DEVOIR MAISON de MATHÉMATIQUES numéro 1
COMMENTAIRES
PSI2 2025-2026

PROBLÈME 1

Je note de gros soucis de rigueur dans l'écriture des calculs asymptotiques, notamment des formulations incorrectes comme $u_n \underset{n\to+\infty}{=} l$, alors que les bonnes notations sont $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, ou encore (mais c'est un peu plus lourd) $u_n \underset{n\to+\infty}{=} l+o(1)$. Il importe d'être rigoureux et précis sur l'écriture de ces notions, sans quoi on en arrive vite à écrire des bêtises!

A.2. Pour écrire que $a_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{P}{P} = 1$, **il est essentiel de rappeler que** $P \neq 0$ par définition d'un produit infini convergent.

Il est erroné de se ramener au cours sur les séries en passant par le logarithme car il n'est pas supposé ici que les a_n sont positifs, donc $\ln(a_n)$ n'a pas toujours de sens.

A.3. La conclusion de l'étude du produit infini P n'est pas toujours clairement formulée: plusieurs d'entre vous s'arrêtent à $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{2n+1} = 1$. Oui, et alors ? De plus, il n'est pas suffisant de dire qu'il y a deux suites extraites qui convergent vers la même limite, mais il faut préciser que ces deux suites extraites épuisent tous les indices entiers naturels.

A.4.a. Souvent bien traité.

A.4.b. Le critère des équivalents pour les séries à termes positifs n'est pas souvent mentionné, on a pourtant $r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$, et non pas $r_n = \dfrac{1}{2n}$. Quant au théorème spécial des séries alternées, **il serait bien d'en rappeler les hypothèses** lorsque vous vous y référez.

A.4.c. La divergence "vers $-\infty$" des sommes partielles est à expliquer.

A.5.a. Plusieurs d'entre vous montrent que, si $\sum u_n$ converge alors $\sum \ln(1+u_n)$ converge, et ensuite que, si $\sum \ln(1+u_n)$ diverge alors $\sum u_n$ diverge... et ne se rendent pas compte qu'ils disent en fait deux fois la même chose! **Ne pas confondre réciproque et contraposée!**

A.5.b. Question souvent un peu vite expédiée. Rédiger soigneusement en considérant des sommes partielles et des produits partiels était vivement conseillé. En effet, des égalités du style $\prod(1+u_n) = \exp\left(\sum \ln(1+u_n)\right)$ ne veulent pas dire grand-chose si les sommes et produits ne sont pas indexés, s'agit-il d'opérations en nombre fini ou infini (?), bref c'est beaucoup trop vague!

B.2.a. Mentionner la continuité de f en 0 pour justifier $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = a = f(0)$.

B.2.b. Question demandant une rédaction précise.

B.2.c. Ne pas oublier de traiter condition **nécessaire** (ou **analyse**): la fonction f est nécessairement de la forme $a \cdot \mathrm{sinc}$, puis condition **suffisante** (ou **synthèse**): vérifier que ces fonctions sont bien solutions du problème posé.

PROBLÈME 2

1. J'ai vu quelques disjonctions de cas qui n'ont pas de sens car elles comportent de façon évidente une confusion des variables, genre:

- si $k = 0$ alors $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi$;

- si $k \neq 0$ alors $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

C'est clair qu'il y a quelque chose qui cloche, non ?

3. Beaucoup trop de baratin sur certaines copies pour justifier que $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} I_\alpha = 0$, il est nettement préférable de majorer le module $|I_\alpha|$, après avoir fait l'hipépé, en utilisant des inégalités triangulaires sur une somme, puis sur une intégrale, et en développant les calculs pour montrer que vous savez faire... enfin le problème est peut-être justement que vous ne savez pas trop faire ? Alors il faut s'entraîner!

5. La continuité en 0, puis le caractère $\mathcal{C}^1$ en utilisant le théorème de la limite de la dérivée toujours en 0, sont des questions assez techniques. Quelques-uns s'y sont essayés mais le résultat n'est pas toujours probant: en développant l'expression de $h_t'(u)$ pour u non nul, on obtient au numérateur une somme de deux expressions, et j'ai souvent vu à cette occasion ajouter des équivalents... Tsss, tsss, c'est pas beau! Dans ce cas il faut passer par des développements limités, donc avec des restes bien sûr.

6. Passage un peu subtil: le fait que les "sommes partielles symétriques" $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{ikt}$ admettent une limite finie lorsque $n \to +\infty$ n'entraîne pas *a priori* que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\cdots$ et $\displaystyle\sum_{n<0}\cdots$ soient convergentes si on les prend séparément. Mais certains s'en sont très bien sortis avec deux intégrations par parties. Il y a en fait dans ce cas ("signal" g qui est supposé 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^2$) **convergence normale** de la série de Fourier (notion que nous aborderons bientôt).

EXERCICE

2.b. Un sens est un peu délicat, il faut jouer aux dominos!.

3.a. La propriété à démontrer n'est pas vraie pour n'importe quel vecteur x_0 de E, il faut donc **commencer** par dire comment vous choisissez le vecteur x_0.

3.e. Une inclusion est "non triviale", j'ai vu quelques bonnes réponses.