

PROBLÈME 1

Définitions :

Soit (a_n) une suite de réels **non nuls**. On dit que “le **produit infini** $\prod_{n \geq 0} a_n$ est convergent” si la suite (P_n) définie par $P_n = \prod_{k=0}^n a_k$ admet une limite réelle **non nulle**. Dans ce cas, on note alors $\prod_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$. Pour tout entier naturel n , le réel P_n est appelé **produit partiel d'ordre n** et, en cas de convergence, le réel $P = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$ est aussi appelé **produit infini** des a_n .

Remarque. L'indice de départ de la multiplication ne sera pas toujours 0, il est facile d'adapter.

PARTIE A. Étude de produits infinis

A.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = 1 + \frac{1}{n}$. Calculer les produits partiels P_n correspondants ($n \geq 1$). Le produit infini $\prod_{n \geq 1} a_n$ est-il convergent ?

A.2. Montrer qu'une condition nécessaire pour que le produit infini $\prod_{n \geq 0} a_n$ soit convergent est que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$. La condition est-elle suffisante ?

A.3. On considère les produits infinis

$$P = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) \quad ; \quad Q = \prod_{k=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2} \right).$$

Exprimer les produits partiels P_{2n} , P_{2n+1} et Q_n . En déduire la convergence des deux produits infinis considérés et leur valeur.

A.4. Dans cette question, on pose $a_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que l'on peut écrire $\ln(a_n) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - r_n$ et préciser un équivalent de r_n .

b. En déduire la nature de la série de terme général $\ln(a_n)$.

c. Quelle est la nature du produit infini $\prod_{n \geq 1} a_n$? On précisera la limite de $P_n = \prod_{k=1}^n a_k$ lorsque n tend vers $+\infty$.

A.5. Soit (u_n) une suite de réels **positifs**.

a. Montrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n \ln(1 + u_n)$ sont de même nature.

b. Montrer que le produit infini $\prod (1 + u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

A.6.a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge, mais que le produit infini $\prod_{n \geq 1} (1 + u_n)$ converge.

b. Proposer une suite réelle $(v_n)_{n \geq 1}$ telle que $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge, mais $\prod_{n \geq 1} (1 + v_n)$ diverge.

PARTIE B. Une équation fonctionnelle

B.1. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $] -\pi, \pi[$, soit le produit infini $\prod_{n \geq 1} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

a. En utilisant la relation de trigonométrie $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$, simplifier l'expression du produit partiel $P_n(x) = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ pour n entier naturel non nul.

b. En déduire la convergence du produit infini considéré et préciser sa valeur, notée $P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$.

B.2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est continue en 0 et qu'elle vérifie la relation fonctionnelle

$$(\mathbf{E}): \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = f(x) \cos(x) .$$

a. Soit $x \in] -\pi, \pi[$. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) P_n(x)$. En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x et du nombre $a = f(0)$.

b. Montrer par récurrence sur l'entier naturel p que l'expression de $f(x)$ obtenue à la question **B.2.a.** ci-dessus reste valable pour tout x appartenant à l'intervalle $] -2^p\pi, 2^p\pi[$.

c. Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continues en 0 et solutions de **(E)** ?

PROBLÈME 2

Une introduction aux séries de Fourier

Pour n entier naturel et t réel, on pose $D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt}$.

1. Vérifier la relation $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 2\pi$ pour tout n entier naturel.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et t réel non multiple de 2π , prouver que

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} .$$

3. Soit $h : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que l'intégrale $I_\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} h(u) \sin(\alpha u) du$ tend vers 0 lorsque le réel α tend vers $+\infty$.

On considère maintenant une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π -périodique. Pour tout k entier relatif, on pose

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} dx \quad (\text{un coefficient de Fourier}) .$$

4. Pour n entier naturel et t réel, prouver la relation

$$\sum_{k=-n}^n c_k(g) e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t-u) D_n(u) du .$$

5. En déduire que $\sum_{k=-n}^n c_k(g) e^{ikt} - g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_t(u) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) u\right) du$,
où h_t est une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$ que l'on explicitera.
6. Montrer que la fonction h_t est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi, \pi]$.
7. Montrer que, pour tout t réel, les séries numériques $\sum_{n \geq 0} c_n(g) e^{int}$ et $\sum_{n \geq 1} c_{-n}(g) e^{-int}$ sont convergentes, et prouver la relation

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(g) e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(g) e^{-int}.$$

On a ainsi obtenu le **développement en série de Fourier** de la fonction g , que l'on écrira

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g) e^{int}.$$

EXERCICE

On note E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Pour tout endomorphisme f de l'espace vectoriel E , on note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f , i.e. $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$.

De la même façon, si A est une matrice carrée d'ordre n , on notera $C(A)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n qui commutent avec A , i.e. $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$.

1. Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, l'ensemble $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, et qu'il est stable par la loi $\circ$ de composition.

- 2.a. Soit A une matrice carrée d'ordre n . Montrer l'équivalence

$$C(A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad A E_{i,j} = E_{i,j} A,$$

où l'on note $E_{i,j}$ la "matrice élémentaire" dont le coefficient d'indices (i, j) vaut 1 et tous les autres sont nuls.

- b. En déduire que $C(A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si A est une "matrice scalaire" (c'est-à-dire de la forme $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$).

- c. Quels sont les endomorphismes $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $C(f) = \mathcal{L}(E)$?

3. On suppose dans cette question que l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est **nilpotent d'indice n** , c'est-à-dire que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

- a. Montrer qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .

- b. Écrire la matrice A de l'endomorphisme f dans une telle base $\mathcal{B}$.

- c. Décrire les matrices A^k , pour k entier de 0 à $n-1$.

- d. Montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- e. Montrer que $C(f) = \text{Vect}(\text{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $C(f)$?