CORRIGÉ du DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 1
PSI2 2025-2026

PROBLÈME 1

Partie A. Étude de produits infinis

A.1. On a $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ donc P_n est un produit "télescopique" :
$$P_n = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = n+1\ .$$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = +\infty$ et le produit infini est divergent.

A.2. Si le produit infini $\prod\limits_{n\geq 0} a_n$ converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = P \in \mathbb{R}^*$ donc $a_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{P}{P} = 1$.
L'exemple de la question **A.1.** montre que la condition n'est pas suffisante.

A.3. • Calculons dans la joie et la bonne humeur : posons $a_k = 1 + \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ et $b_k = 1 - \dfrac{1}{k^2}$;
$$\begin{aligned} P_{2n} &= \left[(1+1)\left(1-\frac{1}{2}\right)\right] \times \left[\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\right] \times \cdots \times \left[\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right] \\ &= \left[\frac{2}{1} \times \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{4}{3} \times \frac{3}{4}\right] \times \cdots \times \left[\frac{2n}{2n-1} \times \frac{2n-1}{2n}\right] \quad = \quad 1\ . \end{aligned}$$
On peut formaliser un peu plus ce calcul :
$$P_{2n} = \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)\left(1-\frac{1}{2k}\right)\right] = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{2k-1} \times \frac{2k-1}{2k}\right) = \prod_{k=1}^{n} 1 = 1\ .$$
Par ailleurs, $P_{2n+1} = a_{2n+1}\, P_{2n} = \dfrac{2n+2}{2n+1}$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} P_{2n+1} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 1$: le produit infini $\prod\limits_{k\geq 1} a_k$ converge et $P = \prod\limits_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = 1$.

Rappelons en effet qu'une suite (u_n) telle que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite l converge elle aussi vers l.

• On recommence...
$$Q_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\left(\prod\limits_{k=2}^{n}(k-1)\right)\left(\prod\limits_{k=2}^{n}(k+1)\right)}{\left(\prod\limits_{k=2}^{n} k\right)^2}\ .$$
Donc $Q_n = \dfrac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n-1} k\right)}{\left(\prod\limits_{k=2}^{n} k\right)} \times \dfrac{\left(\prod\limits_{k=3}^{n+1} k\right)}{\left(\prod\limits_{k=2}^{n} k\right)} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{n+1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

Le produit infini $\prod\limits_{k\geq 2} b_k$ est donc convergent, et $Q = \prod\limits_{k=2}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

A.4.a. Notons d'abord que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = 0$, on utilise le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en zéro :
$$\ln(a_n) = \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\ ,$$

autrement dit $\ln(a_n) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - r_n$, avec $r_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

b. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ converge (critère spécial des séries alternées, puisque la suite de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ décroît et tend vers 0) et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} r_n$ diverge puisque $r_n \sim \dfrac{1}{2n}$ (comparaison de séries à termes positifs, les r_n étant nécessairement positifs à partir d'un certain rang). Donc la série $\displaystyle\sum_n \ln(a_n)$ diverge.

c. Considérons un produit partiel

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln a_k\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} r_k\right).$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ est un réel (puisque cette série est convergente) tandis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} r_k\right) = +\infty$ (sommes partielles d'une série divergente dont les termes sont positifs à partir d'un certain rang). Il en résulte que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(P_n) = -\infty$, puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n = 0$; le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 1} a_n$ est divergent.

A.5.a. Considérons deux cas :

- si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$: alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$, donc les séries $\displaystyle\sum_n u_n$ et $\displaystyle\sum_n \ln(1+u_n)$ sont de même nature (*comparaison de séries à termes positifs*) ;
- si la suite (u_n) ne tend pas vers 0 : alors la suite $\big(\ln(1+u_n)\big)$ ne tend pas non plus vers 0, et les séries considérées sont toutes deux (grossièrement) divergentes.

b. • Si la série $\displaystyle\sum_n u_n$ converge, alors la série $\displaystyle\sum_n \ln(1+u_n)$ converge d'après la question précédente, notons $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+u_n)$ sa somme. Alors

$$P_n := \prod_{k=0}^{n} (1+u_k) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^S \in \mathbb{R}_+^*\ ,$$

donc le produit infini $\displaystyle\prod_n (1+u_n)$ est convergent.

