

Fonctions convexes

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient x, y, z dans I , avec $x < y < z$.
 - a. Comparer les taux d'accroissement $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ et $\frac{f(z) - f(x)}{z - x}$.
 - b. Quel est le signe du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} ?$$
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, croissante. Montrer que
 - soit f est constante sur $\mathbb{R}$,
 - soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- 3.a. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit $g : I \rightarrow J$ une fonction convexe et $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. Montrer que $h \circ g$ est convexe sur I .
- b. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction $g = \ln \circ f$ est convexe sur I si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, la fonction f^α est convexe sur I .
4. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right)$.
Montrer que g est convexe si et seulement si f est convexe.

Intégration sur un segment

5. Trouver les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \int_x^y f(t) dt = \frac{y - x}{2} (f(x) + f(y)) .$$
6. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout x réel, on pose

$$f(x) = \int_0^x g(t) \sin(x - t) dt .$$
 - a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = \int_0^x g(t) \cos(x - t) dt$.
 - b. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.
 - c. Acheter la résolution de cette équation différentielle.
7. Étude et représentation graphique de $g : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}$. On précisera le comportement de $g(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$ et lorsque $x \rightarrow \pm\infty$.
8. On pose $F(x) = \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t}) dt$.
Montrer que la fonction F est constante sur $\mathbb{R}$ et préciser sa valeur.
9. En utilisant une somme de Riemann, donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.

10.a. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha > 1$.

b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$.

11. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à $f : t \mapsto \ln(1+t)$ entre 0 et 1, montrer que la série harmonique alternée a pour somme $\ln(2)$, i.e. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

12. Pour p et q entiers naturels, on pose $I_{p,q} = \int_a^b (t-a)^p (b-t)^q dt$.

a. Trouver une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

b. Exprimer $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles.

13. Expliciter et représenter $F : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{3 + \cos^2(t)}$.

Convergence et calcul d'intégrales généralisées.

14. Quelle est la nature des intégrales généralisées suivantes ?

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} ; \quad I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt ; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2 + 1} dt ; \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt .$$

15. Intégrales de Bertrand.

Étudier la nature de l'intégrale $I_{\alpha,\beta} = \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$, avec α et β deux réels.

16. Montrer la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{\frac{3}{2}} - 1} dt$.

17. Convergence et calcul des intégrales généralisées suivantes:

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh}(t)} ; \quad I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt ; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt ; \quad I_4 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}} dt .$$

18. Convergence et calcul des intégrales généralisées suivantes:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)} ; \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t + 1)(e^{-t} + 1)} ; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt ; \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt .$$

19. Calculer $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, avec $a < b$. On pourra poser $x = \frac{a+b}{2} + t$.

- 20.** Convergence et calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \ln x}{(1+x^4)^3} dx$.
- 21.** Soient les intégrales généralisées $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{1+t^4}$.
- Montrer leur convergence.
 - Calculer J .
 - Factoriser, dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = X^4 + 1$.
 - Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4}$, puis la calculer.
- 22.** On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$.
- Montrer que ces intégrales sont convergentes et que $I = J$.
 - Calculer $I + J$. En déduire I et J .
- 23.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, continue, telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ soit convergente. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
- Pour $x > 0$, montrer que $\int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt$.
 - *. En déduire convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$.
- 24.** Convergence et, le cas échéant, calcul de $I(a, b) = \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t} + a \sqrt{t+1} + b \sqrt{t+2} \right) dt$.

Intégrabilité.

- 25.** Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2 + 1}$ et $g : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2 + 4}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer leurs intégrales sur $]0, +\infty[$ sans passer par un calcul de primitive.
- 26.** Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 2$.
- Montrer la convergence de l'intégrale généralisée $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$.
 - Montrer les inégalités $0 \leq I_\alpha \leq \int_0^\pi \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$.

27.a. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ (*sinus cardinal*) n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, mais que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente.

b. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin \lambda t dt = 0$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$ et $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt$. Montrer que la suite (J_n) est constante, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0$, et en déduire que $I = \frac{\pi}{2}$.

d. En déduire que $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt = \frac{\pi}{2}$.

28. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \sin(e^t) dt$ est convergente.

29. Calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx$. On commencera par linéariser $\sin^3 x$ puis on essaiera de décomposer en une somme de deux intégrales.

30. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

31. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

b. Montrer que ff' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

32. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f(0) = 0$. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x \left(\frac{f(t)}{t} \right)^2 dt \leq 2 \int_0^x \frac{f(t) f'(t)}{t} dt,$$

après avoir prouvé la convergence des intégrales considérées.

33.a. Montrer que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b*. Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt$. Montrer que $F(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

34. Existence et calcul de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) dx$.

35*. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue et 1-périodique. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ est convergente **si et seulement si** $\int_0^1 f(t) dt = 0$.