CORRIGÉ du D.S. de MATHÉMATIQUES numéro 2
PSI2 2025-2026

EXERCICE 1

1.a. La relation $u^2 = u \circ u = 0$ se traduit par l'inclusion $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. D'autre part, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = 2n - \dim(\mathrm{Im}\, u) = n = \dim(\mathrm{Im}\, u)$. Avec une inclusion et l'égalité des dimensions, on conclut que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.

b. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le vecteur e_i appartient à $\mathrm{Ker}(u)$, qui est aussi $\mathrm{Im}(u)$, donc il admet au moins un antécédent f_i par u.

Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre: si $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n$ sont des réels tels que **(*)**: $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n + \beta_1 f_1 + \cdots + \beta_n f_n = 0_E$, en appliquant u, comme $u(e_i) = u^2(f_i) = 0_E$ pour tout i, on obtient $\beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n = 0_E$. Comme la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre, on en déduit que les β_i sont tous nuls. Dans **(*)**, il reste alors $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0_E$ ce qui entraîne la nullité des α_i de la même façon. Donc $\mathcal{B}$ est une famille libre, et comme elle est de cardinal $2n$ dans $\mathbb{R}^{2n}$, c'est une base de $\mathbb{R}^{2n}$.

Comme $u(e_i) = 0_E$ et $u(f_i) = e_i$ pour tout i, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

2.a. Soit $w = v\big|_{\mathrm{Im}(v)}$, alors $\mathrm{Im}(w) = v(\mathrm{Im}\, v) = \mathrm{Im}(v^2)$ donc $\mathrm{rg}(w) = \mathrm{rg}(v^2)$, et la formule du rang appliquée à w donne

$$2n = \dim(\mathrm{Im}\, v) = \mathrm{rg}(w) + \dim(\mathrm{Ker}\, w) = \mathrm{rg}(v^2) + \dim(\mathrm{Im}\, v \ \cap\ \mathrm{Ker}\, v) \leq \mathrm{rg}(v^2) + \dim(\mathrm{Ker}\, v)\ .$$

Or, le théorème du rang appliqué à v donne $\dim(\mathrm{Ker}\, v) = 3n - \mathrm{rg}(v) = n$, on a donc

$$\mathrm{rg}(v^2) \geq 2n - n = n\ .$$

b. Comme $v^3 = v \circ v^2 = 0$, on a l'inclusion $\mathrm{Im}(v^2) \subset \mathrm{Ker}(v)$. Mais on vient de montrer que

$$\dim(\mathrm{Im}\, v^2) = \mathrm{rg}(v^2) \geq n = \dim(\mathrm{Ker}\, v)\ ,$$

on a donc nécessairement $\mathrm{rg}(v^2) = n$ et finalement $\mathrm{Im}(v^2) = \mathrm{Ker}(v)$.

c. Partons encore d'une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathrm{Ker}(v)$. Comme $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(v^2)$, chaque vecteur e_i admet un antécédent g_i par v^2, i.e. $v^2(g_i) = e_i$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Posons alors $f_i = v(g_i)$ pour tout i. On aura alors, pour tout i, les relations $e_i = v(f_i)$, et $v(e_i) = v^3(g_i) = 0_E$.

Soit la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_n)$, montrons que c'est une base de $E = \mathbb{R}^{3n}$. Si $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ sont des réels tels que

$$\textbf{(**)} : \quad \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n + \beta_1 f_1 + \cdots + \beta_n f_n + \gamma_1 g_1 + \cdots + \gamma_n g_n = 0_E\ ,$$

en appliquant v^2, on obtient $\gamma_1 e_1 + \cdots + \gamma_n e_n = 0_E$. Comme $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre, on déduit que les γ_i sont nuls. Dans **(**)**, il reste alors $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n + \beta_1 f_1 + \cdots + \beta_n f_n = 0_E$. En appliquant v, on obtient $\beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n = 0_E$, d'où l'on déduit que les β_i sont nuls. Enfin, dans **(**)**, il reste $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0_E$ ce qui entraîne la nullité des α_i. La famille $\mathcal{B}$ est libre et de cardinal $3n$ dans $\mathbb{R}^{3n}$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^{3n}$. Comme $v(e_i) = 0_E$, $v(f_i) = e_i$ et $v(g_i) = f_i$ pour tout i, la matrice de v dans cette base est bien celle proposée.

