

Structure d'espace vectoriel. Familles libres.

1. Soit (e_1, \dots, e_p) une famille libre de vecteurs dans un espace vectoriel E , soit a un vecteur de E n'appartenant pas à $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Montrer que la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre.

Supposons $\lambda_1(e_1 + a) + \dots + \lambda_p(e_p + a) = 0_E$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ scalaires. On a alors (*) : $(\lambda_1 + \dots + \lambda_p)a = -(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p)$.

Si $\sum_{i=1}^p \lambda_i \neq 0$, on déduit $a = -\frac{1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_p} (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, ce qui est exclu.

On a donc $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 0$, puis $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0_E$ d'après (*), ce qui entraîne que tous les λ_i sont nuls puisque la famille (e_1, \dots, e_p) est libre. On a ainsi prouvé que la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre aussi.

2. Soient a_1, \dots, a_n des réels distincts, soit pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la fonction $f_i : x \mapsto |x - a_i|$. Montrer que la famille (f_1, \dots, f_n) est libre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Notons d'abord que chaque fonction f_i est dérivable en tout point de \mathbb{R} , sauf au point a_i .

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels, supposons $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$. S'il existait un indice $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ pour

lequel λ_j est non nul, alors la fonction $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ (qui est par hypothèse la fonction nulle)

ne serait pas dérivable au point a_j , ce qui constitue une absurdité. Les coefficients λ_i sont donc tous nuls, ce qui prouve la liberté de la famille.

- 3*. Soit (e_1, \dots, e_p) une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel E , soit $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, soit G un supplémentaire de F dans E . Pour tout vecteur a de G , on pose $F_a = \text{Vect}(e_1 + a, \dots, e_p + a)$.

a. Montrer que G est un supplémentaire de F_a dans E .

b. Montrer que $F_a = F_b$ si et seulement si $a = b$.

-
- a. Soit $x \in E$. Comme $E = F + G$, il existe un vecteur z de G et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p + z$. On peut alors écrire

$$x = (\lambda_1(e_1 + a) + \dots + \lambda_p(e_p + a)) + (z - (\lambda_1 + \dots + \lambda_p)a),$$

ce qui montre que $x \in F_a + G$. Ainsi, $E = F_a + G$.

Soit $x \in F_a \cap G$, alors x peut se mettre sous la forme $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i(e_i + a)$ et $x \in G$. Posons

$y = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$, alors $y \in F$, et $y \in G$ car $y = x - \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i\right)a$. Donc $y = 0_E$ puisque F et G

sont en somme directe. La famille (e_1, \dots, e_p) étant libre, on en déduit que les λ_i sont tous nuls, puis que $x = 0_E$. Ainsi, $F_a \cap G = \{0_E\}$.

En conclusion, $E = F_a \oplus G$.

- b. Supposons $F_a = F_b$. Alors le vecteur $e_1 + a$, qui appartient clairement à F_a , appartient aussi

à Fb , donc il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $e_1 + a = \sum_{i=1}^p \lambda_i(e_i + b)$. Cette relation entraîne

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i - e_1 = \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \right) b - a \in F \cap G$$

(le premier membre est dans F , le second est dans G , et les deux sont égaux). Donc ce vecteur est nul, i.e.

$$(\lambda_1 - 1)e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_p e_p = 0_E .$$

La famille (e_1, \dots, e_p) étant libre, on en déduit que $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$, donc $e_1 + a = e_1 + b$, puis $a = b$.

La réciproque est triviale!

Espaces vectoriels de dimension finie.

4. Soient F, G, H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension n .

- a. On suppose que $\dim(F) + \dim(G) > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.
- b. On suppose que $\dim(F) + \dim(G) + \dim(H) > 2n$. Montrer que $F \cap G \cap H \neq \{0\}$.

a. La formule de Grassmann donne

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) > n - \dim(F + G) .$$

Or, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E , donc $\dim(F + G) \leq n$, on obtient donc $\dim(F \cap G) > 0$, soit $F \cap G \neq \{0_E\}$.

b. On applique deux fois la formule de Grassmann:

$$\begin{aligned} \dim(F \cap G \cap H) &= \dim((F \cap G) \cap H) \\ &= \dim(F \cap G) + \dim(H) - \dim((F \cap G) + H) \\ &= \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) - \dim(F + G) - \dim((F \cap G) + H) \\ &> 2n - \left(\dim(F + G) + \dim((F \cap G) + H) \right) . \end{aligned}$$

Or, $F + G$ et $(F \cap G) + H$ étant deux sous-espaces vectoriels de E , la somme de leurs dimensions ne peut excéder $2n$, on déduit donc $\dim(F \cap G \cap H) > 0$.

Applications linéaires.

5. Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E . On suppose que p et q commutent ($p \circ q = q \circ p$). Montrer que $f = p \circ q$ et $g = p + q - p \circ q$ sont des projecteurs de E , déterminer leur image et leur noyau en fonction des images et noyaux de p et q . On pourra éventuellement noter que $\text{id}_E - g = (\text{id}_E - p) \circ (\text{id}_E - q)$.

• Il est immédiat que $f \circ f = f$, donc f est un projecteur. De $f = p \circ q$, on tire $\text{Ker } q \subset \text{Ker } f$. Comme on a aussi $f = q \circ p$, alors $\text{Ker } p \subset \text{Ker } f$. Le sous-espace vectoriel $\text{Ker } f$ contient les deux sous-espaces $\text{Ker } p$ et $\text{Ker } q$, donc il contient leur somme : $\text{Ker } p + \text{Ker } q \subset \text{Ker } f$. Inversement, si $x \in \text{Ker } f$, on écrit $x = q(x) + (x - q(x))$, avec $q(x) \in \text{Ker } p$ et $x - q(x) \in \text{Ker } q$ (vérifications immédiates, laissées au lecteur). Donc $\text{Ker } f = \text{Ker } p + \text{Ker } q$.

De même, de $f = p \circ q$, on tire $\text{Im } f \subset \text{Im } p$, et de $f = q \circ p$, on tire $\text{Im } f \subset \text{Im } q$. Donc $\text{Im } f \subset \text{Im } p \cap \text{Im } q$. Inversement, si $x \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$, alors $x = p(x) = q(x)$ (tout vecteur appartenant à l'image d'un projecteur est invariant par ce projecteur), donc $x = p(q(x)) = f(x) \in \text{Im } f$. Finalement, $\text{Im } f = \text{Im } p \cap \text{Im } q$.

• Notons $p' = \text{id}_E - p$ et $q' = \text{id}_E - q$: ce sont les projecteurs respectivement “associés” aux projecteurs p et q (cf. cours), autrement dit ce sont des projecteurs tels que $\text{Im } p' = \text{Ker } p$, $\text{Ker } p' = \text{Im } p$, et de même $\text{Im } q' = \text{Ker } q$ et $\text{Ker } q' = \text{Im } q$. De plus, p' et q' commutent (évident). Donc, en appliquant ce qui précède, $g' = p' \circ q' = q' \circ p'$ est un projecteur tel que $\text{Ker } g' = \text{Ker } p' + \text{Ker } q' = \text{Im } p + \text{Im } q$ et $\text{Im } g' = \text{Im } p' \cap \text{Im } q' = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

Comme $g = \text{id}_E - g'$, donc g est le projecteur associé à g' , c'est donc le projecteur tel que

$$\text{Ker } g = \text{Im } g' = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q \quad \text{et} \quad \text{Im } g = \text{Ker } g' = \text{Im } p + \text{Im } q .$$

6. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E vérifiant la relation $u^2 - 3u + 2\text{id}_E = 0$. Démontrer la relation

$$E = \text{Ker}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{id}_E) .$$

Première méthode : par analyse-synthèse

• **Analyse** : Soit $x \in E$, supposons (*) : $x = y + z$ avec $y \in \text{Ker}(u - \text{id}_E)$ et $z \in \text{Ker}(u - 2\text{id}_E)$; on a alors $u(y) = y$ et $u(z) = 2z$, donc (**): $u(x) = u(y) + u(z) = y + 2z$. Des relations (*) et (**), on tire que $y = 2x - u(x)$ et $z = u(x) - x$. Ce sont des conditions **nécessaires** portant sur y et z : si une décomposition du vecteur x existe, ce **ne** peut être que celle-ci, on a donc prouvé l'**unicité**.

• **Synthèse** : c'est une vérification consistant à prouver que les vecteurs x et y obtenus ci-dessus répondent bien à toutes les conditions imposées. Soit donc $x \in E$, posons $y = 2x - u(x)$ et $z = u(x) - x$. On vérifie immédiatement que $y + z = x$. Par ailleurs,

$$(u - \text{id}_E)(y) = -(u - \text{id}_E)(u(x) - 2x) = -((u - \text{id}_E) \circ (u - 2\text{id}_E))(x) = -(u^2 - 3u + 2\text{id}_E)(x) = 0$$

d'après l'hypothèse de l'énoncé, donc $y \in \text{Ker}(u - \text{id}_E)$. De même,

$$(u - 2\text{id}_E)(z) = (u - 2\text{id}_E)(u(x) - x) = ((u - 2\text{id}_E) \circ (u - \text{id}_E))(x) = (u^2 - 3u + 2\text{id}_E)(x) = 0$$

donc $z \in \text{Ker}(u - 2\text{id}_E)$. Cette “synthèse” montre que les conditions données sur y et z sont **suffisantes** et prouve l'**existence** de la décomposition.

Moralité : $E = \text{Ker}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{id}_E)$.

Deuxième méthode : en utilisant le cours sur les projecteurs

Posons $p = u - \text{id}_E$, alors

$$p^2 = (u - \text{id}_E)^2 = u^2 - 2u + \text{id}_E = 3u - 2\text{id}_E - 2u + \text{id}_E = u - \text{id}_E = p :$$

l'endomorphisme p est donc un projecteur de l'espace E ; son **projecteur associé** est $q = \text{id}_E - p = \text{id}_E - (u - \text{id}_E) = 2\text{id}_E - u$. Rappelons que deux projecteurs p et q sont dits **associés** s'ils vérifient la relation $p + q = \text{id}_E$, et que cette relation équivaut aux conditions $\{\text{Ker } q = \text{Im } p ; \text{Im } q = \text{Ker } p\}$. On sait enfin que l'image et le noyau d'un projecteur sont supplémentaires (géométriquement, l'image est le sous-espace sur lequel on projette, le noyau est la direction de projection), on a donc

$$E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p = \text{Ker } p \oplus \text{Ker } q = \text{Ker } p \oplus \text{Ker}(-q) = \text{Ker}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{id}_E) .$$

7. Soient a et b deux réels distincts, soient f, p, q trois endomorphismes d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E vérifiant les relations

$$\begin{cases} p + q = \text{id}_E \\ a p + b q = f \\ a^2 p + b^2 q = f^2 \end{cases} .$$

- a. Vérifier la relation $(f - a \text{id}_E) \circ (f - b \text{id}_E) = 0$.
- b. Montrer que p et q sont des projecteurs associés.
- c. Montrer que $f^m = a^m p + b^m q$ pour tout entier naturel m .

a. On développe, dans $\mathcal{L}(E)$:

$$\begin{aligned} (f - a \text{id}_E) \circ (f - b \text{id}_E) &= f^2 - (a + b) f + ab \text{id}_E \\ &= (a^2 p + b^2 q) - (a + b)(a p + b q) + ab(p + q) \\ &= [a^2 - (a + b)a + ab] p + [b^2 - (a + b)b + ab] q \\ &= 0 . \end{aligned}$$

b. On a déjà la relation $p + q = \text{id}_E$, il ne reste plus qu'à montrer que p et q sont des projecteurs. En fait, il suffit de montrer que p est un projecteur car alors $q^2 = (\text{id}_E - p)^2 = \text{id}_E - 2p + p^2 = \text{id}_E - p = q$, donc q sera aussi un projecteur.

Mais on peut remarquer que $f - a \text{id}_E = (ap + bq) - a(p + q) = (b - a) q$, et de même $f - b \text{id}_E = (a - b) p$. La relation obtenue en **a.** se réécrit alors $-(a - b)^2 q \circ p = 0$, soit $q \circ p = 0$ puisque $a \neq b$. On a donc $(\text{id}_E - p) \circ p = 0$, soit $p - p^2 = 0$: l'endomorphisme p est bien un projecteur, et $q = \text{id}_E - p$ est le projecteur associé (autrement dit $\text{Ker } q = \text{Im } p$ et $\text{Im } q = \text{Ker } p$).

c. La relation est vraie pour $m = 0$, $m = 1$ et $m = 2$. Si on la suppose vraie pour un m donné, alors

$$f^{m+1} = f \circ f^m = (ap + bq) \circ (a^m p + b^m q) = a^{m+1} p + b^{m+1} q$$

si l'on développe en tenant compte des relations $p \circ p = p$, $q \circ q = q$, $q \circ p = p \circ q = 0$. La preuve est donc achevée par récurrence.

8. Soient u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E , et F un sous-espace vectoriel de E .

a. Exprimer $u^{-1}(u(F))$ en fonction de F et de $\text{Ker } u$.

b. Exprimer $u(u^{-1}(F))$ en fonction de F et de $\text{Im } u$.

a. Soit $x \in E$, on a alors

$$\begin{aligned}x \in u^{-1}(u(F)) &\iff u(x) \in u(F) \\ &\iff \exists y \in F \quad u(x) = u(y) \\ &\iff \exists y \in F \quad x - y \in \text{Ker } u \\ &\iff x \in F + \text{Ker } u .\end{aligned}$$

Ainsi, $u^{-1}(u(F)) = F + \text{Ker } u$.

b. Soit $y \in E$, on a alors

$$y \in u(u^{-1}(F)) \iff \exists x \in u^{-1}(F) \quad y = u(x) \iff \exists x \in E \quad y = u(x) \quad \text{et} \quad u(x) \in F .$$

Donc $u(u^{-1}(F)) = F \cap \text{Im } u$.