• En revanche, si la série $\displaystyle\sum_n u_n$ diverge, il en est de même de la série $\displaystyle\sum_n \ln(1+u_n)$; les sommes partielles S_n de cette dernière tendent alors vers $+\infty$ (*série divergente à termes positifs*), donc $P_n = e^{S_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et le produit infini $\displaystyle\prod_n (1+u_n)$ est divergent.

A.6.a. • La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (*critère spécial des séries alternées*), et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n}$ diverge, donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

• Développons $\ln(1+u_n)$:

$$\ln(1+u_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big) ,$$

donc la série de terme général $\ln(1+u_n)$ converge (*somme de deux séries convergentes*). Si on note S sa somme, alors les produits partiels $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$ tendent vers le réel strictement positif e^S, donc le produit infini $\prod_{n\geq 1}(1+u_n)$ est convergent. *Cela montre que le résultat du* **A.5.b.** *n'est plus valable si l'on supprime l'hypothèse* $u_n \geq 0$.

b. Il suffit de reprendre l'exemple de la question **A.4.** en posant $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

PARTIE B. Une équation fonctionnelle

B.1.a. Pour tout réel a tel que $\sin a \neq 0$ (donc si a non multiple de π), on a $\cos a = \frac{\sin 2a}{2\,\sin a}$.

• si $x = 0$, on a évidemment $P_n(0) = 1$ pour tout n ;

• si $x \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$, alors $\frac{x}{2^k}$ n'est jamais multiple de π ($k \in \mathbb{N}^*$), ce qui justifie le calcul suivant :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\,\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}\right) = \frac{\sin x}{2^n\,\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

après télescopage.

b. • Pour $x = 0$, on a $P(0) = 1$;

• si $x \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$, alors en utilisant l'équivalent $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{2^n}$, on obtient $P(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \frac{\sin x}{x}$ (*non nul*), donc le produit infini est convergent.

Dans la suite, on notera sinc (sinus cardinal) *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ *si* $x \neq 0$ *et* $\mathrm{sinc}(0) = 1$ *; cette fonction est continue sur* $\mathbb{R}$.

B.2.a. Par récurrence sur n :

initialisation pour $n = 1$, on a bien $f(x) = f\Big(\frac{x}{2}\Big)\,\cos\Big(\frac{x}{2}\Big) = f\Big(\frac{x}{2}\Big)\,P_1(x)$ puis, si pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on a $f(x) = f\Big(\frac{x}{2^n}\Big)\,P_n(x)$, alors

$$f(x) = f\Big(\frac{x}{2^{n+1}}\Big)\,\cos\Big(\frac{x}{2^{n+1}}\Big)\,P_n(x) = f\Big(\frac{x}{2^{n+1}}\Big)\,P_{n+1}(x) ,$$

ce qui achève la récurrence. La fonction f étant continue en 0, on a $\lim_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f(0)$. En passant à la limite ($n \to +\infty$) dans le membre de droite de l'égalité $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) P_n(x)$, vraie pour tout n, on obtient $f(x) = f(0)\,\mathrm{sinc}(x) = a\,\mathrm{sinc}(x)$ pour tout $x \in]-\pi, \pi[$.