EXERCICE 2

1. On a $v_n = \ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{a+k}{b+k}\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\left[\ln\left(1 + \frac{a}{k}\right) - \ln\left(1 + \frac{b}{k}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n-1} x_k$

avec, pour $k \geq 1$,

$$x_k = \ln\left(1 + \frac{a}{k}\right) - \ln\left(1 + \frac{b}{k}\right) = \left(\frac{a}{k} + o\Big(\frac{1}{k}\Big)\right) - \left(\frac{b}{k} + o\Big(\frac{1}{k}\Big)\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} -\frac{b-a}{k}\ .$$

La série de terme général $-\dfrac{b-a}{k}$ étant divergente (série harmonique, à un facteur constant non nul près) et à termes négatifs, le critère des équivalents s'applique, et montre que (v_n) est la suite des sommes partielles d'une série divergente à termes négatifs, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. Puis $u_n = e^{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. On a

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right) &= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{b-a}\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{b-a}\times\frac{a+n}{b+n}\right)\\
&= (b-a)\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{b}{n}\right)\\
&= (b-a)\left(\frac{1}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)+\left(\frac{a}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)-\left(\frac{b}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\\
&= O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\ .
\end{aligned}$$

On a ici utilisé le DL de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 sour la forme $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ (c'est ce que l'on appelle parfois un développement limité d'ordre un **au sens fort**).

3. La série de terme général $\ln\left(\dfrac{w_{n+1}}{w_n}\right) = \ln(w_{n+1}) - \ln(w_n)$ est donc absolument convergente d'après les critères de comparaison, donc convergente. Comme il s'agit d'une série télescopique, on en déduit la convergence de la **suite** de terme général $\ln(w_n)$. Posons alors $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(w_n)$. En posant $A = e^l$ (qui est un réel strictement positif), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = A$ par continuité de la fonction exponentielle.

4. On a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^{b-a}}$ avec $A > 0$. Par comparaison à une série de Riemann, on conclut que la série $\sum u_n$ converge **si et seulement si** $b - a > 1$.

PROBLÈME

d'après Centrale PC, 2016

PARTIE A. Étude de l'opérateur de translation.

1. Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$, autrement dit $\deg(P) = d \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{cd}(P) = a_d$, on obtient $T(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k$. Ce polynôme est de degré au plus d, et même exactement d puisque son terme dominant est aussi $a_d X^d$, donc $\deg\big(T(P)\big) = \deg(P)$ et $\mathrm{cd}\big(T(P)\big) = \mathrm{cd}(P)$.

2. Il est clair que $T^k(P)(X) = P(X+k)$ pour tout k entier naturel.

3. Pour remplir la j-ième colonne (l'indexation démarrant à 0 comme dans Python), on calcule par la formule du binôme

$$T(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \ X^i \ .$$

On a donc, pour tout couple $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $m_{i,j} = \binom{j}{i}$ avec la convention habituelle que ce coefficient binomial est nul si $i > j$.

4. Oui, T est bijectif et est donc un automorphisme de E. Plusieurs arguments sont possibles pour l'expliquer, par exemple:

- si $P \in E$ vérifie $T(P) = 0$, alors $P(X+1) = 0$ donc $P(x+1) = 0$ pour tout réel x, donc la fonction polynomiale associée à P est nulle donc $P = 0$, on a ainsi prouvé que $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ donc T est injectif donc il est bijectif car $\dim(E) < +\infty$;

- ou bien si $P \in E$, alors le polynôme R tel que $R(X) = P(X-1)$ vérifie $T(R) = P$, donc T est surjectif puis bijectif car $\dim(E) < +\infty$;

- ou bien la matrice M est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux non nuls (ils valent tous 1), donc M est inversible, donc T est bijectif.

