COLLES de MATHÉMATIQUES **PSI2 2025-2026**

Semaine 2 : du 22/09 au 26/09

Suites et séries numériques + ensembles dénombrables

Le programme précédent, plus:

Produit de Cauchy de deux séries numériques. Théorème (*admis*): si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors en posant $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p b_q$, la série $\sum c_n$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q\right)$.

La série exponentielle.

Algèbre linéaire

Structure d'espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), sous-espaces vectoriels.

Somme de deux sous-espaces vectoriels, somme directe, supplémentaires.

Familles libres (finies), génératrices, bases, coordonnées d'un vecteur dans une base.

Espaces vectoriels de dimension finie: théorème de la base incomplète, définition de la dimension, cardinal d'une famille libre ou génératrice. Rang d'une famille de vecteurs. Dimension d'un sous-espace, formule de Grassmann.

Applications linéaires, image, noyau. Endo-, iso- et automorphismes. Projecteurs et symétries. Forme géométrique du théorème du rang. En dimension finie, notion de rang, théorème du rang.

Produit cartésien d'un nombre fini d'espaces vectoriels. Dimension lorsqu'ils sont tous de dimension finie.

Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels, somme directe.

En dimension finie : caractérisation des sommes directes par la dimension.

Notion d'équation linéaire. Compatibilité. Structure de l'ensemble des solutions.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.
- Si E et F sont dénombrables, alors $E \times F$ est dénombrable.
- Énoncé et preuve de la règle de d'Alembert.
- Développement asymptotique $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
- La convergence absolue d'une série entraîne sa convergence.
- Énoncé et preuve du théorème spécial des séries alternées.
- La série exponentielle.
- Caractérisation des projecteurs (ou des symétries).
- En dimension finie, $\dim\left(\sum_{i=1}^{m} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \dim(E_i)$, égalité si et seulement si la somme est directe.