b. Montrons par récurrence sur p la proposition :

$$\forall x \in]-2^p\pi, 2^p\pi[\qquad f(x) = f(0)\,\mathrm{sinc}(x)\ .$$

La proposition est vraie pour $p = 0$ (c'est la question **B.2.a.** ci-dessus) et, si elle est vraie pour $p \in \mathbb{N}$ donné, soit $x \in]-2^{p+1}\pi, 2^{p+1}\pi[$ supposé non nul, alors $\dfrac{x}{2} \in]-2^p\pi, 2^p\pi[\setminus\{0\}$ donc (*hypothèse de récurrence*) $f\left(\dfrac{x}{2}\right) = f(0)\,\mathrm{sinc}\left(\dfrac{x}{2}\right) = f(0)\,\dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\dfrac{x}{2}}$, puis

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)\,\cos\left(\frac{x}{2}\right) = f(0)\,\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\,\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = f(0)\,\frac{\sin x}{x} = f(0)\,\mathrm{sinc}(x)\ ,$$

ce qui achève la récurrence (la vérification pour $x = 0$ étant triviale).

c. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue en 0, est solution de l'équation fonctionnelle **(E)**, on a alors $f(x) = f(0)\,\mathrm{sinc}(x)$ pour tout x réel. Réciproquement, toute fonction de la forme $x \mapsto a\,\mathrm{sinc}(x)$ (avec a réel fixé) est continue en 0 et est solution de **(E)**. On a donc obtenu ainsi toutes les fonctions continues en 0 et solutions de **(E)**.

PROBLÈME 2

Une introduction aux séries de Fourier

1. Pour k entier relatif non nul, on a $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$ puisque la fonction $t \mapsto e^{ikt}$ est 2π-périodique. Donc seul le terme pour $k = 0$ apporte une contribution à l'intégrale, ainsi $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t = 2\pi$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et t réel non multiple de 2π (ainsi $e^{it} \neq 1$), on a

$$D_n(t) = e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} \left(e^{it}\right)^k \ = e^{-int}\,\frac{e^{i(2n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} \ = e^{-int}\,\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{i\frac{t}{2}}} \times \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}}\ ,$$

soit

$$D_n(t) = \frac{2i\,\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2i\,\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\ .$$

On peut aussi prouver la relation par récurrence.

3. Pour α réel non nul, on intègre par parties:

$$I_\alpha = \left[-\frac{\cos(\alpha u)}{\alpha}\,h(u)\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\alpha u)}{\alpha}\,h'(u)\,\mathrm{d}u\ ,$$

ce qui permet de majorer l'intégrale, par exemple (les fonctions h et h' étant bornées sur $[-\pi,\pi]$ puisque **continues** sur ce **segment**): en posant $\|h\|_\infty = \max_{t\in[-\pi,\pi]} \bigl|h(t)\bigr|$ et $\|h'\|_\infty = \max_{t\in[-\pi,\pi]} \bigl|h'(t)\bigr|$,

$$\bigl|I_\alpha\bigr| \leq \frac{2}{|\alpha|}\,\|h\|_\infty + \frac{2\pi}{|\alpha|}\,\|h'\|_\infty\ ,$$

d'où $\lim_{\alpha\to+\infty} I_\alpha = 0$.

4. On a d'abord, par linéarité de l'intégrale (c'est une somme finie):

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{ikt} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\Bigl(\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x\Bigr)e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)D_n(t-x)\mathrm{d}x\ .$$

On pose ensuite $u = t-x$:

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\,e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} g(t-u)\,D_n(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t-u)\,D_n(u)\,\mathrm{d}u$$

puisque l'intégrale d'une fonction continue et 2π-périodique est la même sur tout intervalle de longueur 2π.