Le deuxième argument fournit la bijection réciproque $T^{-1} : P \mapsto R$ avec $R(X) = P(X-1)$.

5. Comme $T^{-1}(X^j) = (X-1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \ (-1)^{j-i} \ X^i$, on déduit comme en **Q3.** que le coefficient d'indices (i,j) de M^{-1} est $m'_{i,j} = \binom{j}{i} \ (-1)^{j-i}$.

6.a. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \ u_j = \sum_{j=0}^{k} m_{j,k} \ u_j = \sum_{j=0}^{n} m_{j,k} u_j$$

puisque les $m_{j,k} = \binom{k}{j}$ sont nuls pour $j \in [\![k+1,n]\!]$. On reconnaît le calcul du produit d'une matrice carrée par une matrice-colonne... sauf que les indices ne sont pas dans le bon ordre, il faut donc transposer la matrice! En posant $Q = M^\top$ soit $q_{i,j} = m_{j,i}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, on a alors $v_k = \sum_{j=0}^{n} q_{k,j} u_j$ pour tout j, soit $V_n = Q\,U_n$.

b. Comme M est inversible, sa transposée $Q = M^\top$ l'est aussi et $Q^{-1} = (M^\top)^{-1} = (M^{-1})^\top$. Ona donc $U_n = Q^{-1} V_n = (M^{-1})^\top \ V_n$, soit pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$u_k = \sum_{j=0}^{n} m'_{j,k} v_j = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{k-j} \ \binom{k}{j} \ v_j = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \ \binom{k}{j} \ v_j \ .$$

C'est la **formule d'inversion de Pascal**.

PARTIE B. Étude de l'opérateur de différence.

7. Notons tout d'abord que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i = kX^{k-1} + \cdots$$

après annihilation des termes de degré k (les points de suspension représentent des termes de degré strictement inférieur à $k-1$). Si un polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est de degré $d \geq 1$ (on a donc $a_d \neq 0$ dans cette écriture), on a

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^{d} a_k \left((X+1)^k - X^k\right) = d\, a_d\, X^{d-1} + \cdots$$

où les points de suspension représentent des termes de degré strictement inférieur à $d-1$. Donc

$$\deg\left(\Delta(P)\right) = \deg(P) - 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{cd}\big(\Delta(P)\big) = d\, a_d = \deg(P) \times \mathrm{cd}(P)\ .$$

8. Les polynômes constants (i.e. appartenant à $\mathbb{R}_0[X]$) ont clairement une image nulle par Δ. En revanche, si P est un polynôme non constant, c'est-à-dire si $\deg(P) = d \geq 1$, alors $\deg\left(\Delta(P)\right) = d - 1 \geq 0$, donc $\Delta(P)$ n'est pas le polynôme nul.

On conclut que $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X] = \mathrm{Vect}(1)$.

Il résulte aussi de la question **7.** ci-dessus que $\mathrm{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Le théorème du rang donne enfin

$$\dim\left(\mathrm{Im}(\Delta)\right) = \dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}(\Delta)\right) = (n+1) - 1 = n = \dim\left(\mathbb{R}_{n-1}[X]\right)\ .$$

Avec une inclusion et l'égalité des dimensions, on conclut que $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

9. La question **7.** montre que chaque application de Δ sur un polynôme non constant diminue le degré d'une unité, et l'image d'un polynôme constant est le polynôme nul.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré $d \in [\![0, n]\!]$. On déduit de ce qui précède que:

- si $d \geq j$, alors $\deg\left(\Delta^j(P)\right) = d - j \geq 0$, donc $\Delta^j(P) \neq 0$;
- si $d < j$, i.e. si $P \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$, alors $\Delta^j(P) = 0$.

On conclut que $\mathrm{Ker}(\Delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$.