9. Soient f, g, h des endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que

$$f \circ g = h, \quad g \circ h = f \quad \text{et} \quad h \circ f = g .$$

a. Montrer que f, g, h ont même noyau et même image.

b. Montrer que $f^2 = g^2 = h^2$, puis que $f^5 = f$.

c. En déduire que $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.

a. La relation $f \circ g = h$ entraîne classiquement $\text{Im}(h) \subset \text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(h)$. En "faisant tourner", on obtient les inclusions $\text{Im}(h) \subset \text{Im}(f) \subset \text{Im}(g) \subset \text{Im}(h)$, d'où l'égalité des images, et $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(h) \subset \text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$, d'où l'égalité des noyaux.

b. On omettra le symbole \circ de composition des applications. On a d'abord

$$f^2 = (gh)f = g(hf) = g^2 = (hf)g = h(fg) = h^2 .$$

Ensuite,

$$f = gh = g(fg) = g(gh)(hf) = g^2h^2f = f^5 .$$

c. Procédons par analyse-synthèse:

- Analyse: soit $x \in E$, supposons $x = y + z$ avec $y \in \text{Im}(f)$ et $z \in \text{Ker}(f)$, alors il existe $t \in E$ tel que $y = f(t)$, ainsi $x = f(t) + z$. En appliquant f^4 , on obtient $f^4(x) = f^5(t) = f(t) = y$. Ainsi, $y = f^4(x)$ et $z = x - f^4(x)$, ce qui prouve l'unicité de la décomposition.

- Synthèse: soit $x \in E$, posons $y = f^4(x)$ et $z = x - f^4(x)$. Alors $y + z = x$, et on a bien $y \in \text{Im}(f)$ et $z \in \text{Ker}(f)$ car $f = f^5$, ceci prouve l'existence d'une décomposition.

Applications linéaires en dimension finie.

10. Soit n un entier au moins égal à 2, soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par

$$\Phi : P \mapsto Q \quad \text{tel que} \quad Q(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

Déterminer le degré du polynôme $Q_k = \Phi(X^k)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En déduire l'image de Φ .
Déterminer le noyau de Φ .

On s'assure d'abord que Φ est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$: la linéarité est immédiate, et si $Q = \Phi(P)$, on a manifestement $\deg(Q) \leq \deg(P)$, donc Φ va de $\mathbb{K}_n[X]$ dans lui-même.

Mais il y a mieux : calculons les images par Φ des polynômes de la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Déjà $Q_0 = \Phi(1) = 0$ et $Q_1 = \Phi(X) = 0$, d'où l'inclusion $\mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X) \subset \text{Ker } \Phi$. Pour $k \geq 2$, on montre (*calcul laissé à l'estimable lecteur*) que le polynôme $Q_k = \Phi(X^k)$ est de degré $k-2$ exactement, les termes de degrés k et $k-1$ s'annihilant mais pas ceux de degré $k-2$, puisque le coefficient de X^{k-2} dans Q_k est $k(k-1)$.

Or, $\text{Im } \Phi$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$ engendré par les vecteurs $\Phi(X^k)$ pour $0 \leq k \leq n$, ou encore pour $2 \leq k \leq n$, puisque les deux premiers sont nuls. La famille (Q_2, \dots, Q_n) est constituée de polynômes non nuls de degrés tous distincts (famille échelonnée en degrés), elle est donc libre ; et comme elle est constituée de $n-1$ polynômes de $\mathbb{K}_{n-2}[X]$ qui est de dimension $n-1$, c'est une base de $\mathbb{K}_{n-2}[X]$. Donc $\text{Im}(\Phi) = \mathbb{K}_{n-2}[X]$.

Donc $\text{rg}(\Phi) = \dim(\text{Im } \Phi) = n-1$, puis $\dim(\text{Ker } \Phi) = (n+1) - (n-1) = 2$ par le théorème du rang. Comme $\text{Ker } \Phi$ contient $\mathbb{R}_1[X]$ qui est de dimension 2, alors $\text{Ker } \Phi = \mathbb{R}_1[X]$.

11. **Noyaux itérés d'un endomorphisme.** Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, soit u un endomorphisme de E . Pour tout entier naturel k , on note $n_k = \dim(\text{Ker } u^k)$.

- Montrer que la suite (n_k) est croissante.
- On pose $p = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n_{k+1} = n_k\}$. Justifier l'existence d'un tel entier p .
- Montrer que $n_k = n_p$ pour tout entier k supérieur à p .
- Montrer que $E = \text{Ker } u^p \oplus \text{Im } u^p$.

a. Pour tout entier k , notons $N_k = \text{Ker}(u^k)$, ce sont les **noyaux itérés** de l'endomorphisme u . On a $N_0 = \text{Ker}(\text{id}_E) = \{0_E\}$ donc $n_0 = 0$, et la suite de sous-espaces (N_k) est croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire $N_k \subset N_{k+1}$ (*évident*), d'où il résulte que $n_k \leq n_{k+1}$: la suite d'entiers naturels (n_k) est donc croissante.

b. Il existe au moins un entier k tel que $n_k = n_{k+1}$: en effet, si ce n'était pas le cas, on aurait $n_{k+1} > n_k$ pour tout k et, comme les n_k sont des entiers, cela entraînerait $n_{k+1} \geq n_k + 1$ pour tout k puis, par une récurrence immédiate, $n_k \geq k$ pour tout k , on aurait donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} n_k = +\infty$, ce qui est absurde puisqu'on doit avoir $n_k \leq \dim E$ pour tout k .

L'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid n_{k+1} = n_k\}$ est une partie de \mathbb{N} non vide, elle admet donc un plus petit élément (un minimum) p .

c. On a en particulier $n_{p+1} = n_p$, donc $N_{p+1} = N_p$ (*on connaît l'inclusion $N_p \subset N_{p+1}$ et on a l'égalité des dimensions*). On va prouver que $N_p = N_{p+1} = N_{p+2} = \dots$, autrement dit la

suite des noyaux itérés de u est stationnaire à partir du rang p , il suffit pour cela de prouver que $N_{p+k+1} = N_{p+k}$ pour tout entier naturel k . On a déjà l'inclusion $N_{p+k} \subset N_{p+k+1}$. Soit maintenant $x \in N_{p+k+1}$, alors $u^{p+k+1}(x) = 0_E$, soit $u^{p+1}(u^k(x)) = 0_E$, donc $u^k(x) \in N_{p+1}$, donc $u^k(x) \in N_p$ (cf. plus haut), donc $u^{p+k}(x) = 0_E$ et $x \in N_{p+k}$, ce qui prouve l'inclusion inverse. La suite d'entiers (n_k) est donc aussi stationnaire à partir du rang p .

- d. Soit $x \in \text{Ker } u^p \cap \text{Im } u^p$, alors $u^p(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = u^p(y)$. On a alors $0_E = u^p(x) = u^{2p}(y)$, soit $y \in N_{2p}$. Mais $N_{2p} = N_p$, donc $y \in N_p$, c'est-à-dire $x = u^p(y) = 0_E$. On a ainsi prouvé que $\text{Ker } u^p \cap \text{Im } u^p = \{0_E\}$, ces deux sous-espaces sont donc "en somme directe". Il en résulte que

$$\dim(\text{Ker } u^p + \text{Im } u^p) = \dim(\text{Ker } u^p) + \dim(\text{Im } u^p) = \dim E,$$

la deuxième égalité découlant du théorème du rang. Donc $\text{Ker } u^p + \text{Im } u^p = E$: ces deux sous-espaces sont supplémentaires, ce qui s'écrit $\text{Ker } u^p \oplus \text{Im } u^p = E$.

12. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme **nilpotent** (il existe un entier naturel k tel que $u^k = 0$).

- a. Soit x un vecteur de E . Soit q le plus petit entier naturel tel que $u^q(x) = 0_E$ (*justifier son existence*). Montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est libre. En déduire que $u^n = 0$.
- b. On suppose de plus $u^{n-1} \neq 0$ (justifier l'existence de tels endomorphismes). Montrer que l'endomorphisme u n'admet pas de racine carrée (c'est-à-dire il n'existe pas d'endomorphisme f de E tel que $f^2 = u$).

- a. Le vecteur $x \in E$ étant fixé, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u^k(x) = 0_E\}$ est une partie de \mathbb{N} , non vide puisque l'endomorphisme u est nilpotent. On peut donc définir un entier naturel $q = \min\{k \in \mathbb{N} \mid u^k(x) = 0_E\}$. Cet entier q ou $q(x)$ dépend du choix du vecteur x . *Remarquons que, si $x \neq 0_E$, alors $q \geq 1$ et $u^{q-1}(x) \neq 0_E$. Si $x = 0_E$, alors $q = 0$ et la famille $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est vide!* Soient maintenant $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}$ des scalaires

tels que $\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$; en appliquant u^{q-1} , on obtient $\lambda_0 u^{q-1}(x) = 0_E$ (puisque $u^k(x) = 0_E$ pour tout $k \geq q$), donc $\lambda_0 = 0$ puisque $u^{q-1}(x)$ n'est pas le vecteur nul.

Comme λ_0 est nul, il reste la relation $\sum_{k=1}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$; en appliquant maintenant u^{q-2} ,

on déduit de la même façon $\lambda_1 = 0$. De proche en proche (*les courageux rédigeront une récurrence, moi je vais aller chercher des champignons dans la forêt*), on montre que les λ_k ($0 \leq k \leq q-1$) sont tous nuls, la famille considérée est donc libre. Comme $\dim E = n$, cette famille comporte au plus n éléments, soit $q(x) \leq n$ pour tout vecteur x de E . On a donc $u^n(x) = 0_E$ pour tout x , donc u^n est l'endomorphisme nul.

- b. Dans un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n , il existe des endomorphismes nilpotents d'indice $n-1$ (c'est-à-dire tels que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$). Pour en construire un, considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E , soit u l'endomorphisme tel que $u(e_1) = 0_E$, et $u(e_k) = e_{k-1}$ si $2 \leq k \leq n$; on vérifie que $u^n(e_k) = 0_E$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donc $u^n = 0$, mais $u^{n-1}(e_n) = e_1$ donc $u^{n-1} \neq 0$. Cet endomorphisme est représenté dans la base \mathcal{B} par

$$\text{la matrice } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & (0) \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}.$$

Supposons qu'il existe un endomorphisme f tel que $f^2 = u$. Alors $u^n = f^{2n} = 0$, donc f est nilpotent. De la question **a.**, on déduit alors que $f^n = 0$. Mais comme $2n - 2 \geq n$ (à condition bien sûr de supposer que $n = \dim E \geq 2$), on a aussi $f^{2n-2} = 0$, c'est-à-dire $u^{n-1} = 0$, ce qui est contradictoire. L'endomorphisme u n'admet donc pas de "racine carré".

13. Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . On considère les quatre assertions suivantes:

- (1) : $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$
- (2) : $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$
- (3) : $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$
- (4) : $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$.

- a. Montrer que (1) \iff (3) et (2) \iff (4).
- b. Montrer que les quatre assertions sont équivalentes si E est de dimension finie.
- c. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

a. (1) \implies (3): Supposons $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$, soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$, alors $f(x) = 0_E$ et il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$. Alors $f^2(t) = f(x) = 0_E$, i.e. $t \in \text{Ker}(f^2)$. D'après l'hypothèse, $t \in \text{Ker}(f)$, soit $x = f(t) = 0_E$. Donc $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$.

(3) \implies (1): Supposons $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$. L'inclusion $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ est triviale. Par ailleurs, si $x \in \text{Ker}(f^2)$, alors $f(x) \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$ donc $f(x) = 0_E$ d'après l'hypothèse, et $x \in \text{Ker}(f)$.

(2) \implies (4): Supposons $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$. Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \text{Im}(f)$, donc $f(x) \in \text{Im}(f^2)$ et il existe $t \in E$ tel que $f(x) = f^2(t)$, i.e. $f(x - f(t)) = 0_E$, donc $x - f(t) \in \text{Ker}(f)$. On a donc $x = (x - f(t)) + f(t) \in \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$. On a ainsi prouvé que $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$.

(4) \implies (2): Supposons $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$. L'inclusion $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ est triviale. Soit alors $x \in \text{Im}(f)$, il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$, et l'hypothèse faite permet de décomposer $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in \text{Ker}(f)$ et $y_2 \in \text{Im}(f)$, donc $y_2 = f(z)$ avec $z \in E$. On a alors $x = f(y_1) + f(y_2) = f(y_2) = f^2(z) \in \text{Im}(f^2)$, ce qui prouve l'inclusion $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$.

- b. Supposons $\dim(E) = n$. Si on a (1), alors $\dim(\text{Im}(f^2)) = \dim(\text{Im}(f)) = n - \dim(\text{Ker}(f))$ par le théorème du rang. Comme on a l'inclusion triviale $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$, on déduit l'égalité, ainsi (1) \implies (2). On montre de même que (2) \implies (1). Les quatre assertions sont donc équivalentes.
- c. Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $f = D : P \mapsto P'$ (opérateur de dérivation). Alors D est surjectif (tout

polynôme $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ admet pour antécédent par D le polynôme $\sum_{k=0}^d \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$ (entre autres), donc D^2 l'est aussi et $\text{Im}(D) = \text{Im}(D^2) = E$. Mais on a $\text{Ker}(D) = \mathbb{K}_0[X]$ et $\text{Ker}(D^2) = \mathbb{K}_1[X]$, donc $\text{Ker}(D^2) \neq \text{Ker}(D)$. Cet endomorphisme D de E satisfait (2) et (4), mais pas (1) et (3).

Toujours avec $E = \mathbb{K}[X]$, l'endomorphisme $f : P \mapsto XP$ satisfait (1) et (3), mais pas (2) et (4). *L'estimable lecteur écrira les détails.*

14. Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension n . On suppose que $u + v = \text{id}_E$ et $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq n$. Montrer que u et v sont des projecteurs.

