DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 2

PSI2 2025-2026 **Durée: 4 heures** **04/10/2025**

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel avec $n \geq 2$.

1. Dans cette question, on note u un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $u^2 = 0$ et $\operatorname{rg}(u) = n$.

a. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u)$.

b. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker}(u)$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, justifier l'existence d'un vecteur f_i de $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $u(f_i) = e_i$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^{2n}$. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

2. Dans cette question, on note v un endomorphisme de $\mathbb{R}^{3n}$ tel que $v^3 = 0$ et $\operatorname{rg}(v) = 2n$.

a. En considérant la restriction de v à $\operatorname{Im}(v)$, montrer que $\operatorname{rg}(v^2) \geq n$.

b. Montrer que $\operatorname{Ker}(v) = \operatorname{Im}(v^2)$.

c. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^{3n}$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Pour tout n entier naturel non nul, on pose

$$u_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a+k}{b+k}\right) .$$

1. En travaillant sur l'expression $v_n = \ln(u_n)$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. On pose $w_n = n^{b-a} u_n$. Montrer que l'on peut écrire $\ln\left(\dfrac{w_{n+1}}{w_n}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

3. En déduire que la suite (w_n) admet une limite strictement positive A.

4. Discuter alors, en fonction de a et b, la nature de la série $\sum u_n$.

PROBLÈME

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul, et on note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n à coefficients réels. Si $P \in E \setminus \{0\}$, on note $\deg(P)$ son degré et $\operatorname{cd}(P)$ son coefficient dominant, c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$.

Si f est un endomorphisme de E, on pose $f^0 = \mathrm{id}_E$ et, pour k entier naturel non nul, $f^k = f \circ \cdots \circ f$ avec k facteurs.

On rappelle que, si j et k sont deux entiers naturels, le coefficient binomial $\dbinom{k}{j}$ vaut $\dfrac{k!}{j!\,(k-j)!}$ si $j \leq k$, et 0 sinon.

PARTIE A. Étude d'un premier endomorphisme.

Cette partie sera utilisée par la suite du problème.

On considère l'endomorphisme T de $E = \mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$T : \begin{cases} E \to E \\ P \mapsto Q \end{cases} \qquad \text{où l'on pose} \quad Q(X) = P(X+1) .$$

1. Pour un polynôme P non nul de E, préciser $\deg\big(T(P)\big)$ et $\operatorname{cd}\big(T(P)\big)$ en fonction de $\deg(P)$ et de $\operatorname{cd}(P)$.

2. Soient $P \in E$ et $k \in \mathbb{N}$. Exprimer le polynôme $T^k(P)$.

3. Donner la matrice $M = (m_{i,j})_{0\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de l'endomorphisme T dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \cdots, X^n)$ de E. *Attention! La numérotation des lignes et des colonnes commence ici à l'indice* 0.

4. L'endomorphisme T est-il bijectif ? Si oui, préciser T^{-1}.

5. En déduire M^{-1}. *On précisera les coefficients $m'_{i,j}$ de la matrice inverse M^{-1} avec $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$.*

6. Une application. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour tout k entier naturel, on pose

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j \ .$$

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et $V_n = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $V_n = QU_n$.

b. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une expression de u_k en fonction de v_0, v_1, $\cdots$, v_k.

PARTIE B. Étude d'un deuxième endomorphisme.

Les questions **7.** *à* **10.** *peuvent être utilisées par les parties ultérieures du problème.*

On considère maintenant l'endomorphisme Δ de E tel que $\Delta = T - \mathrm{id}_E$. Pour tout polynôme P de E, on a donc

$$\Delta(P)(X) = T(P)(X) - P(X) = P(X+1) - P(X) \ .$$

7. Si P est un polynôme non constant de E, exprimer $\deg\big(\Delta(P)\big)$ et $\mathrm{cd}\big(\Delta(P)\big)$ en fonction de $\deg(P)$ et de $\mathrm{cd}(P)$.