Il résulte aussi d'une itération de la question **7.** que $\mathrm{Im}(\Delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$. Le théorème du rang donne enfin

$$\dim\left(\mathrm{Im}(\Delta^j)\right) = \dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}(\Delta^j)\right) = (n+1) - j = (n-j) + 1 = \dim\left(\mathbb{R}_{n-j}[X]\right)\ .$$

On conclut que $\mathrm{Im}(\Delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$.

10. Les endomorphismes T et $-\mathrm{id}_E$ commutent, on peut donc appliquer la formule du binôme:

$$\Delta^k = (T - \mathrm{id}_E)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j}\, T^j\ .$$

11.a. Recherchons M sous la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La relation $M^2 = A$ se traduit par le système $\begin{cases} a^2 + bc &= 0 \quad (\mathbf{1}) \\ b(a+d) &= 1 \quad (\mathbf{2}) \\ c(a+d) &= 0 \quad (\mathbf{3}) \\ bc + d^2 &= 0 \quad (\mathbf{4}) \end{cases}$. De **(2)**, on déduit $a + d \neq 0$, puis de **(3)** on tire $c = 0$, puis de **(1)** et de **(4)**, on déduit $a = 0$ et $d = 0$, donc $a + d = 0$ et on a une contradiction! Il n'existe donc pas de matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

b. Si $u^2 = \Delta$, alors $\Delta^2 = u^4$, puis $u \circ \Delta^2 = u \circ u^4 = u^5 = u^4 \circ u = \Delta^2 \circ u$.

c. D'après **9.**, on a $\mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Ker}(\Delta^2)$. Comme les endomorphismes u et Δ^2 commutent, on déduit du cours que le sous-espace $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u.

d. Notons δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$ induit par Δ. De $u^2 = \Delta$, on déduit $v^2 = \delta$. Si $\mathcal{B} = (1, X)$ est la base canonique du plan vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$, on note que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\delta) = A$. Si $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$, alors on doit avoir $M^2 = A$, ce qui est impossible. On en conclut qu'il n'existe pas d'endomorphisme u de E tel que $u^2 = \Delta$.

12.a. Les polynômes de cette famille sont échelonnés en degrés (il y en a un de chaque degré entre 0 et d), la famille est donc libre. Ces polynômes sont de degré d au plus, ils sont tous dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_d[X]$ qui est de dimension $d + 1$, ils forment une famille libre de cardinal $d + 1$ dans cet espace, c'est donc une base de $\mathbb{R}_d[X]$ qui est le s.e.v. engendré.

b. Soit F un s.e.v. de E, non réduit à $\{0\}$, et stable par Δ. L'ensemble $\big\{ \deg(P) \; ; \; P \in F \setminus \{0\} \big\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, non vide et majorée (par n), elle admet donc un maximum $d \in [\![0, n]\!]$. Soit P_0 un polynôme de F de degré d (polynôme de degré maximal dans F), alors $F \subset \mathbb{R}_d[X]$ par définition, et d'autre part, comme F est stable par Δ, les polynômes $\Delta^k(P_0)$, avec $0 \leq k \leq d$, appartiennent à F. Le s.e.v. F contient donc le s.e.v. de E engendré par la famille $\big(P_0, \Delta(P_0), \cdots, \Delta^d(P_0)\big)$, c'est-à-dire $\mathbb{R}_d[X]$ d'après **a.** Finalement, $F = \mathbb{R}_d[X]$, ce qui prouve la proposition à démontrer.

PARTIE C. Une application à l'analyse.

13. Si $p \in [\![0, n-1]\!]$, alors $X^p \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Ker}(\Delta^n)$, donc $\Delta^n(X^p) = 0$.