 Le théorème du rang donne $(n - \dim \text{Ker } u) + (n - \dim \text{Ker } v) \leq n$, soit encore $\dim(\text{Ker } u) + \dim(\text{Ker } v) \geq n$. Or, les sous-espaces $\text{Ker } u$ et $\text{Ker } v$ sont en somme directe: si $x \in \text{Ker } u \cap \text{Ker } v$, alors $x = \text{id}_E(x) = u(x) + v(x) = 0_E$, donc $\dim(\text{Ker } u + \text{Ker } v) \geq n$, et finalement $\dim(\text{Ker } u + \text{Ker } v) = n$, et $E = \text{Ker } u \oplus \text{Ker } v = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(\text{id}_E - u)$.

Si un vecteur x de E se décompose en $x = y + z$ avec $y \in \text{Ker}(u)$ et $z \in \text{Ker}(\text{id}_E - u)$, alors $u(x) = u(y) + u(z) = z$, puis $u^2(x) = u(z) = z = u(x)$, on a donc $u^2 = u$ et u est un projecteur. Comme u et v jouent le même rôle, v est aussi un projecteur. Ce sont deux projecteurs "associés".

15. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E , vérifiant $f \circ g = \text{id}_E$.

- Montrer que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$.
- Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$.
- Dans quel cas peut-on conclure que $g = f^{-1}$?
- Que dire de l'endomorphisme $g \circ f$?

- a. L'inclusion $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ est banale. De $f = (f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f)$, on déduit l'autre inclusion.

De même, l'inclusion $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ est triviale, l'inclusion réciproque résulte de $g = g \circ (f \circ g) = (g \circ f) \circ g$.

- b. Procédons par analyse-synthèse.

Analyse: soit $x \in E$, supposons $x = y + z$ avec $y \in \text{Ker}(f)$ et $z \in \text{Im}(g)$, il existe donc $t \in E$ tel que $z = g(t)$. Ensuite, $f(x) = f(z) = (f \circ g)(t) = t$, donc $z = g(t) = (g \circ f)(x)$ et, par différence, $y = x - (g \circ f)(x)$. Cela prouve l'unicité de la décomposition.

Synthèse: Soit $x \in E$, posons $y = x - (g \circ f)(x)$ et $z = (g \circ f)(x)$, alors $y + z = x$, et on a bien $f(y) = f(x) - (f \circ g)(f(x)) = 0_E$ donc $y \in \text{Ker}(f)$ et $z = g(f(x)) \in \text{Im}(g)$, ce qui prouve l'existence de la décomposition.

Variante. On a $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ f$, ainsi $g \circ f$ est un projecteur, il résulte alors du cours que $E = \text{Ker}(g \circ f) \oplus \text{Im}(g \circ f)$, ce qui permet de conclure avec la question a.

- c. Pour affirmer que $g = f^{-1}$, il faudrait avoir aussi $g \circ f = \text{id}_E$, c'est le cas notamment si E est de dimension finie. En effet, dans ce cas, f étant injective (conséquence immédiate de $f \circ g = \text{id}_E$), elle est alors bijective d'où l'existence de la réciproque f^{-1} ; ensuite,

$$g = (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ \text{id}_E = f^{-1} .$$

- d. L'endomorphisme $g \circ f$ est un projecteur, cf. question b.

16. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie.

- a. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \leq \min \{ \text{rg}(f), \text{rg}(g) \}$.

- b. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \geq \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim(E)$. Considérer l'application linéaire $u = g|_{\text{Im}(f)}$.

- c. Soient f_1, \dots, f_m des endomorphismes de E . Montrer que

$$\dim(\text{Ker}(f_1 \circ \dots \circ f_m)) \leq \sum_{k=1}^m \dim(\text{Ker } f_k) .$$

- a. On a $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$, d'où, en passant aux dimensions, $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$. Par ailleurs, $\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im}(f))$ et, comme une application linéaire diminue toujours les dimensions, $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$. On a bien obtenu $\text{rg}(g \circ f) \leq \min \{ \text{rg}(f), \text{rg}(g) \}$.

- b. On applique le théorème du rang à l'application linéaire $u = g|_{\text{Im}(f)} : \text{Im } f \rightarrow E$, cela donne

$$\dim(\text{Im } f) = \dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Ker } u) .$$

mais $\text{Im } u = g(\text{Im } f) = \text{Im}(g \circ f)$ et $\text{Ker } u = \text{Ker } g \cap \text{Im } f \subset \text{Ker } g$, donc

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(g \circ f) + \dim(\text{Ker } g \cap \text{Im } f) \leq \text{rg}(g \circ f) + \dim(\text{Ker } g) ,$$

ou encore $\text{rg}(g \circ f) \geq \text{rg}(f) - \dim(\text{Ker } g)$. En appliquant maintenant le théorème du rang à l'application linéaire g , on a $\dim(\text{Ker } g) = \dim E - \text{rg}(g)$ et, en substituant, il vient

$$\text{rg}(g \circ f) \geq \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim(E) .$$

- c. Par récurrence sur m : la propriété est triviale pour $m = 1$ et, si elle est vraie pour un $m \in \mathbb{N}^*$ donné, soient $m + 1$ endomorphismes f_1, \dots, f_m, f_{m+1} , posons $g = f_1 \circ \dots \circ f_m$,

on a par hypothèse $\dim(\text{Ker}(g)) \leq \sum_{k=1}^m \dim(\text{Ker } f_k)$, ce qui s'écrit aussi, grâce au théorème

du rang

$$\text{rg}(g) \geq \sum_{k=1}^m \text{rg}(f_k) - (m - 1) \dim(E) .$$

En appliquant le b., on déduit

$$\text{rg}(f_1 \circ \dots \circ f_m \circ f_{m+1}) = \text{rg}(g \circ f_{m+1}) \geq \text{rg}(g) + \text{rg}(f_{m+1}) - \dim(E) \geq \sum_{k=1}^{m+1} \text{rg}(f_k) - m \dim(E) ,$$

ce qui, de nouveau par le théorème du rang, donne $\dim(\text{Ker}(f_1 \circ \dots \circ f_{m+1})) \leq \sum_{k=1}^{m+1} \dim(\text{Ker } f_k)$,
ce qu'il fallait démontrer.

- 17.** Soient f et g deux endomorphismes d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie n . On suppose que $f \circ g = 0$ et que $f + g$ est un automorphisme de l'espace vectoriel E . Montrer que

$$\text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g) = E .$$

L'endomorphisme $f + g$ est en particulier surjectif, donc $\text{Im}(f + g) = E$, donc $\text{Im } f + \text{Im } g = E$: en effet, on a toujours l'inclusion $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$.

Il reste donc à montrer que la somme est directe, c'est-à-dire $\text{Im } f \cap \text{Im } g = \{0\}$. Or

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) &= \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Im } g) - \dim(\text{Im } f + \text{Im } g) \\ &= \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - n . \end{aligned}$$

Mais la relation $f \circ g = 0$ se traduit par $\text{Im } g \subset \text{Ker } f$, qui implique

$$\text{rg}(g) = \dim(\text{Im } g) \leq \dim(\text{Ker } f) = n - \text{rg}(f) ,$$

donc $\dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - n \leq 0$, d'où la conclusion.

- 18.** Soient f et g deux endomorphismes d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie.

- a. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g) \iff E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(g)$.
- b. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{0\}$.

- a. \implies Supposons $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$. Comme on a l'inclusion triviale $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ et l'égalité des dimensions, on a donc $\text{Im}(g) = \text{Im}(g \circ f)$. Soit $x \in E$, alors $g(x) \in \text{Im}(g)$ donc $g(x) \in \text{Im}(g \circ f)$, donc il existe $y \in E$ tel que $g(x) = g(f(y))$. On a alors $g(x - f(y)) = 0_E$ donc $x - f(y) \in \text{Ker}(g)$. Ainsi, $x = f(y) + (x - f(y)) \in \text{Im}(f) + \text{Ker}(g)$.

\Leftarrow Supposons $E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(g)$, montrons alors que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$. L'inclusion directe est immédiate. Réciproquement, soit $y \in \text{Im}(g)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$, on peut décomposer $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \text{Im}(f)$ et $x_2 \in \text{Ker}(g)$, donc il existe $t \in E$ tel que $x_1 = f(t)$, puis $y = g(x_1 + x_2) = g(x_1) = g(f(t)) \in \text{Im}(g \circ f)$. On a donc aussi l'inclusion $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(g \circ f)$.

- b. \implies Supposons $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$. Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim \text{Ker}(g \circ f) = \dim(\text{Ker } f)$. Comme on a l'inclusion triviale $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$, on a donc $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$. Soit alors $x \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g)$, on a donc $g(x) = 0_E$ et il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$. Ainsi, $g(f(t)) = 0_E$ et $t \in \text{Ker}(g \circ f)$, d'où $t \in \text{Ker}(f)$, donc $x = f(t) = 0_E$. On a bien prouvé que $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{0_E\}$.

\Leftarrow Supposons $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{0_E\}$. On a l'inclusion triviale $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$, montrons donc l'inclusion réciproque! Si $x \in \text{Ker}(g \circ f)$, alors $g(f(x)) = 0_E$, donc $f(x) \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g)$, donc $f(x) = 0_E$ et $x \in \text{Ker}(f)$. De l'égalité $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$,

on déduit l'égalité des dimensions de ces sous-espaces puis, par théorème du rang, l'égalité $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$.

Calcul matriciel.

19. Soit n un entier naturel, $n \geq 2$. Les lettres i, j, k, l représenteront des entiers de l'intervalle $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note E_i (avec un seul indice) le i -ème vecteur de la base canonique de l'espace

vectorel \mathbb{K}^n identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, i.e. $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le coefficient 1 étant placé à

la position i . On note $E_{i,j}$ (avec deux indices) la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient en position (i, j) vaut 1, les autres étant nuls, $E_{i,j}$ est appelée **matrice élémentaire**.

- Effectuer les produits $E_i^\top E_j$, $E_i E_j^\top$ et $E_{i,j} E_{k,l}$. On pourra utiliser le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.
- Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Que représentent les produits $E_i^\top A$, $A E_j$ et $E_i^\top A E_j$?
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $A E_{i,j} = E_{i,j} A$ pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Montrer que A est une **matrice scalaire**, i.e. de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A commute avec toute matrice inversible:

$$\forall M \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \quad AM = MA.$$

Montrer que A est une matrice scalaire.

- D'abord $E_i^\top E_j \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}$ est un scalaire, on obtient $E_i^\top E_j = \delta_{i,j}$. Plus généralement, si $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)^\top$ et $Y = (y_1 \ \cdots \ y_n)^\top$ sont deux matrices-colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $X^\top Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un scalaire que l'on peut interpréter (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) comme le produit scalaire des "vecteurs" X et Y , il s'agit ici du produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .

Puis $E_i E_j^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée et on vérifie que $E_i E_j^\top = E_{i,j}$. Plus généralement, si $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)^\top$ et $Y = (y_1 \ \cdots \ y_n)^\top$ sont deux matrices-colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors XY^\top est une matrice carrée d'ordre n dont le coefficient d'indices (i, j) vaut $x_i y_j$. On pourra noter que cette matrice XY^\top est nulle si et seulement si l'un des vecteurs X ou Y est nul et que, sinon, elle est de rang 1.

Enfin, par associativité, $E_{i,j} E_{k,l} = (E_i E_j^\top)(E_k E_l^\top) = E_i (E_j^\top E_k) E_l^\top = \delta_{j,k} E_i E_l^\top$, on obtient la **règle des dominos**:

$$E_{i,j} E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}.$$

- Les matrices-éléments $E_{i,j}$ constituent la base canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on écrit donc la matrice A sous la forme $A = \sum_{k,l} a_{k,l} E_{k,l}$ (on somme sur tous les couples (k, l))

appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket^2$). Alors $E_i^\top A \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ est une matrice-ligne, plus précisément

$$E_i^\top A = E_i^\top \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l} E_{k,l} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l} E_i^\top E_{k,l},$$

mais $E_i^\top E_{k,l} = E_i^\top (E_k E_l^\top) = (E_i^\top E_k) E_l^\top = \delta_{i,k} E_l^\top$, donc

$$E_i^\top A = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \delta_{i,k} a_{k,l} E_l^\top = \sum_{l=1}^n a_{i,l} E_l^\top = (a_{i,1} \ \cdots \ a_{i,n}) = L_i(A),$$

c'est la i -ième ligne de la matrice A . Bien sûr on peut retrouver ce résultat de façon un peu moins formelle, mais c'est aussi un bon entraînement de travailler un peu avec les matrices E_i et $E_{i,j}$.

De façon analogue, $AE_j = \sum_{k=1}^n a_{k,j} E_k = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la n -ième colonne de A .

Enfin, $E_i^\top AE_j = a_{i,j} \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}$ est le coefficient d'indices (i, j) de la matrice A .

- c. Identifions les coefficients d'indices (k, l) des matrices $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$, on peut écrire cela sous la forme

$$E_k^\top AE_{i,j} E_l = E_k^\top E_{i,j} A E_l,$$

soit encore

$$E_k^\top A E_i E_j^\top E_l = E_k^\top E_i E_j^\top A E_l,$$

soit encore

$$\forall (i, j, k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4 \quad \delta_{j,l} a_{k,i} = \delta_{k,i} a_{j,l}.$$

En prenant i et k distincts et, par exemple, $j = l = 1$, on obtient $a_{k,i} = 0$: les coefficients de A en dehors de la diagonale sont donc nuls.

En prenant i et k égaux et $j = l = 1$, on obtient $a_{i,i} = a_{1,1}$: les coefficients diagonaux de la matrice A sont tous égaux.

Donc A est une matrice scalaire.

- d. Les matrices $I_n + E_{i,j}$ sont inversibles. En effet,

- si $i = j$, c'est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent 1 sauf celui en i -ième position qui vaut 2 ;

- si $i \neq j$, c'est une matrice triangulaire (supérieure si $i < j$, inférieure si $i > j$) dont les coefficients diagonaux valent 1.