5. Comme $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\,\mathrm{d}u = 2\pi$, on a

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\,e^{ikt} - g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bigl(g(t-u)-g(t)\bigr)\,D_n(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_t(u)\,\sin\Bigl(\Bigl(n+\frac{1}{2}\Bigr)u\Bigr)\,\mathrm{d}u\ ,$$

en posant $h_t(u) = \dfrac{g(t-u)-g(t)}{\sin\left(\dfrac{u}{2}\right)}$ pour $u\in[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$, que l'on prolonge par continuité en 0 en posant $h_t(0) = -2\,g'(t)$. En effet, on a des développements limités à l'ordre 1 du numérateur et du dénominateur qui sont:

$$g(t-u)-g(t) = -g'(t)\,u + o(u) \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{u}{2} = \frac{1}{2}u + o(u)\ .$$

6. La fonction h_t est continue sur $[-\pi,\pi]$ (*cf.* question précédente), et de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^2$) sur $[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$. Par le théorème de la limite de la dérivée, il suffit de montrer que $h_t'(u)$ admet une limite finie lorsque u tend vers 0 pour affirmer que h_t est $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$. Or, pour $u\in[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$, on calcule

$$h_t'(u) = \frac{N(u)}{D(u)}\ ,\quad \text{avec}\quad N(u) = -g'(t-u)\sin\Bigl(\frac{u}{2}\Bigr)-\frac{1}{2}\bigl(g(t-u)-g(t)\bigr)\cos\Bigl(\frac{u}{2}\Bigr)\quad\text{et}\quad D(u) = \sin^2\Bigl(\frac{u}{2}\Bigr)\ .$$

On a $D(u) \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{u^2}{4}$ et, g étant de classe $\mathcal{C}^2$, on a $g(t-u) = g(t) - g'(t)\,u + \dfrac{g''(t)}{2}u^2 + o(u^2)$ lorsque $u\to 0$, un petit calcul donne alors $N(u) = \dfrac{g''(t)}{4}u^2 + o(u^2)$, donc $\lim_{u\to 0} h_t'(u) = g''(t)$. Ceci permet d'affirmer que h_t est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$.

7. Puisque h_t est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$, la question **3.** et la question **5.** permettent d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_t(u)\,\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)\,\mathrm{d}u\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\,e^{ikt}-g(t)\right)=0\ .$$

Par ailleurs, pour tout n entier relatif non nul, deux intégrations par parties montrent que $c_n(g)=-\dfrac{1}{2\pi\,n^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g''(x)\,e^{-inx}\,\mathrm{d}x$ et, la fonction g'' étant bornée (car continue et périodique), on a $\big|c_n(g)\big|\leq\dfrac{\|g''\|_\infty}{n^2}$. Ainsi les séries numériques $\displaystyle\sum_{n\geq 0} c_n(g)\,e^{int}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} c_{-n}(g)\,e^{-int}$ sont toutes deux absolument convergentes et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(g)\,e^{int}+\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(g)\,e^{-int}=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\,e^{ikt}\right)=g(t)\ .$$

EXERCICE

1. L'ensemble $C(f)$ est non vide ($0_{\mathcal{L}(E)}\in C(f)$) et stable par combinaison linéaire : si $g\in C(f)$ et $h\in C(f)$, si α et β sont des scalaires, alors

$$(\alpha g+\beta h)\circ f=\alpha(g\circ f)+\beta(h\circ f)=\alpha(f\circ g)+\beta(f\circ h)=f\circ(\alpha g+\beta h)\ ,$$

donc $\alpha g+\beta h\in C(f)$. Donc $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Par ailleurs, $C(f)$ est stable par la loi $\circ$ de composition des applications : si $g\in C(f)$ et $h\in C(f)$, alors

$$(g\circ h)\circ f=g\circ(h\circ f)=g\circ(f\circ h)=(g\circ f)\circ h=(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)\ ,$$

donc $g\circ h\in C(f)$.

Bien sûr, on montre de la même façon que, si A est une matrice carrée d'ordre n, alors $C(A)$ est un sous-espace de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stable par le produit matriciel.