14. Du début de la partie **B.**, il résulte que $\deg\big(\Delta^n(X^n)\big) = 0$, c'est donc un polynôme constant non nul. Pour connaître la constante, il suffit de connaître le coefficient dominant. Or, à partir de la question **7.**, on obtient $\mathrm{cd}\big(\Delta(X^n)\big) = n$, puis $\mathrm{cd}\big(\Delta^2(X^n)\big) = n(n-1)$ et, par une récurrence "immédiate" (*oui, j'ai la flemme*), $\mathrm{cd}\big(\Delta^k(X^n)\big) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Finalement, $\mathrm{cd}\big(\Delta^n(X^n)\big) = n!$

On a donc $\Delta^n(X^n) = n!$ (polynôme constant).

15. Considérons le polynôme $P = X^p$, alors d'après la question **10.**,

$$\Delta^n(X^p) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \, T^k(X^p) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \, (X+k)^p \; .$$

En évaluant pour $X = 0$, on obtient

$$\Delta^n(X^p)(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, k^p = S_{n,p}\ .$$

De la question **14.**, on déduit alors que

$$S_{n,p} = \Delta^n(X^p)(0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le p \le n-1 \\ n! & \text{si} \quad p = n \end{cases} .$$

16.a. On peut l'écrire par la formule de Taylor-Young:

$$f(a+h) = \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(a)}{p!}\, h^p + o(h^n) \qquad \text{lorsque} \qquad h \to 0\ .$$

b. Pour h réel non nul, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(a+kh) \quad &= \quad \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{(kh)^p}{p!}\, f^{(p)}(a) + h^n\, \varepsilon_k(h) \right) \\
&= \quad \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{(kh)^p}{p!}\, f^{(p)}(a) + \varepsilon(h) \\
&= \quad \frac{1}{h^n} \sum_{p=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, k^p \right) \frac{h^p}{p!}\, f^{(p)}(a) + \varepsilon(h) \\
&= \quad \frac{1}{h^n} \sum_{p=0}^{n} S_{n,p}\, \frac{h^p}{p!}\, f^{(p)}(a) + \varepsilon(h) \\
&= \quad f^{(n)}(a) + \varepsilon(h)\ .
\end{aligned}$$

Commentaires: on a utilisé la formule de Taylor-Young pour développer $f(a+kh)$ à l'ordre n, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, en introduisant des fonctions $\varepsilon_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_k(h) = 0$, on a ensuite posé $\varepsilon(h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \varepsilon_k(h)$, c'est une combinaison linéaire de fonctions ayant des limites nulles en zéro donc on a aussi $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, enfin on a interverti les sommations (sommes finies) et on a utilisé la question **15.** pour évaluer les sommes $S_{n,p}$. La conclusion de tout cela est que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(a+kh) = f^{(n)}(a)\ .$$

PARTIE D. Les polynômes de Hilbert.

17. On a $\deg(H_k) = k$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la famille $\mathcal{H}$ est donc échelonnée en degrés, c'est donc une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

18. On $\Delta(H_0) = \Delta(1) = 0$ et, pour $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\Delta(H_k) &= H_k(X+1)-H_k(X)\\
&= \frac{1}{k!}\Big[(X+1)X(X-1)\cdots(X-k+2)-X(X-1)\cdots(X-k+2)(X-k+1)\Big]\\
&= \frac{X(X-1)\cdots(X-k+2)}{k!}\big[(X+1)-(X-k+1)\big]\\
&= \frac{X(X-1)\cdots(X-k+2)}{(k-1)!} \;=\; H_{k-1}\,.
\end{aligned}$$

19. On a donc $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{H}}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ \vdots & 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}+E_{2,3}+\cdots+E_{n-1,n}$.

20. Notons d'abord que $H_0(0)=1$ et, pour $k>0$, on a $H_k(0)=0$, d'où les différents cas:

- si $k<j$, alors $\Delta^k(H_j)=H_{j-k}$ avec $j-k>0$, donc $\Delta^k(H_j)(0)=H_{j-k}(0)=0$;
- si $k=j$, alors $\Delta^k(H_j)=\Delta^j(H_j)=H_0=1$ (polynôme constant), donc $\Delta^k(H_j)(0)=1$;
- si $k>j$, alors $\Delta^k(H_j)=0$ (polynôme nul), donc $\Delta^k(H_j)(0)=0$.