Remarque. Ces matrices sont associées à des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes, il s'agit de **matrices de dilatation** si $i = j$, et de **transvection** si $i \neq j$.

La matrice A commute donc avec toutes les matrices $I_n + E_{i,j}$, i.e.

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad A(I_n + E_{i,j}) = (I_n + E_{i,j})A.$$

On en déduit facilement que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad A E_{i,j} = E_{i,j} A.$$

De la question c., on déduit alors que A est une matrice scalaire.

20. On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n à coefficients dans le corps \mathbb{K} . Montrer que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et que cet ensemble est stable par le produit matriciel. Montrer que, si une matrice A de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est inversible, alors son inverse A^{-1} appartient aussi à $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. *Pour cette dernière question, on pourra considérer l'application $\varphi : M \mapsto AM$.*

- Clairement, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices-éléments $E_{i,j}$ telles que $i \leq j$. On en déduit facilement que $\dim(\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Pour montrer la stabilité de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ par produit, il y a plusieurs options possibles:
 - montrer que, si $E_{i,j}$ et $E_{k,l}$ sont deux matrices élémentaires avec $i \leq j$ et $k \leq l$, alors leur produit est encore dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (la stabilité de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ par combinaisons linéaires achèvera la preuve), et ceci est vrai puisque $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$ (règle des dominos) est nulle si $j \neq k$, et vaut $E_{i,l}$ avec $i \leq l$ si $j = k$.

- travailler sur les coefficients: une matrice $A = (a_{i,j})$ est triangulaire supérieure si et seulement si $a_{i,j}$ est nul pour tout couple (i,j) tel que $i > j$. Si A et B sont triangulaires supérieures, soit $C = AB$, on a alors $c_{i,k} = \sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,k}$ et, si $i > k$, pour tout j on a alors $i > j$ ou $j > k$ (la contraposée est immédiate: si $i \leq j$ et $j \leq k$, alors $i \leq k$), donc le produit $a_{i,j}b_{j,k}$ est nul. Les coefficients $c_{i,k}$ avec $i > k$ sont donc nuls et $C = AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

- raisonner en termes de sous-espaces stables par l'endomorphisme de \mathbb{K}^n canoniquement associé, on aura l'occasion d'en parler bientôt!

- Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, supposée inversible. Soit l'application $\varphi : \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ définie par $\varphi(M) = AM$. Il est légitime de faire aller cette application de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ vers lui-même puisque l'on vient de prouver que, si A et M sont toutes deux triangulaires supérieures, alors le produit AM l'est aussi. Cette application φ est clairement linéaire, c'est donc un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Elle est injective, c'est une conséquence de l'inversibilité de A . Comme l'espace vectoriel $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est de dimension finie, elle est alors bijective, donc la matrice I_n , qui appartient à $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, admet un antécédent par φ ... ce qui signifie que $A^{-1} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

21. Théorème d'Hadamard. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à **diagonale strictement dominante**, c'est-à-dire telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Supposons qu'il existe un vecteur **non nul** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0$, soit $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$

un indice tel que $|x_s| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. En considérant la s -ième coordonnée du vecteur AX , obtenir une contradiction. En déduire que la matrice A est inversible.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale strictement dominante, supposons qu'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ **non nul** tel que $AX = 0$. Soit $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$ un indice tel que $|x_s| = \|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| > 0$. En écrivant que la s -ième coordonnée du vecteur

AX est nulle, on obtient la relation $\sum_{j=1}^n a_{s,j}x_j = 0$, que l'on peut écrire sous la forme

$$a_{s,s}x_s = - \sum_{j \neq s} a_{s,j}x_j, \text{ d'où l'on déduit}$$

$$|a_{s,s}| |x_s| = \left| \sum_{j \neq s} a_{s,j}x_j \right| \leq \sum_{j \neq s} |a_{s,j}| |x_j| \leq \left(\sum_{j \neq s} |a_{s,j}| \right) |x_s|.$$

En divisant par $|x_s|$ (qui est un réel strictement positif), on obtient $|a_{s,s}| \leq \sum_{j \neq s} |a_{s,j}|$, ce qui

est absurde. On a donc $AX = 0 \implies X = 0$, la matrice A est inversible (c'est le **théorème d'Hadamard**).

À titre d'exemple, les matrices ci-dessous sont à diagonale strictement dominante, donc inversibles :

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & -3 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 3 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

22. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$. Quelle inégalité peut-on obtenir concernant le rang de u ? Si $\text{rg } u = r$ ($r \neq 0$), montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de u est $M = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• La relation $u^2 = 0$ se traduit "trivialement" par l'inclusion $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$, d'où l'on déduit que $\dim(\text{Im } u) \leq \dim(\text{Ker } u)$. Mais, par le théorème du rang, on a $\dim(\text{Ker } u) = n - \text{rg}(u)$, cela donne donc $\text{rg } u \leq n - \text{rg } u$, ou encore $\text{rg}(u) \leq \frac{n}{2}$, soit encore $\text{rg}(u) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

• Pour obtenir la matrice demandée dans une certaine base de E , on voit que la base doit être adaptée à $\text{Ker } u$ (les $n - r$ premiers vecteurs sont dans $\text{Ker } u$). Soit donc S un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E ; alors S est de dimension r , notons (e_{n-r+1}, \dots, e_n) une base de S , et pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, posons $e_i = u(e_{n-r+i})$, ceci est cohérent puisque $r \leq n - r$. Les vecteurs e_1, \dots, e_r sont alors dans $\text{Im } u$, et comme il y a r vecteurs dans un espace de dimension r , pour montrer que (e_1, \dots, e_r) est une base de $\text{Im}(u)$, il suffit de montrer que la famille est

libre ; supposons $\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i = 0_E$ avec les λ_i scalaires, alors

$$0_E = \sum_{i=1}^r \lambda_i u(e_{n-r+i}) = u\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i e_{n-r+i}\right).$$

Le vecteur $\sum_{i=1}^r \lambda_i e_{n-r+i}$ appartient alors à $S \cap \text{Ker}(u)$, donc est nul puisque ces deux sous-espaces sont en somme directe ; comme la famille (e_{n-r+1}, \dots, e_n) est libre, on déduit enfin que les λ_i sont tous nuls. La famille (e_1, \dots, e_r) est donc une famille libre dans $\text{Ker } u$, on peut donc la compléter en une base $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{n-r})$ de $\text{Ker } u$. Comme $E = \text{Ker } u \oplus S$, la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, obtenue par concaténation d'une base de $\text{Ker } u$ et d'une base de S , est une base de E . Il est alors facile de vérifier que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

23. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $A = X^4 - 1$, $B = X^4 - X$. On considère l'application φ de E dans E qui, à tout polynôme P , associe le reste dans la division euclidienne de AP par B .

- a. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
- b. Écrire la matrice de φ relativement à la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
- c. Déterminer $\text{Ker } \varphi$.
- d. Montrer que $\text{Im } \varphi = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$.

a. L'image d'un polynôme de $E = \mathbb{R}_3[X]$ est bien un élément de E (le reste d'une division par $X^4 - X$ est de degré au plus trois). Si $\varphi(P_1) = R_1$ et $\varphi(P_2) = R_2$, on a alors $AP_1 = BQ_1 + R_1$, $AP_2 = BQ_2 + R_2$ avec $\deg R_1 < 4$, $\deg R_2 < 4$, où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes. Si λ et μ sont deux réels, on a alors $A(\lambda P_1 + \mu P_2) = B(\lambda Q_1 + \mu Q_2) + (\lambda R_1 + \mu R_2)$, avec $\deg(\lambda R_1 + \mu R_2) < 4$, ce qui montre que ce dernier polynôme est bien le reste de la division euclidienne de $A(\lambda P_1 + \mu P_2)$ par B , autrement dit que

$$\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda R_1 + \mu R_2 = \lambda \varphi(P_1) + \mu \varphi(P_2).$$

On a ainsi montré la linéarité de φ , qui est donc un endomorphisme de l'espace vectoriel E .

b. On calcule $\varphi(1) = X - 1$, $\varphi(X) = X^2 - X$, $\varphi(X^2) = X^3 - X^2$, $\varphi(X^3) = -X^3 + X$, d'où la matrice représentant φ dans la base canonique : $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

c. Considérons une matrice-colonne $V = (a \ b \ c \ d)^\top$; le système $AV = 0$ s'écrit

$$\{a = 0 ; a - b + d = 0 ; b - c = 0 ; c - d = 0\}$$

et se ramène à $\{a = 0 ; b = c = d\}$. Le noyau de l'endomorphisme φ est donc constitué des polynômes de la forme $bX^3 + bX^2 + bX$: c'est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $X^3 + X^2 + X$.

d. Le sous-espace $\text{Im } \varphi$ est de dimension trois, d'après le théorème du rang ; on peut en construire une base en prenant trois vecteurs-colonnes de la matrice M qui soient linéairement indépendants (on a $\text{rg } \varphi = \text{rg } M = 3$), par exemple $\text{Im } \varphi = \text{Vect}(X - 1, X^2 - X, X^3 - X^2)$ en choisissant les trois premières colonnes. Ces trois polynômes admettent effectivement 1 pour racine, d'où l'inclusion $\text{Im } \varphi \subset H$, en posant $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$; mais

on a aussi égalité des dimensions car H est un hyperplan de E puisque c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto P(1)$ sur E . Donc $\text{Im } \varphi = H$.

24. Inverser les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & & & (1) \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 2 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. On applique la méthode du pivot de Gauss-Jordan à la matrice augmentée $A' = (A \mid I_n)$,

soit $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$, précisément on effectue les opérations élémentaires sur les lignes $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, ainsi de suite jusqu'à

$L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$, on obtient $A'' = (I_n \mid A^{-1})$, avec $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$.

b. En effectuant les mêmes opérations qu'en a. sur la matrice augmentée $B' = (B \mid I_n)$, on obtient la matrice augmentée $(A \mid A^{-1})$. La matrice élémentaire associée à ces opérations sur les lignes étant A^{-1} , on a donc $A = A^{-1}B$, on réitère alors ces mêmes opérations pour

obtenir la matrice augmentée $(I_n \mid B^{-1})$, avec $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & & & 1 & -2 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$.

Notons que $B = A^2$, donc $B^{-1} = (A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

Sommes de sous-espaces vectoriels.

25. Soient E_1, \dots, E_m et F_1, \dots, F_m des sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . On suppose que $\bigoplus_{i=1}^m E_i = \bigoplus_{i=1}^m F_i$ et que $E_i \subset F_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Montrer que $E_i = F_i$ pour tout i .

Il suffit de montrer que $F_i \subset E_i$ pour tout i .

Or, si y_i est un vecteur appartenant à F_i , notons $y_i = \sum_{j=1}^m x_j$ sa décomposition suivant la somme directe $E = \bigoplus_{j=1}^m E_j$; on a alors, pour tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $x_j \in E_j$ donc $x_j \in F_j$; cette écriture est donc aussi la décomposition du vecteur y_i suivant la somme directe $E = \bigoplus_{j=1}^m F_j$; par unicité de cette dernière décomposition, on déduit $y_i = x_i \in E_i$ (et $x_j = 0_E$ pour tout $j \neq i$).

26. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, soient p_1, \dots, p_m des endomorphismes de E vérifiant les relations

$$p_i \circ p_j = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^m p_i = \text{id}_E .$$

Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } p_i$. Interpréter géométriquement les p_i .

Comme $\sum_{i=1}^m p_i = \text{id}_E$, on a déjà $\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^m p_i(x)$, donc $E = \sum_{i=1}^m \text{Im } p_i$.

De plus, $p_i = p_i \circ \text{id}_E = p_i \circ \left(\sum_{j=1}^m p_j \right) = \sum_{j=1}^m p_i \circ p_j = p_i^2$ puisque $p_i \circ p_j$ est nul pour $i \neq j$, donc p_i est un projecteur pour tout i .

Montrons que les sous-espaces $\text{Im } p_i$ sont en somme directe : si le vecteur nul se décompose en $0_E = \sum_{i=1}^m x_i$ avec, pour tout i , $x_i \in \text{Im } p_i$, alors $p_i(x_i) = x_i$ pour tout i (*tout vecteur appartenant à l'image d'un projecteur est invariant par ce projecteur*), et si $i \neq j$, alors $p_j(x_i) = p_j \circ p_i(x_i) = 0_E$, donc pour tout j ,

$$0_E = p_j(0_E) = p_j \left(\sum_{i=1}^m x_i \right) = \sum_{i=1}^m p_j(x_i) = p_j(x_j) = x_j \quad :$$

on a montré que chaque composante de la décomposition est nulle, ce qui prouve que la somme est directe. On a ainsi prouvé que $E = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } p_i$.

Enfin, soit $x \in E$ se décomposant en $x = \sum_{j=1}^m x_j$ avec $x_j \in \text{Im } p_j$ pour tout j . Un calcul analogue à celui fait ci-dessus montre que $p_i(x) = x_i$ pour tout i . Donc p_i est le projecteur sur $\text{Im } p_i$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} \text{Im } p_j$.

Sous-espaces stables.

27. Soit p un projecteur dans un espace vectoriel E , soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f et p commutent si et seulement si $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont stables par f .

L'implication dans le sens direct est du cours: lorsque deux endomorphismes commutent, le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

Supposons $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ stables par f . On sait que $\text{Im } p \oplus \text{Ker } p = E$ puisque p est un projecteur. Soit donc un vecteur x de E , décomposons-le en $x = y + z$ avec $y = p(x) \in \text{Im } p$ et $z \in \text{Ker } p$. Alors $(f \circ p)(x) = f(p(x)) = f(y)$, tandis que $f(x) = f(y) + f(z)$ avec $f(y) \in \text{Im } p$ et $f(z) \in \text{Ker } p$ (puisque ces deux sous-espaces sont stables par f), donc $(p \circ f)(x) = p(f(x)) = p(f(y)) = f(y)$ puisque tout vecteur appartenant à l'image d'un projecteur est invariant par ce projecteur. On a ainsi prouvé que $f \circ p = p \circ f$. D'où l'équivalence demandée.

28. Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie. On pose

$$N = \bigcup_{p=0}^{+\infty} \text{Ker}(u^p) \quad \text{et} \quad I = \bigcap_{p=0}^{+\infty} \text{Im}(u^p).$$

- a. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N = \text{Ker}(u^n)$ et $I = \text{Im}(u^n)$.
- b. Établir que N et I sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires stables par u , et que les endomorphismes induits u_N et u_I sont respectivement nilpotent et bijectif.
- c. Réciproquement on suppose $E = F \oplus G$, avec F et G sous-espaces vectoriels stables par u tels que les endomorphismes induits u_F et u_G soient respectivement nilpotent et bijectif. Établir $F = N$ et $G = I$.

- a. Si, pour tout k entier naturel, on pose $N_k = \text{Ker}(u^k)$ (noyaux itérés) et $I_k = \text{Im}(u^k)$ (images itérées), il est classique que la suite (N_k) est croissante pour l'inclusion, i.e. $N_k \subset N_{k+1}$ et qu'il existe un rang n à partir duquel elle est stationnaire, alors $N = \text{Ker}(u^n)$. La suite (I_k) , qui elle est décroissante pour l'inclusion, est alors stationnaire à partir de ce même rang n et on a $I = \text{Im}(u^n)$. *Le lecteur trouvera les détails dans l'exercice 11 ci-dessus.*
- b. On a $E = N \oplus I$ (cf. *exercice 11*), les s.e.v. N et I sont stables par u car ils sont respectivement le noyau et l'image de l'endomorphisme u^n qui commute avec u .
Si $x \in N$, alors $u^n(x) = (u_N)^n(x) = 0_E$, donc $(u_N)^n = 0$, l'endomorphisme u_N de N est nilpotent.
Si $x \in I$ vérifie $u_I(x) = 0_I$, soit $u(x) = 0_E$, alors $x \in \text{Ker}(u)$ donc $x \in N \cap I$. Comme $E = N \oplus I$, on déduit $x = 0_E$, on a prouvé que u_I est injectif. Comme c'est un endomorphisme d'un e.v. de dimension finie, il est bijectif.
- c. Soit $x \in F$, alors comme u_F est nilpotent, il existe k entier tel que $u^k(x) = (u_F)^k(x) = 0_E$, donc $x \in N$. On a ainsi prouvé l'inclusion $F \subset N$.
Soit $x_0 \in G$, alors comme u_G est bijectif donc surjectif, il existe $x_1 \in G$ tel que $x_0 = u_G(x_1) = u(x_1)$. On peut réitérer: il existe x_2 dans G tel que $u(x_2) = x_1$, alors

$x_0 = u^2(x_2)$. On construit par récurrence une suite (x_k) de vecteurs de G telle que, pour tout k entier naturel, $x_0 = u^k(x_k)$, ce qui prouve que $x_0 \in I$. On a ainsi l'inclusion $G \subset I$.

On a donc $E = F \oplus G = N \oplus I$ avec $F \subset N$ et $G \subset I$, ce qui entraîne $F = N$ et $G = I$. En effet, si $x \in N$, on peut décomposer x en $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On a alors l'égalité $x - x_F = x_G$ avec $x - x_F \in N$ et $x_G \in I$ et, ces deux sous-espaces étant supplémentaires, on déduit que $x - x_F = x_G = 0_E$, donc $x = x_F \in F$. On a donc prouvé l'inclusion $N \subset F$, d'où $F = N$. On obtient pareillement $G = I$.

Matrices par blocs.

29*. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, soient V un sous-espace vectoriel de E et W un sous-espace vectoriel de F . Montrer que l'ensemble

$$X = \left\{ f \in \mathcal{L}(E, F) \mid V \subset \text{Ker } f \quad \text{et} \quad \text{Im } f \subset W \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ et préciser sa dimension.

Il est clair que X est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.

Interprétons matriciellement: posons $p = \dim(E)$, $k = \dim(V)$, $n = \dim(F)$, $r = \dim(W)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_p)$ une base de E adaptée à V . Soit $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_n)$ une base de F adaptée à W . Une application linéaire f de E vers F est alors représentée dans ces bases par une matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ de format (n, p) . On peut décomposer M en quatre blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_{r, k}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{r, p-k}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r, k}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-r, p-k}(\mathbb{K})$. La condition $V \subset \text{Ker } f$ se traduit par la nullité des blocs A et C . La condition $\text{Im } f \subset W$ se traduit par la nullité des blocs C et D . Finalement, $f \in X$ si et seulement si M est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K})$ de cette forme est clairement isomorphe à $\mathcal{M}_{r, p-k}(\mathbb{K})$, donc de dimension $r(p-k)$. Enfin, l'application $f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ étant elle aussi un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ vers $\mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K})$, on a donc

$$\dim(X) = r(p-k) = (\dim W) (\dim E - \dim V) .$$

30. Soient $A \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p, q}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de M en fonction de celui de D .

On procède par opérations élémentaires sur les colonnes. On peut ainsi transformer M en M' puis en M'' avec:

$$M' = \begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M'' = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} .$$

En effet, $M = M'E$ avec $E = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \in \text{GL}_{p+q}(\mathbb{R})$, et $M' = M''F$ avec $F = \begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \in \text{GL}_{p+q}(\mathbb{R})$. Donc $\text{rg}(M) = \text{rg}(M'')$. Enfin, $\text{rg}(M'') = \text{rg}(I_p) + \text{rg}(D)$, donc $\text{rg}(M) = p + \text{rg}(D)$.

31*. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$, avec $A \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) \iff D = CA^{-1}B$.

Rappelons deux résultats utiles:

- On ne modifie pas le rang d'une matrice en la multipliant (à gauche ou à droite) par une matrice inversible. *C'est un résultat du cours.*

- Si une matrice M est diagonale par blocs : $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, alors $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$.

Ce n'est pas à proprement parler un résultat du cours, c'est assez évident intuitivement, mais c'est un peu pénible à rédiger en détail.

La matrice $J = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ est inversible, donc le rang de M est aussi celui du produit $M' = JM = \begin{pmatrix} I_p & A^{-1}B \\ C & D \end{pmatrix}$. La matrice $K = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -C & I_q \end{pmatrix}$ est inversible, donc

le rang de M' est aussi celui de $M'' = KM' = \begin{pmatrix} I_p & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$. Enfin, la ma-

trice $L = \begin{pmatrix} I_p & -A^{-1}B \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ est inversible, donc le rang de M'' est aussi celui du produit

$M''' = M''L = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$.

Au final, $\text{rg}(M) = \text{rg}(M''') = \text{rg}(I_p) + \text{rg}(D - CA^{-1}B) = p + \text{rg}(D - CA^{-1}B)$. Comme A est supposée inversible, $\text{rg}(A) = p$, et on a bien

$$\text{rg}(M) = \text{rg}(A) \iff \text{rg}(M) = p \iff \text{rg}(D - CA^{-1}B) = 0 \iff D = CA^{-1}B.$$

Solution de Virginie DUPUY, PSI 2, 2015-2016: Notons d'abord que la matrice $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q,p}(\mathbb{R})$ est de rang p : en effet, son rang ne peut dépasser p puisqu'elle a p colonnes, et son rang vaut au moins p puisque, A étant inversible, ses p premières lignes sont indépendantes.

Notons $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$ les colonnes de cette matrice $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$, elles forment une famille libre de $\mathbb{R}^{p+q} \simeq \mathcal{M}_{p+q,1}(\mathbb{R})$. Notons maintenant $\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_q$ les colonnes de la matrice

$\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q,q}(\mathbb{R})$. On a alors

$$\text{rg}(M) = \text{rg}(A) \iff \text{rg}(M) = \text{rg} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \iff \text{rg}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_p, \Gamma'_1, \dots, \Gamma'_q) = \text{rg}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_p)$$

$$\iff \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket \quad \Gamma'_j \in \text{Vect}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_p)$$

Or, pour tout j , la condition $\Gamma'_j \in \text{Vect}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_p)$ équivaut à l'existence d'un vecteur-colonne $X_j \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} X_j = \Gamma'_j$. La condition $\text{rg}(M) = \text{rg}(A)$ équivaut alors à l'existence d'une matrice $X \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, de colonnes X_1, \dots, X_q , telle que $\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} X$, soit $\begin{cases} AX = B & \text{(1)} \\ CX = D & \text{(2)} \end{cases}$. Comme A est inversible, l'équation (1) est satisfaite si et seulement si $X = A^{-1}B$. Finalement,

$$\text{rg}(M) = \text{rg}(A) \iff \text{(2)} \iff CA^{-1}B = D.$$

32. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n . Montrer l'équivalence entre

(a) : $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$

(b) : il existe $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, \mathcal{B} base de E et $A \in \text{GL}_r(\mathbb{R})$ tels que $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Supposons d'abord (b), notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base de E dans laquelle u est représenté par la matrice par blocs proposée. Comme A est supposée inversible de taille r , il est clair que $\text{rg}(A) = r$, donc $\text{rg}(u) = r$, puis que $\text{Im}(u) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$, et aussi que $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$. On a bien $E = \text{Im } u \oplus \text{Ker } u$.

Supposons maintenant (a). Posons $r = \text{rg}(u) = \dim(\text{Im } u)$. Comme $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont supplémentaires dans E , on peut construire une base de E en concaténant une base (e_1, \dots, e_r) de $\text{Im } u$ et une base (e_{r+1}, \dots, e_n) de $\text{Ker } u$. Comme $\text{Im } u$ est stable par u , la matrice de u dans une telle base \mathcal{B} adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$ est bien de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Enfin, la matrice A représente, dans la base (e_1, \dots, e_r) , l'endomorphisme v de $\text{Im } u$ induit par u . Cet endomorphisme v est en fait un automorphisme puisque $\text{Ker } v = \text{Ker } u \cap \text{Im } u = \{0\}$, donc v est injectif puis bijectif (endomorphisme en dimension finie), on en déduit que la matrice A est inversible, ce qui démontre (b).

Trace.

33.a. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe une matrice-colonne $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et une matrice-ligne $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telles que $M = CL$. Réciproque ?

b. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , soit u un endomorphisme de E , de rang 1. Démontrer la relation $u \circ u = \text{tr}(u) \cdot u$

a. Méthode 1. Les colonnes C_1, \dots, C_n de la matrice A sont toutes colinéaires (ou "proportionnelles"), et une au moins d'entre elles, disons C_{j_0} , est non nulle. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

il existe alors un scalaire λ_j tel que $C_j = \lambda_j C_{j_0}$. On a alors $A = C_{j_0} L$, avec la matrice-ligne $L = (\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_n)$. On a alors, bien sûr, $\lambda_{j_0} = 1$.

Méthode 2. Soit u l'endomorphisme de \mathbb{K}^n canoniquement associé à la matrice A , on a alors $\text{rg}(u) = \text{rg}(A) = 1$, donc $\dim(\text{Ker } u) = n - 1$ par le théorème du rang. Soit alors (e_1, \dots, e_{n-1}) une base de $\text{Ker}(u)$, on la complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ de E . *Attention!* On n'a pas forcément $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$, donc le vecteur e_n n'appartient pas nécessairement à $\text{Im}(u)$. Dans une telle base, l'endomorphisme u est représenté par une

matrice de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$, i.e. les $n - 1$ premières colonnes de M sont

nulles. En posant $C' = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, on a $M = C' L'$ avec $L' = (0 \ \cdots \ 0 \ 1)$. Comme A

est semblable à M (elles représentent le même endomorphisme), on a $A = PMP^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, donc $A = CL$, où $C = PC'$ est une matrice-colonne, et $L = L' P^{-1}$ est une matrice-ligne.

- b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice représentant l'endomorphisme u dans une certaine base de E , alors $\text{rg}(A) = 1$. En partant de l'écriture $A = CL$, on obtient

$$A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = (LC)(CL) = \text{tr}(A) \cdot A.$$

En effet, $LC \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ autrement dit c'est un scalaire ce qui permet de le faire commuter

avec les autres matrices et, en posant $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et $L = (l_1 \ \cdots \ l_n)$, on observe que

$$A = CL = \begin{pmatrix} c_1 l_1 & \cdots & c_1 l_n \\ \vdots & & \vdots \\ c_n l_1 & \cdots & c_n l_n \end{pmatrix}, \text{ alors que } LC = \sum_{i=1}^n c_i l_i = \text{tr}(A). \text{ En traduisant en termes}$$

d'endomorphismes, on a bien $u^2 = \text{tr}(u) \cdot u$.

Remarque. D'après la "méthode 2" de la question précédente, on peut aussi se placer dans une base de E dans laquelle l'endomorphisme u est représenté par une matrice de la

forme $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$. On a alors $\text{tr}(u) = \text{tr}(M) = a_n$, et on vérifie facilement que $M^2 = a_n M = \text{tr}(M) \cdot M$.

34. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = AM$. Exprimer $\text{tr}(\varphi)$ en fonction de $\text{tr}(A)$.

Une petite remarque sur la trace d'un endomorphisme φ d'un espace vectoriel E de dimension finie: si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une quelconque base de E , on a $\text{tr}(\varphi) = \text{tr}(M)$ avec

$M = (m_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Donc $\text{tr}(\varphi) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$. Or, pour tout couple (i, j) , le coefficient

$m_{i,j}$ est la i -ème coordonnée dans la base \mathcal{B} du vecteur $\varphi(e_j)$. En introduisant les formes linéaires coordonnées $e_i^* : E \rightarrow \mathbb{K}$ relativement à la base \mathcal{B} , on a donc $m_{i,j} = e_i^*(\varphi(e_j))$,

puis $\text{tr}(\varphi) = \sum_{i=1}^n e_i^*(\varphi(e_i))$.