8. En déduire le noyau et l'image de l'endomorphisme Δ.

9. Plus généralement, pour $j \in [\![1,n]\!]$, montrer les égalités

$$\mathrm{Ker}(\Delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\Delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \ .$$

Que dire de l'endomorphisme Δ^{n+1} ?

10. Partant de la définition $\Delta = T - \mathrm{id}_E$, exprimer pour tout k entier naturel l'endomorphisme Δ^k comme combinaison linéaire des T^j avec $0 \le j \le k$.

11. Dans cette question, on souhaite prouver que l'endomorphisme Δ de E n'admet pas de "racine carrée", i.e. il n'existe pas d'endomorphisme u de E tel que $u^2 = \Delta$. On suppose, par l'absurde, qu'un tel endomorphisme u existe.

a. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il n'existe aucune matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

b. Montrer que u et Δ^2 commutent.

c. En déduire que le sous-espace $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u, on notera v l'endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$ induit par u.

d. En considérant la matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ représentant v dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$, conclure cette étude.

12. Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}_n[X]$ stables par l'endomorphisme Δ.

a. Soit P un polynôme non nul de degré $d \leq n$, montrer que la famille $\big(P, \Delta(P), \cdots, \Delta^d(P)\big)$ est libre. Quel est le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille ?

b. En déduire que les sous-espaces vectoriels de E stables par l'endomorphisme Δ sont $\{0\}$ et les sous-espaces $\mathbb{R}_d[X]$, avec $0 \leq d \leq n$.

PARTIE C. Une application à l'analyse.

Les parties **C.** *et* **D.** *du problème sont indépendantes.*

13. Exprimer $\Delta^n(X^p)$ pour $p \in [\![0, n-1]\!]$.

14. Exprimer le polynôme $\Delta^n(X^n)$.

15. En déduire la valeur de la somme $S_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, k^p$ pour $p \in [\![0, n]\!]$.

On pourra utiliser **Q10.**

16. Dans cette question, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, soit a un réel.

a. Rappeler le développement limité à l'ordre n de la fonction f au voisinage de a.

b. Calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, f(a+kh) .$$

Partie D. Une famille de polynômes.

On considère la famille de polynômes $(H_0, \cdots, H_n)$, avec $H_0 = 1$ et

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \qquad H_k = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X - j) = \frac{1}{k!}\, X(X-1)\cdots(X-k+1) .$$

17. Montrer que la famille $\mathcal{H} = (H_0, \cdots, H_n)$ est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

18. Calculer $\Delta(H_0)$ et, pour $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer $\Delta(H_k)$ à l'aide de H_{k-1}.

19. En déduire la matrice M' représentant l'endomorphisme Δ dans la base $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

20. Montrer que, pour $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$, on a $\Delta^k(H_j)(0) = \delta_{j,k}$ (symbole de Kronecker).

21. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, on note $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{H}$, on a donc $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \lambda_j H_j$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $\Delta^k(P)(0)$. En déduire la relation

$$P = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0) \cdot H_k .$$

22. Soit $k \in \mathbf{Z}$. Exprimer le nombre $H_n(k)$ à l'aide d'un coefficient binomial. On distinguera pour cela trois cas: $k \in [\![0, n-1]\!]$, $k \geq n$ et $k < 0$. Dans ce dernier cas, on posera $k = -p$.

23. En déduire que $H_n(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$, i.e. H_n est à valeurs entières sur les entiers.

24. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs entières sur les entiers. Montrer que le polynôme $\Delta(P)$ est aussi à valeurs entières sur les entiers.

25. En déduire qu'un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans la base $\mathcal{H} = (H_0, \cdots, H_n)$ sont entières.

26. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Montrer que, si P est à valeurs entières sur les entiers, alors $d!P$ est un polynôme à coefficients entiers. Étudier la réciproque.