En conclusion, on a bien $\Delta^k(H_j)(0)=\delta_{j,k}$.

21. Par linéarité de Δ^k, on a $\Delta^k(P)=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j\,\Delta^k(H_j)$ et, en évaluant pour $X=0$, cela donne $\Delta^k(P)(0)=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j\,\delta_{j,k}=\lambda_k$. Donc $P=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\,H_k=\sum_{k=0}^{n}\Delta^k(P)(0)\,H_k$, i.e. les coordonnées du polynôme P dans la base $\mathcal{H}$ sont les scalaires $\Delta^k(P)(0)$, $0\le k\le n$.

22.a. Le polynôme $H_n=\dfrac{1}{n!}X(X-1)\cdots\big(X-(n-1)\big)$ admet pour racines les entiers de 0 à $n-1$, donc si $k\in[\![0,n-1]\!]$, on a $H_n(k)=0$.

b. Si $k\ge n$, alors $H_n(k)=\dfrac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}=\dfrac{k!}{n!(k-n)!}=\dbinom{k}{n}$.

c. Si $k<0$, soit $p=-k\in\mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
H_n(k)=H_n(-p) &= \frac{(-p)(-p-1)\cdots(-p-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!}\,p(p+1)\cdots(p+n-1)\\
&= (-1)^n\frac{(p+n-1)!}{n!(p-1)!} = (-1)^n\binom{p+n-1}{n}\,.
\end{aligned}$$

23. Les coefficients binomiaux étant des entiers, on a bien $H_n(\mathbf{Z})\subset\mathbf{Z}$ par la question précédente.

24. Si $P(k)\in\mathbf{Z}$ pour tout entier relatif k, alors $\Delta(P)(k)=P(k+1)-P(k)$ est une différence de deux entiers relatifs, donc appartient encore à $\mathbf{Z}$.

25. Dans le sens indirect, si $P = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j H_j$ avec les λ_j entiers relatifs, alors pour tout entier relatif k, on a $P(k) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j H_j(k)$, et d'après **23.** ce nombre s'écrit comme somme de produits d'entiers relatifs, c'est donc un entier relatif (pour les ex-MPSI, l'ensemble $\mathbf{Z}$ est un anneau pour les opérations d'addition et de multiplication usuelles).

Dans le sens direct, soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$. Alors en itérant la question **24.**, on voit que, pour tout k de 0 à n, le polynôme $\Delta^k(P)$ vérifie la même propriété et, en conséquence, les nombres $\Delta^k(P)(0)$ sont des entiers relatifs. Or, d'après **21.**, ces nombres sont les coordonnées du polynôme P dans la base $\mathcal{H}$, ce qui achève la preuve.

26. Si $P(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$ avec P de degré d, alors $P \in \mathbb{R}_d[X]$, et d'après **25.**, il est combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs des polynômes H_0, H_1, $\cdots$, H_d. Or, si $k \in [\![0, d]\!]$, on a $d!\, H_k = \dfrac{d!}{k!} X(X-1)\cdots(X-k+1)$, et il est clair que le polynôme $X(X-1)\cdots(X-k+1)$ est à coefficients entiers, et que $\dfrac{d!}{k!} = \prod_{j=k+1}^{d} j$ est aussi un entier. Le polynôme $d!\, P$ est alors une combinaison linéaire à coefficients entiers des polynômes $d!\, H_k$ qui sont à coefficients entiers, c'est donc encore un polynôme à coefficients entiers relatifs (toujours la stabilité de l'ensemble $\mathbf{Z}$ par l'addition et la multiplication).

La réciproque est fausse, on a un contre-exemple avec $P = \dfrac{1}{2} X^2$, ce polynôme est de degré 2, et $2!P = X^2$ est à coefficients entiers, pourtant $P(1) = \dfrac{1}{2} \notin \mathbf{Z}$ donc $P(\mathbf{Z}) \not\subset \mathbf{Z}$.