &\iff \exists y \in F \quad x - y \in \text{Ker } u \\ &\iff x \in F + \text{Ker } u . \end{aligned}$$

Ainsi, $u^{-1}(u(F)) = F + \text{Ker } u$.

b. Soit $y \in E$, on a alors

$$y \in u(u^{-1}(F)) \iff \exists x \in u^{-1}(F) \quad y = u(x) \iff \exists x \in E \quad y = u(x) \quad \text{et} \quad u(x) \in F .$$

Donc $u(u^{-1}(F)) = F \cap \text{Im } u$.

9. Soient f, g, h des endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que

$$f \circ g = h, \quad g \circ h = f \quad \text{et} \quad h \circ f = g .$$

a. Montrer que f, g, h ont même noyau et même image.

b. Montrer que $f^2 = g^2 = h^2$, puis que $f^5 = f$.

c. En déduire que $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.

a. La relation $f \circ g = h$ entraîne classiquement $\text{Im}(h) \subset \text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(h)$. En "faisant tourner", on obtient les inclusions $\text{Im}(h) \subset \text{Im}(f) \subset \text{Im}(g) \subset \text{Im}(h)$, d'où l'égalité des images, et $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(h) \subset \text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$, d'où l'égalité des noyaux.

b. On omettra le symbole $\circ$ de composition des applications. On a d'abord

$$f^2 = (gh)f = g(hf) = g^2 = (hf)g = h(fg) = h^2 .$$

Ensuite,

$$f = gh = g(fg) = g(gh)(hf) = g^2h^2f = f^5 .$$

c. Procédons par analyse-synthèse:

- Analyse: soit $x \in E$, supposons $x = y + z$ avec $y \in \text{Im}(f)$ et $z \in \text{Ker}(f)$, alors il existe $t \in E$ tel que $y = f(t)$, ainsi $x = f(t) + z$. En appliquant f^4 , on obtient $f^4(x) = f^5(t) = f(t) = y$. Ainsi, $y = f^4(x)$ et $z = x - f^4(x)$, ce qui prouve l'unicité de la décomposition.

- Synthèse: soit $x \in E$, posons $y = f^4(x)$ et $z = x - f^4(x)$. Alors $y + z = x$, et on a bien $y \in \text{Im}(f)$ et $z \in \text{Ker}(f)$ car $f = f^5$, ceci prouve l'existence d'une décomposition.