COLLES de MATHÉMATIQUES PSI2 2025-2026

Semaine 3 : du 29/09 au 03/10

Algèbre linéaire

Le programme de la semaine dernière, plus:

En dimension finie : base adaptée à une décomposition de E en somme directe, base adaptée à un sous-espace.

Formes linéaires, hyperplans: un hyperplan est, par définition, le noyau d'une forme linéaire non nulle. Caractérisation: un s.e.v. est un hyperplan si et seulement s'il admet pour supplémentaire une droite. Hyperplans en dimension finie, équations dans une base. Formes linéaires coordonnées e_i^* relativement à une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E.
Différentes interprétations d'un système linéaire homogène, dimension de l'espace des solutions (nombre d'inconnues, moins le "nombre d'équations indépendantes").

Opérations du calcul matriciel. Matrices élémentaires et "règle des dominos" $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$. Rang d'une matrice, caractérisations des matrices inversibles (*pas de déterminant, et pas trop d'opérations élémentaires pour le moment*).

Représentation d'une application linéaire par une matrice (de E de dimension finie muni d'une base, vers F de dimension finie muni d'une base). Changements de bases: matrices de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$, effet sur les coordonnées d'un vecteur, effet sur la matrice d'un endomorphisme ou d'une application linéaire. Matrices carrées semblables.

Isomorphisme canonique entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et identifications (notations $\mathrm{Ker}\, A$, $\mathrm{Im}\, A$).

Définition de matrices par blocs, produits. Matrices diagonales par blocs, triangulaires par blocs.

Sous-espace stable par un endomorphisme, endomorphisme induit. Représentation matricielle dans une base adaptée.

Si deux endomorphismes commutent, le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie.

Polynômes d'endomorphismes et de matrices: définitions, propriétés opératoires. Polynômes annulateurs. Utilisation pour le calcul de l'inverse ou des puissances d'une matrice carrée.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Caractérisation des projecteurs (ou des symétries).
- En dimension finie, $\dim \left(\sum_{i=1}^{m} E_i \right) \leq \sum_{i=1}^{m} \dim(E_i)$, égalité si et seulement si la somme est directe.
- Si $H = \mathrm{Ker}\, \varphi$ avec φ forme linéaire non nulle sur E, et si $a \in E \setminus H$, alors $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$.
- Matrices de passage, effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.
- Si deux endomorphismes commutent, le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.
- Trace d'un projecteur.