Considérons la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée des matrices élémentaires $E_{i,j}$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$). On a donc pour cet exercice

$$\text{tr}(\varphi) = \sum_{i,j} E_{i,j}^*(\varphi(E_{i,j})) = \sum_{i,j} (\varphi(E_{i,j}))_{i,j}$$

en convenant de noter aussi $(M)_{i,j}$ le coefficient d'indices (i,j) d'une matrice M . Or, si $A = (a_{k,l}) = \sum_{k,l} a_{k,l} E_{k,l}$, on calcule

$$\varphi(E_{i,j}) = AE_{i,j} = \sum_{k,l} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} = \sum_{k,l} a_{k,l} \delta_{i,l} E_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j}.$$

Ainsi, $(\varphi(E_{i,j}))_{k,l} = \delta_{j,l} a_{k,i}$ et, plus particulièrement, $(\varphi(E_{i,j}))_{i,j} = a_{i,i}$. On conclut que

$$\text{tr}(\varphi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,i} = n \sum_{i=1}^n a_{i,i} = n \text{tr}(A).$$

35. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Discuter et résoudre l'équation $M = \text{tr}(M)A + B$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Notons **(E)** l'équation à résoudre, et notons \mathcal{S} l'ensemble de ses solutions.

On peut envisager plein de méthodes!!! Après quelques tâtonnements, celle qui me semble la plus rapide serait de dire que, si une matrice M vérifie **(E)**, elle est nécessairement de la forme $M = B + \lambda A$, où λ est un réel. Recherchons alors les solutions de **(E)** sous cette forme! En réinjectant,

$$\textbf{(E)} \iff B + \lambda A = (\text{tr}(B) + \lambda \text{tr}(A))A + B \iff \left((1 - \text{tr}(A)) \lambda - \text{tr}(B) \right) A = 0.$$

- si $A = 0$, cela n'impose aucune condition sur λ , et $\mathcal{S} = \{B\}$.

- si $A \neq 0$ et $\text{tr}(A) \neq 1$, cela impose $\lambda = \frac{\text{tr}(B)}{1 - \text{tr}(A)}$, donc $\mathcal{S} = \left\{ B + \frac{\text{tr}(B)}{1 - \text{tr}(A)} A \right\}$ (l'équation **(E)** admet donc une solution unique ; remarquons aussi que le cas $A = 0$ peut se réintégrer dans ce cas).

- si $\text{tr}(A) = 1$ et $\text{tr}(B) \neq 0$, alors $\mathcal{S} = \emptyset$, l'équation **(E)** est incompatible.

- si $\text{tr}(A) = 1$ et $\text{tr}(B) = 0$, alors λ est quelconque, et $\mathcal{S} = \{B + \lambda A ; \lambda \in \mathbb{R}\}$. L'ensemble \mathcal{S} est dans ce cas une "droite affine" (passant par B et dirigée par A).

Remarque. On peut remarquer que **(E)** est une équation linéaire: on peut l'écrire sous la forme $f(M) = B$, où $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par $f(M) = M - \text{tr}(M)A$, et il est clair que f est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On obtient donc

la solution générale en ajoutant une solution particulière (s'il en existe une!!!) à la solution générale de l'équation homogène associée **(E0)**.

Recherchons alors $\text{Ker}(f)$, c'est-à-dire l'ensemble des solutions de **(E0)**. Si $M \in \text{Ker}(f)$, alors $M = \text{tr}(M)A$, donc $M \in \text{Vect}(A)$. On a donc l'inclusion $\text{Ker}(f) \subset \text{Vect}(A)$, où $\text{Vect}(A)$ est une droite vectorielle sauf dans le cas particulier où A est la matrice nulle. Par ailleurs, $f(A) = (1 - \text{tr}(A))A$, on en déduit que:

- si $\text{tr}(A) = 1$, alors $f(A) = 0$, donc $A \in \text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(A)$ qui est une droite (alors $A \neq 0$);

- si $\text{tr}(A) \neq 1$, alors $\text{Ker}(f) = \{0\}$ (valable aussi si $A = 0$).

Mais finalement, tout ceci ne sert pas à grand-chose!

Matrices semblables.

36.a. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Soit u un endomorphisme de E commutant avec tous les automorphismes de E :

$$\forall s \in \text{GL}(E) \quad s \circ u = u \circ s .$$

En utilisant des symétries vectorielles, montrer que, pour tout vecteur x de E , les vecteurs x et $u(x)$ sont colinéaires. En déduire que u est une homothétie.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que la seule matrice semblable à A soit la matrice A elle-même (on a $P^{-1}AP = A$ pour toute matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$). Montrer que A est une **matrice scalaire** ($A = \lambda I_n$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$).

a. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec tous les automorphismes de E . Soient $x \in E \setminus \{0\}$, H un (hyperplan) supplémentaire de $\mathbb{K}x$ et s la symétrie par rapport à $\mathbb{K}x$ parallèlement à H . De $s \circ u = u \circ s$, on déduit que le vecteur $u(x)$ est invariant par s , donc colinéaire à x .

Pour tout $x \in E$ non nul, il existe donc un (unique) scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$. On va montrer que ce scalaire λ_x en fait ne dépend pas de x .

Soient x et y deux vecteurs non nuls de E . Montrons que $\lambda_x = \lambda_y$ en distinguant deux cas :

• Le couple (x, y) est libre. On écrit alors :

$$u(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

et on en déduit $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

• Le couple (x, y) est lié. Il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $y = \mu x$ (car $x \neq 0$) et on a :

$$\lambda_y y = u(y) = \mu u(x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x y \quad \text{d'où} \quad \lambda_x = \lambda_y \quad (\text{car } y \neq 0) .$$

On a finalement prouvé $\exists \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad u(x) = \lambda x$, ce qui signifie que $u = \lambda \text{Id}_E$: u est une homothétie.

b. On a $PA = AP$ pour toute matrice inversible P , ce qui traduit exactement que l'endomorphisme u de \mathbb{K}^n canoniquement associé à A commute avec tous les automorphismes de \mathbb{K}^n , donc est une homothétie d'après la question **a.**, d'où A est une matrice scalaire.

37. Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ 14 & -12 & 10 \\ 7 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. En déduire la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

a. On observe que la matrice A est de rang 1, l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 qui lui est canoniquement associé admet pour image la droite vectorielle $\text{Im } f = \text{Vect}(u)$, avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$:

en effet, l'image d'un endomorphisme est le sous-espace engendré par les vecteurs-colonnes. Le noyau $\text{Ker } f$ est le plan vectoriel d'équation $7x - 6y + 5z = 0$. Notons que le vecteur u vérifie cette équation, d'où l'inclusion $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$.

La matrice A représente l'endomorphisme f dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ de l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 . Montrer que A est semblable à B revient à montrer l'existence d'une autre base (u, v, w) de \mathbb{R}^3 dans laquelle le même endomorphisme f est représenté par la matrice B , ce qui revient à dire que l'on doit avoir $f(u) = f(v) = 0_E$ et $f(w) = u$. Si une telle base existe, on doit avoir $u \in \text{Im } f$, choisissons donc pour u le vecteur déjà proposé ci-dessus, à savoir $u = e_1 + 2e_2 + e_3$. Ensuite, w doit être un antécédent de u par f , d'où le

choix possible de $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 + e_2$. Enfin, v doit être un vecteur de $\text{Ker } f$ non colinéaire

à u , par exemple $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 6e_1 + 7e_2$. Il est immédiat de vérifier que ces trois vecteurs u ,

v , w sont linéairement indépendants, donc constituent une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 , et que l'on a bien $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = B$, ce qui prouve que les matrices A et $B = E_{1,3}$ sont semblables puisqu'elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

b. L'ensemble \mathcal{E} est ce que l'on appelle le **commutant** de la matrice A , il est immédiat qu'il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Il est plus facile de déterminer le commutant de la matrice B , à savoir l'ensemble

$$\mathcal{C}_B = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MB\}.$$

En effet, il est facile de voir qu'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ commute avec B si

et seulement si on a $d = g = h = 0$ et $a = i$, autrement dit si M est de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec a, b, c, e, f cinq réels arbitraires. Ainsi, \mathcal{C}_B est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de dimension 5 : une base est $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. D'autre

part, on a $A = PBP^{-1}$, où P est la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B}_0 à la base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ construite ci-dessus. On vérifie alors que

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_A &\iff AM = MA \\ &\iff PBP^{-1}M = MPBP^{-1} \\ &\iff BP^{-1}MP = P^{-1}MPB \\ &\iff P^{-1}MP \in \mathcal{C}_B \end{aligned}$$

ou encore $N \in \mathcal{C}_B \iff PNP^{-1} \in \mathcal{C}_A$. Donc \mathcal{C}_A est l'image de \mathcal{C}_B par l'application $\varphi : N \mapsto PNP^{-1}$. Il est facile de vérifier que $\varphi : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est linéaire et bijective, c'est donc un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle conserve les dimensions, on a donc $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{C}_A = \dim(\mathcal{C}_B) = 5$.

38. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^{n-1} \neq 0_n$ et $A^n = 0_n$.

Montrer que A est semblable à la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$.

Notons u l'endomorphisme de \mathbb{K}^n canoniquement représenté par la matrice A , on a alors $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Il existe donc un vecteur x de E tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Soit la famille $\mathcal{B} = (u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \dots, u(x), x)$. Montrons que cette famille est libre:

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ des scalaires vérifiant $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$. Si ces scalaires étaient non tous nuls, on pourrait considérer l'entier $p = \min(\{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\})$, on aurait alors $\sum_{k=p}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$. En appliquant u^{n-1-p} , on obtient $\lambda_p u^{n-1}(x) = 0_E$ et, comme le vecteur $u^{n-1}(x)$ est non nul, il reste $\lambda_p = 0$, ce qui contredit la définition de l'entier p . Ce raisonnement par l'absurde montre que les coefficients λ_k sont tous nuls, et donc que la famille \mathcal{B} est libre.

Comme $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(E) = n$, la famille \mathcal{B} est une base de E , il est alors immédiat que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = N$, et comme $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = A$, les matrices A et N sont semblables.

39*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont nuls. On pourra raisonner par récurrence sur n

On procède par récurrence sur n .

C'est évident pour $n = 1$ puisqu'alors la seule matrice de trace nulle est la matrice nulle.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété établie au rang n . Soit alors $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ de trace nulle, soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{n+1})$ l'endomorphisme canoniquement associé. Donc $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$, où \mathcal{B}_0 est la base canonique de \mathbb{K}^{n+1} .

Si A est une matrice scalaire, i.e. s'il existe λ scalaire tel que $A = \lambda I_n$, alors $0 = \text{tr}(A) = n\lambda$, donc $A = 0_n$ et c'est terminé.

Sinon, il existe un vecteur x de \mathbb{K}^{n+1} tel que $f(x)$ ne soit pas colinéaire à x (*exercice classique: si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que, pour tout vecteur x , $u(x)$ est colinéaire à x , alors u est une homothétie. La preuve en est laissée au lecteur*). La famille $(x, f(x))$ étant alors libre, on peut la compléter en une base $\mathcal{B} = (x, f(x), e_3, \dots, e_{n+1})$ de \mathbb{K}^{n+1} . La matrice A est alors semblable à la matrice $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, qui est de la forme $A' = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & B \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ matrice-ligne, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ matrice-colonne dont le premier coefficient vaut 1, et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Enfin, $0 = \text{tr}(A) = \text{tr}(A') = \text{tr}(B)$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à la matrice B : elle s'écrit sous la forme $B = PB'P^{-1}$, où $B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a tous ses coefficients diagonaux nuls, et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Posons $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & P \end{pmatrix}$. Alors $Q \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ et la matrice $A'' = Q^{-1}A'Q$ est semblable à A' donc à A , et on vérifie que $A'' = \begin{pmatrix} 0 & LP \\ P^{-1}C & B' \end{pmatrix}$, donc les coefficients diagonaux de la matrice A'' sont nuls.

40. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^2 = 0_n$ et $\text{rg}(A) = k$. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A . Si l'on construit une base \mathcal{B} de E dans laquelle u est représenté par la matrice B , cela répond à la question. On a $\text{rg}(u) = k$ et $u^2 = 0$, ce que l'on peut traduire par $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$.

Soit (e_1, \dots, e_k) une base de $\text{Im}(u)$. Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, soit e_{n-k+i} un antécédent de e_i par u , i.e. $u(e_{n-k+i}) = e_i$. D'autre part, on a $n - k \geq k$ puisque $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$, et la famille libre (e_1, \dots, e_k) peut être complétée en une base $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{n-k})$ de $\text{Ker}(u)$.

La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{n-k}, e_{n-k+1}, \dots, e_n)$ est une base de E : en effet, elle est de cardinal $n = \dim(E)$ et, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$, en appliquant

u , il vient $\sum_{i=1}^k \lambda_{n-k+i} e_i = 0_E$, donc les scalaires $\lambda_{n-k+1}, \dots, \lambda_n$ sont nuls puisque la famille

(e_1, \dots, e_k) est libre. Il reste alors $\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i e_i = 0_E$, donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-k} = 0$ puisque la famille $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{n-k})$ est libre aussi. Finalement, tous les scalaires sont nuls.

Il est alors immédiat que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = B = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Formes linéaires et hyperplans.

41. Soit E un espace vectoriel de dimension n , soit F un sous-espace de dimension p avec $p < n$. Montrer que l'on peut écrire F comme une intersection de $n - p$ hyperplans de E . Est-il possible d'écrire F comme une intersection de k hyperplans de E avec $k < n - p$?

• Soit $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F . Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit φ_k la k -ème forme linéaire coordonnée sur E relativement à la base \mathcal{B} , i.e. l'application de E vers \mathbb{K} qui, à tout vecteur x se décomposant en $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ dans la base \mathcal{B} , associe sa k -ème coordonnée x_k . Chaque φ_k est une forme linéaire sur E , non nulle puisque $\varphi_k(e_k) = 1$. Les sous-espaces $H_k = \text{Ker}(\varphi_k)$ sont donc des hyperplans de E . Et $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = H_{p+1} \cap \dots \cap H_n$ est une intersection de $n - p$ hyperplans.