2.a. L'implication dans le sens direct est immédiate : si A commute avec toutes les matrices carrées d'ordre n, elle commute en particulier avec les matrices élémentaires $E_{i,j}$. Réciproquement, si A commute avec toutes les matrices $E_{i,j}$, la bilinéarité du produit matriciel entraîne que A commute avec toutes les combinaisons linéaires des $E_{i,j}$, donc avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ puisque l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices élémentaires $E_{i,j}$, $1\leq i,j\leq n$, qui en constituent la **base canonique**.

b. Il est immédiat que, si $A=\lambda I_n$ (matrice scalaire), alors A commute avec toutes les matrices carrées d'ordre n, donc $C(A)=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Réciproquement, si une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notons $A=(a_{k,l})_{k,l}=\displaystyle\sum_{k,l} a_{k,l}E_{k,l}$, alors elle commute avec toutes les matrices élémentaires $E_{i,j}$: pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $A\,E_{i,j}=E_{i,j}\,A$. En utilisant la relation $E_{i,j}\,E_{k,l}=\delta_{j,k}\,E_{i,l}$ (dite **règle des dominos**), on calcule

$$A\,E_{i,j}=\sum_{k,l} a_{k,l}\,E_{k,l}\,E_{i,j}=\sum_{k,l} a_{k,l}\,\delta_{l,i}E_{k,j}=\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\,E_{k,j}\ .$$

De même, $E_{i,j}\,A=\sum_{l=1}^{n} a_{j,l}\,E_{i,l}$. On a donc l'égalité matricielle

$$\textbf{(*):}\qquad \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\,E_{k,j}=\sum_{l=1}^{n} a_{j,l}\,E_{i,l}\ .$$

En identifiant les coefficients d'indices (i,j) dans **(*)**, on obtient $a_{i,i}=a_{j,j}$. Ceci étant vrai pour tout couple (i,j), les coefficients diagonaux de A sont tous égaux.

Enfin, si $i\neq j$, en identifiant les coefficients d'indices (j,j) dans **(*)**, on obtient $a_{j,i}=0$, les coefficients non diagonaux de A sont donc nuls.

Donc A est une matrice scalaire, ce qu'il fallait démontrer.

c. En interprétant en termes d'endomorphismes le résultat du **b.**, on déduit que les endomorphismes de E commutant avec tous le endomorphismes sont ceux de la forme $\lambda\,\mathrm{id}_E$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$, autrement dit les homothéties.

3.a. Soit $x_0\in E$ tel que $f^{n-1}(x_0)\neq 0$ (un tel vecteur existe). Raisonnons par l'absurde : si la famille $\mathcal{B}$ était liée, il existerait des scalaires $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_{n-1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i\,f^i(x_0)=0_E$, posons alors $k=\min\{i\in[\![0,n-1]\!]\mid \lambda_i\neq 0\}$. On a en fait $\sum_{i=k}^{n-1}\lambda_i\,f^i(x_0)=0_E$; en appliquant f^{n-1-k} à chaque membre, on obtient $\lambda_k\,f^{n-1}(x_0)=0_E$ d'où $\lambda_k=0$ puisque $f^{n-1}(x_0)$ n'est pas le vecteur nul, et cela contredit la définition de l'entier k. Ce raisonnement prouve que la famille $\mathcal{B}$ est libre ; c'est donc une base de E car elle est constituée de n vecteurs.

b. $A=\mathrm{Mat}_B(f)=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0\\1&0&&&\vdots\\0&1&0&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&1&0\end{pmatrix}=E_{2,1}+E_{3,2}+\cdots+E_{n,n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}E_{i+1,i}.$

c. En jouant aux dominos avec les matrices élémentaires (ou, mieux encore, en recherchant l'image par f^k de chaque vecteur $f^j(x_0)$ de la base $\mathcal{B}$), on obtient $A^k=\sum_{i=1}^{n-k}E_{i+k,i}$, avec $0\leq k\leq n-1$: en détaillant plus, on part de $A^0=I_n=\sum_{i=1}^{n}E_{i,i}$, et chaque incrémentation de l'exposant k décale vers le bas (ou vers la gauche) la diagonale de 1, jusqu'à $A^{n-1}=E_{n,1}$. On a bien sûr $A^k=0_n$ pour tout entier k tel que $k\geq n$.

