DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 2

PSI2 2025-2026 **à rendre le 16/10/2025**

PROBLÈME 1

Dans tout ce problème, on fixe un réel $\alpha > -1$, et on note E_α l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha\, e^{-x}\, f(x)^2\, \mathrm{d}x$ converge.

1. Pour tout réel x strictement positif, montrer l'existence de l'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t\ .$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.
Calculer $\Gamma(1)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que, pour tous réels a et b, on a $|ab| \leq \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

4. En déduire que, si f et g sont deux éléments de E_α, alors la fonction $x \mapsto x^\alpha\, e^{-x}\, f(x)\, g(x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

5. En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$.

6. Montrer que toute fonction polynomiale sur $\mathbb{R}_+$ appartient à E_α.

Pour tout entier naturel n, on définit les fonctions φ_n et ψ_n de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \varphi_n(x) = x^{n+\alpha}\, e^{-x} \quad \text{et} \quad \psi_n(x) = x^{-\alpha}\, e^x\, \varphi_n^{(n)}(x)\ ,$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ représente la dérivée n-ième de φ_n.

7. Calculer ψ_0, ψ_1 et ψ_2.

8. Montrer que la fonction ψ_n est polynomiale sur $\mathbb{R}_+^*$, préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on identifiera ψ_n à son unique prolongement continu sur $\mathbb{R}_+$, ce qui permettra (*d'après la question* **6.**) de la considérer comme un élément de E_α.

Pour tout couple $(f, g) \in E_\alpha^2$, on pose $(f|g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha\, e^{-x}\, f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$.

9. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E_α.

10. Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, prouver que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \varphi_n^{(k)}(x) = 0$, et que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x}{2}}\, \varphi_n^{(k)}(x) = 0$.

11. Soient m et n deux entiers naturels. Montrer que

$$(\psi_m|\psi_n) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\, \varphi_n(x)\, \mathrm{d}x\ .$$

En déduire que $(\psi_m|\psi_n) = 0$ si $m \neq n$.

12. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a

$$\|\psi_n\|_\alpha^2 = n!\, \Gamma(n + \alpha + 1)\ ,$$

où $\|\cdot\|_\alpha$ est la norme sur E_α associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

PROBLÈME 2: Matrices magiques

Soit l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 3$. On note J_n la matrice de E dont tous les coefficients sont égaux à 1. Une matrice M quelconque appartenant à $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera notée $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, soit l_i la forme linéaire sur E définie par $l_i(M) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$ (*somme des coefficients de la i-ième ligne de la matrice M*).

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, soit c_j la forme linéaire sur E définie par $c_j(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}$ (*somme des coefficients de la j-ième colonne de la matrice M*).

Soient enfin d et δ les formes linéaires sur E définies par

$$d(M) = \mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} \qquad ; \qquad \delta(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,n+1-i} \ .$$

1. Dans l'espace vectoriel dual $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, montrer que la famille de formes linéaires $\mathcal{F} = (l_1, \cdots, l_n, c_1, \cdots, c_n)$ est liée. *On explicitera une relation de dépendance linéaire.*

2. Soit F_0 l'ensemble des matrices carrées d'ordre n telles que, sur chaque ligne et sur chaque colonne, la somme des coefficients vaut 0. Montrer que F_0 est un sous-espace vectoriel de E.

3. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n-1}$ une matrice carrée d'ordre $n-1$, montrer qu'il existe une unique matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de F_0 telle que $m_{i,j} = a_{i,j}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n-1]\!]^2$ et expliciter cette matrice M. En déduire que l'application $\varphi : F_0 \to \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ qui, à toute matrice M de F_0, associe la matrice obtenue à partir de M en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de F_0, puis le rang de la famille de formes linéaires $(l_1, \cdots, l_n, c_1, \cdots, c_n)$.

4. Construire une matrice de F_0 ayant une trace non nulle. En déduire que

$$d \notin \mathrm{Vect}(l_1, \cdots, l_n, c_1, \cdots, c_n) \ .$$

5. Quel est le rang de la famille de formes linéaires $(l_1, \cdots, l_n, c_1, \cdots, c_n, d)$?

On pose $G_0 = F_0 \cap \mathrm{Ker}\, d$. Quelle est la dimension de G_0 ?

6. Construire une matrice M de G_0 telle que $\delta(M) \neq 0$. *Indications : pour $n \geq 4$, on pourra utiliser un bloc de la forme* $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$*, les autres coefficients étant nuls ; pour $n = 3$, faites preuve d'ingéniosité!*

7. On pose $H_0 = G_0 \cap \mathrm{Ker}\, \delta$. Quelle est la dimension de H_0 ?

8. On note enfin H l'ensemble des **matrices magiques** carrées d'ordre n, c'est-à-dire des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que la somme des coefficients soit la même sur chaque ligne, chaque colonne et chacune des deux diagonales. Montrer que $H = H_0 \oplus \mathrm{Vect}(J_n)$. En déduire la dimension de H.

9. Construire une base de H dans le cas $n = 3$. Montrer qu'il existe une unique matrice magique d'ordre 3 dont la première ligne est $(\,3 \quad 4 \quad 5\,)$ et l'expliciter.