• La réponse est non: en effet, une intersection de k hyperplans est de dimension au moins $n - k$, on le montre par récurrence (finie) sur k .

- pour $k = 1$, un hyperplan est de dimension $n - 1$;

- soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, supposons prouvé que toute intersection de k hyperplans est de dimension au moins $n - k$, soit $F = H_1 \cap \dots \cap H_k \cap H_{k+1}$ une intersection de $k + 1$ hyperplans. Posons $G = H_1 \cap \dots \cap H_k$, alors $\dim(G) \geq n - k$ d'après l'hypothèse de récurrence, et $F = G \cap H_{k+1}$. Par la formule de Grassmann,

$$\dim(F) = \dim(G) + \dim(H_{k+1}) - \dim(G + H_{k+1}) \geq (n - k) + (n - 1) - n = n - (k + 1),$$

ce qui achève la récurrence. On a utilisé le fait que $G + H_{k+1}$ est un s.e.v. de E , donc sa dimension est majorée par n .

42. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $\text{tr}(AE_{i,j})$, où $E_{i,j}$ est une matrice élémentaire (tous les coefficients nuls sauf celui en position (i, j) qui vaut 1). Montrer que toute forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de la forme $\tau_A : M \mapsto \text{tr}(AM)$, où A est une matrice fixée. On montrera pour cela que l'application $A \mapsto \tau_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$.

Pour tout couple $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le coefficient d'indices (l, k) de la matrice élémentaire $E_{i,j}$ est $\delta_{i,l} \delta_{j,k}$, où δ représente le symbole de Kronecker. Calculons les coefficients diagonaux de la matrice-produit $AE_{i,j}$:

$$\begin{aligned} (AE_{i,j})_{k,k} &= \sum_{l=1}^n a_{k,l} (E_{i,j})_{l,k} \\ &= \sum_{l=1}^n \delta_{i,l} \delta_{j,k} a_{k,l} \\ &= \delta_{j,k} \sum_{l=1}^n \delta_{i,l} a_{k,l} = \delta_{j,k} a_{k,i}. \end{aligned}$$

Donc $\text{tr}(AE_{i,j}) = \sum_{k=1}^n \delta_{j,k} a_{k,i} = a_{j,i}$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notons τ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers \mathbb{K} qui, à toute matrice M , associe le scalaire $\tau_A(M) = \text{tr}(AM)$. Cette application est linéaire (*conséquence de la linéarité de la trace*), c'est donc une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, autrement dit un élément de l'espace vectoriel $F = \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$. De plus, l'application $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow F$, $A \mapsto \tau_A$ est aussi linéaire: en effet, $\tau_{\lambda A + \mu B} = \lambda \tau_A + \mu \tau_B$ puisque, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\tau_{\lambda A + \mu B}(M) = \text{tr}((\lambda A + \mu B)M) = \lambda \text{tr}(AM) + \mu \text{tr}(BM) = \lambda \tau_A(M) + \mu \tau_B(M).$$

Mais T est injective puisque, si $A \in \text{Ker}(T)$, on a $\tau_A = 0$, donc pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{tr}(AM) = 0$ et en particulier $\text{tr}(AE_{i,j}) = 0$ pour tout couple (i, j) , donc $a_{j,i} = 0$ pour tout couple (i, j) d'après le calcul fait plus haut, ainsi tous les coefficients de la matrice A sont nuls et $A = 0$.

Enfin, les espaces vectoriels de départ et d'arrivée de l'application linéaire T ont la même dimension n^2 , donc T est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, T est surjective, et cela répond à la question posée.

- 43.** Soit E un espace vectoriel de dimension 3, soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E$ et une forme linéaire φ sur E tels que

$$\forall x \in E \quad u(x) = \varphi(x) a.$$

La relation $u \circ u = 0$ se traduit par l'inclusion $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$. En posant $r = \text{rg}(u)$, on a alors $r \leq 3 - r$, ce qui entraîne $r \leq 1$.

Si $r = 0$, alors $u = 0$, et la conclusion est vraie avec $a = 0_E$ et $\varphi = 0$ par exemple.

Si $r = 1$, alors $\text{Im}(u)$ est une droite vectorielle, notons a un vecteur directeur de cette droite: $\text{Im}(u) = \text{Vect}(a)$. Pour tout x de E , il existe alors un unique scalaire $\varphi(x)$ tel que $u(x) = \varphi(x) a$, ce qui détermine déjà une application φ de E vers \mathbb{K} . Ensuite, la linéarité de u entraîne la linéarité de φ , il suffit de l'écrire!

- 44.a.** Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2 \quad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Montrer qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \text{tr}$.

- b.** Soit f un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $f(I_n) = I_n$ et

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2 \quad f(AB) = f(BA).$$

Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\text{tr}(f(M)) = \text{tr}(M)$.

- a.** Utilisons les matrices élémentaires $E_{i,j}$ qui constituent la base canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On se rappelle la "règle des dominos": $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

Si $i \neq j$, alors $\varphi(E_{i,j}) = \varphi(E_{i,i}E_{i,j}) = \varphi(E_{i,j}E_{i,i}) = \varphi(0_n) = 0$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{i,1}E_{1,i}) = \varphi(E_{1,i}E_{i,1}) = \varphi(E_{1,1})$.

Posons maintenant $\lambda = \varphi(E_{1,1})$, c'est un scalaire. Si $M = (m_{i,j})$ est une quelconque matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on la décompose dans la base canonique: $M = \sum_{i,j} m_{i,j} E_{i,j}$, i.e.

$M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} E_{i,j}$. Par linéarité de φ , les $\varphi(E_{i,j})$ étant nuls lorsque $i \neq j$, on a

$$\varphi(M) = \sum_{i,j} m_{i,j} \varphi(E_{i,j}) = \sum_{i=1}^n m_{i,i} \varphi(E_{i,i}) = \left(\sum_{i=1}^n m_{i,i} \right) \lambda = \lambda \operatorname{tr}(M).$$

On a prouvé que $\varphi = \lambda \operatorname{tr}$.

b. De façon analogue, si l'endomorphisme f vérifie l'hypothèse énoncée,

si $i \neq j$, alors $f(E_{i,j}) = f(E_{i,i}E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{i,i}) = f(0_n) = 0$, et

pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(E_{i,i}) = f(E_{i,1}E_{1,i}) = f(E_{1,i}E_{i,1}) = f(E_{1,1})$.

Mais, par linéarité de f ,

$$f(I_n) = f\left(\sum_{i=1}^n E_{i,i}\right) = \sum_{i=1}^n f(E_{i,i}) = \sum_{i=1}^n f(E_{1,1}) = n f(E_{1,1}),$$

donc $f(E_{1,1}) = \frac{1}{n} f(I_n) = \frac{1}{n} I_n$.

Ensuite, si $M = (m_{i,j}) = \sum_{i,j} m_{i,j} E_{i,j}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a, par linéarité de f ,

les $f(E_{i,j})$ étant nuls lorsque $i \neq j$,

$$(*) : \quad f(M) = \sum_{i,j} m_{i,j} f(E_{i,j}) = \sum_{i=1}^n m_{i,i} f(E_{i,i}) = \left(\sum_{i=1}^n m_{i,i} \right) \cdot \frac{1}{n} I_n = \frac{\operatorname{tr}(M)}{n} I_n.$$

On en déduit que $\operatorname{Tr}(f(M)) = \frac{\operatorname{tr}(M)}{n} \operatorname{tr}(I_n) = \operatorname{tr}(M)$.

Remarque. En fait, cet exercice est chelou! La relation (*) obtenue plus haut montre qu'il existe en fait un et un seul endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant les conditions imposées, il est défini par $f(M) = \frac{\operatorname{tr}(M)}{n} I_n$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On en déduit que $f(f(M)) = M$ pour tout M , donc cet endomorphisme f est un projecteur, c'est plus précisément le projecteur sur la droite $D = \operatorname{Vect}(I_n) = \operatorname{Im}(f)$ parallèlement à l'hyperplan H constitué des matrices de trace nulle:

$$H = \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(\operatorname{tr}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}.$$

45*.a. Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ et ψ des formes linéaires sur un espace vectoriel E quelconque. Prouver l'équivalence

$$\psi \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \iff \bigcap_{k=1}^n \operatorname{Ker}(\varphi_k) \subset \operatorname{Ker}(\psi).$$

On pourra considérer $\Phi : E \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$, $x \mapsto \Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \psi(x))$.

- b. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension p , soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille finie de formes linéaires sur E de rang r , montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_0 = \bigcap_{k=1}^n \text{Ker}(\varphi_k)$ de E est de dimension $p - r$ (on pourra procéder par récurrence sur n):

$$(*) : \quad \dim \left(\bigcap_{k=1}^n \text{Ker}(\varphi_k) \right) = \dim(E) - \text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

- a. L'implication directe est évidente.

Supposons donc $\bigcap_{k=1}^n \text{Ker}(\varphi_k) \subset \text{Ker}(\psi)$. Considérons l'application linéaire

$$\begin{cases} \Phi : E \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \psi(x)) \end{cases}.$$

Alors Φ n'est pas surjective puisque $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1) \notin \text{Im}(\Phi)$. Le sous-espace $\text{Im}(\Phi)$ de \mathbb{K}^{n+1} est alors inclus dans un hyperplan H ne contenant pas e_{n+1} (soit s le rang de Φ , soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$ une base de $\text{Im}(\Phi)$, on complète la famille libre $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s, e_{n+1})$ en une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s, \varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_n, e_{n+1})$ de \mathbb{K}^{n+1} , et alors $H = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s, \varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_n)$ fera l'affaire). Un tel hyperplan admet (dans la base canonique de \mathbb{K}^{n+1}) une équation cartésienne de la forme $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1} = 0$ avec $a_{n+1} \neq 0$ puisque $e_{n+1} \notin H$. L'inclusion $\text{Im}(\Phi) \subset H$ se traduit par $a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x) + a_{n+1}\psi(x) = 0$ pour tout $x \in E$, d'où la relation $\psi = -\frac{1}{a_{n+1}}(a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n)$, donc $\psi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

- b. Par récurrence sur n .

- Pour $n = 1$:

- si $\varphi_1 = 0$, alors $\text{rg}((\varphi_1)) = 0$ et $\text{Ker}(\varphi_1) = E$ est de dimension p ;
- si $\varphi_1 \neq 0$, alors $\text{rg}((\varphi_1)) = 1$ et $\text{Ker}(\varphi_1)$ est un hyperplan.

Dans les deux cas, la relation (*) est satisfaite.

- Supposons la relation (*) satisfaite pour toute famille de n formes linéaires sur E .

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1})$ une famille de $n+1$ formes linéaires sur E . Posons $r = \text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$,

alors le sous-espace $V = \bigcap_{k=1}^n \text{Ker}(\varphi_k)$ est de dimension $p - r$.

- si $\varphi_{n+1} \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, alors la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1})$ est aussi de rang r , et $V \subset \text{Ker}(\varphi_{n+1})$, donc $\bigcap_{k=1}^{n+1} \text{Ker}(\varphi_k) = V \cap \text{Ker}(\varphi_{n+1}) = V$ est toujours de dimension $p - r$.
- si $\varphi_{n+1} \notin \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, alors par la question a., V n'est pas inclus dans $\text{Ker}(\varphi_{n+1})$,

et $\bigcap_{k=1}^{n+1} \text{Ker}(\varphi_k)$ est alors un sous-espace strict de V , donc de dimension au plus $p - r - 1$.
 Mais on a aussi, par la formule de Grassmann,

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^{n+1} \text{Ker}(\varphi_k) \right) = \dim(V) + \dim(\text{Ker}(\varphi_{n+1})) - \dim(V + \text{Ker}(\varphi_{n+1}))$$

et $V + \text{Ker}(\varphi_{n+1})$ est de dimension au plus p puisque c'est un sous-espace de E , on en déduit

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^{n+1} \text{Ker}(\varphi_k) \right) \geq (p - r) + (p - 1) - p = p - r - 1,$$

donc $\dim \left(\bigcap_{k=1}^{n+1} \text{Ker}(\varphi_k) \right) = p - (r + 1)$.

Dans les deux cas, la relation (*) est encore satisfaite.

46.a. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe une matrice élémentaire $E_{i,j}$, avec $i \neq j$, telle que $\varphi(E_{i,j}) \neq 0$. Montrer qu'il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi(I_n + \alpha E_{i,j}) = 0$.

b. En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient au moins une matrice inversible.

a. Par linéarité, $\varphi(I_n + \alpha E_{i,j}) = \varphi(I_n) + \alpha \varphi(E_{i,j})$ est nul pour $\alpha = -\frac{\varphi(I_n)}{\varphi(E_{i,j})}$.

b. Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe alors une forme linéaire non nulle φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$.

• Si $\varphi(E_{i,j}) = 0$ pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, alors les matrices élémentaires

$$E_{i,j}, \text{ avec } i \neq j, \text{ sont toutes dans } H, \text{ donc leur somme } M = \sum_{i \neq j} E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

appartient à H . Mais cette matrice M est inversible. En effet, on peut écrire $M = J - I_n$, où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1. Des relations $J^2 = nJ$ et $J = M + I_n$, on tire $(M + I_n)^2 = n(M + I_n)$, puis $M^2 + (2 - n)M + (1 - n)I_n = 0$, ce qui montre que M est inversible avec $M^{-1} = \frac{1}{n - 1} (M + (2 - n)I_n)$.

• S'il existe un couple (i_0, j_0) avec $i_0 \neq j_0$ tel que $\varphi(E_{i_0, j_0}) \neq 0$, alors il existe un scalaire α tel que $\varphi(I_n + \alpha E_{i_0, j_0}) = 0$, i.e. tel que $I_n + \alpha E_{i_0, j_0} \in H$ d'après **a.** Or, la matrice $I_n + \alpha E_{i_0, j_0}$ est inversible puisque $(I_n + \alpha E_{i_0, j_0})(I_n - \alpha E_{i_0, j_0}) = I_n$.