d. Raisonnons par l'absurde : si la famille $(I_n,A,A^2,\cdots,A^{n-1})$ était liée, il existerait des scalaires $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_{n-1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i\,A^i=0_n$ (relation de dépendance linéaire). On retrouverait alors la même relation de dépendance linéaire entre les endomorphismes $\mathrm{id}_E,\ f,\ f^2,\ \cdots,\ f^{n-1}$, soit $\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i\,f^i=0$. En appliquant cela au vecteur x_0, on déduirait $\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i\, f^i(x_0)=0_E$, donc une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs x_0, $f(x_0)$, $\cdots$, $f^{n-1}(x_0)$, et cela contredit la question **3.a.**

e. L'inclusion $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E,f,f^2,\cdots,f^{n-1})\subset C(f)$ est évidente : tout "polynôme de l'endomorphisme f" commute avec f. Réciproquement, soit g un endomorphisme de E commutant avec f, soit $M=(m_{i,j})$ la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$, on doit alors avoir $MA=AM$. Or,

$$MA=\begin{pmatrix} m_{1,2} & m_{1,3} & \cdots & m_{1,n} & 0\\ m_{2,2} & m_{2,3} & \cdots & m_{2,n} & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ m_{n,2} & m_{n,3} & \cdots & m_{n,n} & 0\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad AM=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n-1} & m_{1,n}\\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,n-1} & m_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \cdots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n}\end{pmatrix}$$

(multiplier par A à droite décale les colonnes vers la gauche, multiplier par A à gauche décale les lignes vers le bas). L'égalité $MA=AM$ est alors vraie si et seulement si $\begin{cases} m_{1,2}=m_{1,3}=\cdots=m_{1,n}=0\\ m_{1,n}=m_{2,n}=\cdots=m_{n-1,n}=0\\ \forall(i,j)\in[\![1,n-1]\!]^2\quad m_{i+1,j+1}=m_{i,j}\end{cases}$. L'examen de ces conditions montre que la matrice M doit être de la forme $M=\lambda_0 I_n+\lambda_1 A+\cdots+\lambda_{n-1}A^{n-1}$, donc $M\in\mathrm{Vect}(I_n,A,A^2,\cdots,A^{n-1})$, autrement dit $C(A)=\mathrm{Vect}(I_n,A,A^2,\cdots,A^{n-1})$, ce qui est la traduction matricielle de $C(f)=\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E,f,f^2,\cdots,f^{n-1})$. La famille $(I_n,A,A^2,\cdots,A^{n-1})$ étant libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il en est de même de la famille $(\mathrm{id}_E,f,f^2,\cdots,f^{n-1})$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui est donc de rang n (égal à son cardinal), donc $\dim C(f)=\dim C(A)=n$.

Remarque. Une autre solution pour montrer l'inclusion $C(f)\subset\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E,f,f^2,\cdots,f^{n-1})$ qui est "non triviale": soit $g\in C(f)$, décomposons le vecteur $g(x_0)$ dans la base $\mathcal{B}$: il existe des scalaires a_0, $\cdots$, a_{n-1} tels que $g(x_0)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k f^k(x_0)$. Si $j\in[\![0,n-1]\!]$, comme g commute avec f, alors g commute aussi avec f^j (*évident*), donc

$$g\big(f^j(x_0)\big)=f^j\big(g(x_0)\big)=f^j\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_k f^k(x_0)\right)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k f^{j+k}(x_0)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k f^k\big(f^j(x_0)\big)\ ,$$

donc les endomorphismes g et $\sum_{k=0}^{n-1}a_k f^k$ coïncident sur tous les vecteurs $f^j(x_0)$ constituant la base $\mathcal{B}$. On en déduit que $g=\sum_{k=0}^{n-1}a_k f^k$, donc $g\in\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E,f,f^2,\cdots,f^{n-1})$.