Bilan. Dans les deux cas, on a trouvé une matrice inversible appartenant à l'hyperplan H .

Polynômes d'endomorphismes et de matrices.

47. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier $A^2 - 4A - 5I_3 = 0$.

Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 4X - 5$.

En déduire A^n pour n entier naturel, ainsi que A^{-1} .

 On vérifie la relation $A^2 - 4A - 5I_3 = 0$. On dispose donc du polynôme annulateur $P = X^2 - 4X - 5 = (X + 1)(X - 5)$ pour la matrice A .

Le reste R_n de la division euclidienne de X^n par P est un polynôme de degré strictement inférieur à 2, il est donc de la forme $R_n = a_n X + b_n$: on écrit alors l'identité de la division euclidienne sous la forme

$$X^n = (X^2 - 4X - 5) Q(X) + a_n X + b_n . \quad (*)$$

En évaluant l'identité (*) pour $X = 5$ et $X = -1$ (racines de P), on obtient les deux équations

$$\begin{cases} -a_n + b_n = (-1)^n \\ 5a_n + b_n = 5^n \end{cases} , \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a_n = \frac{5^n - (-1)^n}{6} \\ b_n = \frac{5^n + 5 \times (-1)^n}{6} \end{cases} .$$

En substituant la matrice A à l'indéterminée X dans la relation (*), et tenant compte de $P(A) = A^2 - 4A - 5I_3 = 0$, on obtient

$$A^n = R_n(A) = a_n A + b_n I_3 = \frac{5^n - (-1)^n}{6} A + \frac{5^n + 5 \times (-1)^n}{6} I_3$$

ou, sous forme de tableau matriciel, et après quelques simplifications :

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2 \times (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2 \times (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2 \times (-1)^n \end{pmatrix} .$$

Enfin, la relation $A^2 - 4A - 5I_3 = 0$ se réécrit $A \cdot \left[\frac{1}{5}(A - 4I_3) \right] = I_3$, donc A est inversible

et $A^{-1} = \frac{1}{5}(A - 4I_3) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

48. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe un polynôme P non constant tel que $P(0) \neq 0$, vérifiant $AB = P(A)$. Montrer que la matrice A est inversible. Montrer que les matrices A et B commutent.

Posons $P = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$, avec $d \in \mathbb{N}^*$ et $a_d \neq 0$ (P est non constant), $a_0 \neq 0$ ($P(0) \neq 0$). La relation $AB = P(A)$ s'écrit

$$AB = a_0I_n + a_1A + \dots + a_dA^d,$$

soit encore $I_n = \left[\frac{1}{a_0} (B - a_1I_n - a_2A - \dots - a_dA^{d-1}) \right] \cdot A$, donc A est inversible avec

$$A^{-1} = \frac{1}{a_0} (B - a_1I_n - a_2A - \dots - a_dA^{d-1}) = \frac{1}{a_0} \left(B - \sum_{k=0}^{d-1} a_{k+1}A^k \right).$$

On peut alors écrire

$$B = a_0 A^{-1} + \sum_{k=0}^{d-1} a_{k+1}A^k = a_0A^{-1} + Q(A),$$

où Q est un polynôme. Or, A commute avec son inverse A^{-1} , et commute aussi avec $Q(A)$ qui est "un polynôme de A ", donc elle commute avec B qui est une combinaison linéaire des deux. Donc $BA = AB = P(A)$.

- 49.** Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, soit u un endomorphisme de E . On suppose que u admet un polynôme annulateur P tel que $P(X) = X Q(X)$ avec $Q(0) \neq 0$. Montrer que $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$.

Posons $Q = a_0 + a_1X + \dots + a_mX^m$, avec $a_0 = Q(0) \neq 0$ et $a_m \neq 0$, et procédons par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $x \in E$, supposons $x = y + z$ avec $y \in \text{Ker } u$ et $z \in \text{Im } u$: il existe donc $t \in E$ tel que $z = u(t)$. Appliquons alors l'endomorphisme $Q(u)$:

$$\begin{aligned} Q(u)(x) &= Q(u)(y) + Q(u)(z) \\ &= a_0 y + a_1 u(y) + \dots + a_m u^m(y) + (Q(u) \circ u)(t) \\ &= a_0 y + P(u)(t) \\ &= a_0 y \end{aligned}$$

car $y \in \text{Ker } u$, et $P(u) = u \circ Q(u) = Q(u) \circ u$ est l'endomorphisme nul. On a donc nécessairement $y = \frac{1}{a_0} Q(u)(x)$ et $z = x - \frac{1}{a_0} Q(u)(x)$, ce qui garantit l'unicité de la décomposition.

Synthèse : Soit $x \in E$, posons $y = \frac{1}{a_0} Q(u)(x)$ et $z = x - \frac{1}{a_0} Q(u)(x)$. On a bien $x = y + z$. Par ailleurs

$$u(y) = \frac{1}{a_0} (u \circ Q(u))(x) = \frac{1}{a_0} P(u)(x) = 0_E,$$

donc $y \in \text{Ker } u$. Enfin,

$$z = x - \frac{1}{a_0} (a_0 x + a_1 u(x) + \dots + a_m u^m(x)) = -\frac{1}{a_0} (a_1 u(x) + \dots + a_m u^m(x)) \in \text{Im } u,$$

ce qui garantit l'existence de la décomposition.

50. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $f(M) = M + \text{tr}(M) I_n$ pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- a. Montrer que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- b. Déterminer le noyau de f , son rang. L'endomorphisme f est-il bijectif ?
- c. Prouver la relation $f^2 - (n+2)f + (n+1)\text{id} = 0$.
- d. Déterminer la réciproque f^{-1} de f .

- a. Facile (résulte de la linéarité de la trace).
- b. Notons que, si une matrice M appartient au noyau de f , alors M est colinéaire à I_n , on en déduit l'inclusion $\text{Ker } f \subset \text{Vect}(I_n)$. Par ailleurs, $f(I_n) = (n+1)I_n \neq 0_n$. On en déduit que $\text{Ker } f = \{0_n\}$, donc f est injectif, donc bijectif (dimension finie), c'est un automorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors bien sûr, $\text{rg}(f) = \dim(E) = n^2$.
- c. On calcule

$$\begin{aligned}
 f^2(M) &= f(M + \text{tr}(M) I_n) \\
 &= f(M) + \text{tr}(M) f(I_n) \quad \text{par linéarité de } f \\
 &= M + \text{tr}(M) I_n + (n+1) \text{tr}(M) I_n \\
 &= M + (n+2) \text{tr}(M) I_n \\
 &= (n+2) (M + \text{tr}(M) I_n) - (n+1) M \\
 &= (n+2) f(M) - (n+1) M .
 \end{aligned}$$

On a bien obtenu la relation $f^2 - (n+2)f + (n+1)\text{id} = 0$. Dit autrement, on a obtenu un polynôme annulateur de degré 2.

- d. La relation ci-dessus peut s'écrire $f \circ (f - (n+2)\text{id}) = -(n+1)\text{id}$, et ces deux endomorphismes commutent, on en déduit que $f^{-1} = \frac{1}{n+1} ((n+2)\text{id} - f)$, ce qui peut s'écrire $f^{-1}(M) = M - \frac{\text{tr}(M)}{n+1} I_n$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Notons u l'endomorphisme de \mathbb{K}^n canoniquement représenté par la matrice A , on a alors $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Il existe donc un vecteur x de E tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Soit la famille $\mathcal{B} = (u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \dots, u(x), x)$. Montrons que cette famille est libre:

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ des scalaires vérifiant $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$. Si ces scalaires étaient non

tous nuls, on pourrait considérer l'entier $p = \min(\{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\})$, on aurait

alors $\sum_{k=p}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$. En appliquant u^{n-1-p} , on obtient $\lambda_p u^{n-1}(x) = 0_E$ et, comme le

vecteur $u^{n-1}(x)$ est non nul, il reste $\lambda_p = 0$, ce qui contredit la définition de l'entier p . Ce raisonnement par l'absurde montre que les coefficients λ_k sont tous nuls, et donc que la famille \mathcal{B} est libre.

Comme $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(E) = n$, la famille \mathcal{B} est une base de E , il est alors immédiat que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = N$, et comme $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = A$, les matrices A et N sont semblables.

51. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, soit $A = I_n + N$. On admettra que $N^n = 0_n$.

a. Montrer que $t \mapsto \sqrt{1+t}$ admet un développement limité à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0, on le notera

$$\sqrt{1+t} = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + o(t^{n-1}).$$

b. Soit le polynôme $R = 1 + X - (a_0 + a_1 X + a_{n-1} X^{n-1})^2$. Montrer que le polynôme R est divisible par X^n , c'est-à-dire que l'on peut écrire $R(X) = X^n Q(X)$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme.

c. Montrer qu'il existe au moins une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

d. Chercher M lorsque $n = 3$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque. Le fait que $N^n = 0_n$ est classique et peut se démontrer comme suit: si on appelle p l'indice de nilpotence de la matrice N , c'est-à-dire le plus petit entier k pour lequel $N^k = 0_n$, on a alors $N^{p-1} \neq 0_n$ et $N^p = 0_n$, et il existe un vecteur $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ tel que $N^{p-1} X_0 \neq 0$, on montre alors que la famille de vecteurs $(X_0, NX_0, \dots, N^{p-1} X_0)$ est libre dans \mathbb{R}^n et, comme elle est de cardinal p , cela entraîne $p \leq n$, donc $N^n = 0_n$.

a. La fonction $f : t \mapsto \sqrt{1+t}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$ donc, d'après la formule de Taylor-Young, admet un développement limité à tout ordre au voisinage de zéro.

Remarque. On a $a_0 = 1$ et, pour $k \geq 1$,

$$a_k = \frac{1}{k!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 3\right) \dots \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} 1 \times 3 \times \dots \times (2k-3) = \frac{(-1)^{k-1} (2k-2)!}{2^{2k-1} k! (k-1)!}.$$

b. Le cours de "Sup" nous dit que, si deux fonctions u et v admettent au voisinage de 0 des développements limités à l'ordre $n-1$ s'écrivant respectivement $u(t) = U(t) + o(t^{n-1})$ et $v(t) = V(t) + o(t^{n-1})$ avec U et V deux polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (ce sont les "parties régulières" de ces développements limités), alors la fonction produit uv admet un DL à l'ordre $n-1$ dont la partie régulière W est le polynôme UV tronqué à l'ordre $n-1$ (on ne conserve que les termes de degré inférieur ou égal à $n-1$). Soit alors le polynôme $F = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1}$ (partie régulière du DL à l'ordre $n-1$ de $f : t \mapsto \sqrt{1+t}$), la partie régulière du DL à l'ordre $n-1$ de $f^2 : t \mapsto 1+t$ est alors le polynôme F^2 tronqué à l'ordre $n-1$, mais cette partie régulière est aussi évidemment le polynôme $1+X$. Cela signifie que le polynôme différence $1+X - F^2$ ne comporte que des termes de degré supérieur ou égal à n , ce qu'il fallait démontrer.

c. Posons $M = F(N) = a_0 I_n + a_1 N + \dots + a_{n-1} N^{n-1}$, alors $R(N) = N^n Q(N) = 0_n$ et aussi

$$0_n = R(N) = I_n + N - (a_0 I_n + a_1 N + \dots + a_{n-1} N^{n-1})^2 = A - F(N)^2 = A - M^2,$$

on a donc montré l'existence d'au moins une racine carrée de la matrice $A = I_n + N$.

- d. Dans cet exemple, $n = 3$, la partie régulière du DL de $\sqrt{(1+t)}$ à l'ordre $n - 1 = 2$ est $F = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2$. Une racine carrée de la matrice $A = I_3 + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est donc

$$M = F(N) = I_3 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercices avec Python.

52. Pour $n \geq 2$, on considère la matrice $M(n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée “en serpent” par les entiers de

$$1 \text{ à } n^2, \text{ ainsi } M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}.$$

- Écrire une fonction `f(n, i, j)` retournant le coefficient d'indices (i, j) de la matrice $M(n)$.
- Écrire une fonction `M(n)` retournant la matrice $M(n)$.
- Avec Python, afficher le rang de $M(n)$ pour $n \in \llbracket 2, 10 \rrbracket$. Faire une conjecture, et la démontrer.
- Afficher les valeurs de $\frac{\text{tr}(M(n))}{n^3}$ pour n de 2 à 100. Commenter.
- Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer $\min_{1 \leq j \leq n} (M(n))_{i,j}$ et $\max_{1 \leq j \leq n} (M(n))_{i,j}$. En déduire un équivalent de $\text{tr}(M(n))$.

a. cf. script.

b. cf. script.

c. cf. script. On conjecture que $\text{rg}(M(n)) = 2$ pour tout $n \geq 2$... et on le prouve! En effet, on peut observer que les colonnes C_1 et C_n sont non proportionnelles, donc $\text{rg}(M(n)) \geq 2$, et que, pour tout j , on a la relation

$$C_j = \frac{1}{n-1} ((n-j)C_1 + (j-1)C_n).$$

Les colonnes appartiennent donc toutes au plan vectoriel engendré par C_1 et C_n , donc $\text{rg}(M(n)) \leq 2$.

d. cf. script. Il semblerait que $\frac{\text{tr}(M(n))}{n^3}$ tende vers $\frac{1}{2}$, autrement dit que $\text{tr}(M(n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^3}{2}$.

e. Sur la ligne i , le plus petit coefficient est $(i-1)n + 1$, le plus grand est in .

Donc $(i-1)n \leq m_{i,i} \leq in$ pour tout i . En sommant, on obtient un encadrement de la trace:

$$n^2 \frac{(n-1)}{2} = \sum_{i=1}^n i(n-1) \leq \sum_{i=1}^n ((i(n-1) + 1)) \leq \text{tr}(M(n)) \leq \sum_{i=1}^n in = n^2 \frac{(n+1)}{2},$$

d'où on déduit l'équivalent $\text{tr}(M(n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^3}{2}$.