DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 2
COMMENTAIRES
PSI2 2025-2026

EXERCICE 1

1.b. Pour la liberté de la famille $\mathcal{B}$, le théorème de la base incomplète, ou un "théorème de juxtaposition des bases" sont parfois cités à mauvais escient! En effet, une famille libre $(e_1, \cdots, e_n)$ peut toujours être complétée en une base, mais cela ne veut dire qu'en la complétant n'importe comment pour avoir le bon nombre de vecteurs, on obtiendra forcément une base! Il faut donc passer par la démonstration classique pour montrer qu'une famille de vecteurs est libre.

2.a. L'application linéaire $w = v\big|_{\mathrm{Im}(v)}$ admet pour **espace de départ** $\mathrm{Im}(v)$. Attention donc à en tenir compte lorsque vous appliquez le théorème du rang qui doit alors s'écrire

$$\dim(\mathrm{Im}\, v) = \mathrm{rg}(w) + \dim(\mathrm{Ker}\, w)\ .$$

Il y a eu d'autres confusions sur cette notion de restriction: s'il est facile de comprendre que $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(v^2)$, donc $\mathrm{rg}(w) = \mathrm{rg}(v^2)$, ce n'est pas pour autant que $w = v^2$!

2.c. Il faut imaginer une famille de $3n$ vecteurs en s'inspirant de la question **2.b.** et démontrer sa liberté tout pareillement.

EXERCICE 2

Cet exercice a souvent été maltraité, plus encore que celui d'algèbre linéaire ci-dessus. Le calcul asymptotique est encore mal maîtrisé pour beaucoup d'entre vous.

1. Dans cette question et la suivante, il faut commencer par transformer un peu les expressions, soit de v_n, soit de $\ln\left(\dfrac{w_{n+1}}{w_n}\right)$. Certain(e)s ne savent pas vraiment comment s'y prendre, je dirai "c'est le métier", il faut pratiquer! L'idée générale est souvent d'essayer de se ramener à des expressions dont on sait écrire un développement limité comme $\ln(1+u)$ où u est une expression qui tend vers zéro.

2. Mêmes commentaires que pour question **1.** ci-dessus. On peut gagner un peu de temps en utilisant le DL "fort" $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ au voisinage de 0.

3. Sachant que $\ln\left(\dfrac{w_{n+1}}{w_n}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, on peut en déduire bien sûr que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{w_{n+1}}{w_n}\right) = 0$, mais c'est au prix d'une grosse perte d'information. Il est plus "fin" d'en déduire la convergence de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{w_{n+1}}{w_n}\right)$, qui est une série télescopique etc.

Je rappelle que, si une série $\sum a_n$ est telle que $a_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, alors cette série **converge absolument** donc converge, il n'est donc pas besoin de regarder si elle est à termes positifs.

4. Peu d'entre vous sont arrivés jusqu'ici mais celles et ceux qui attaquent cette question s'y prennent souvent mal, ne voyant pas que la question précédente donne un équivalent de u_n, ce qui conduit à une conclusion rapide.

PROBLÈME

2. La question n'est peut-être pas très explicite, mais la réponse $T^k(P) = P(X+k)$ est suffisante.

3. Dessiner la matrice en explicitant quelques coefficients ne décrit pas la matrice M de façon satisfaisante, il serait bien d'expliciter la formule $m_{i,j} = \binom{j}{i}$, coefficient qui est nul par convention si $i > j$.

6. Beaucoup d'entre vous trouvent $Q = (q_{i,j})$ avec $q_{i,j} = \binom{i}{j}$ dans la question **a.** et ont compris que c'est la matrice inverse Q^{-1} qui est utile pour répondre à la question **b.** Mais si vous ne faites pas le lien entre les matrices Q et M, à savoir $Q = M^\top$, comment obtenez-vous les coefficients de Q^{-1} ? Mystère!

8. et **9. Il est facile d'obtenir des <u>inclusions</u> comme** $\mathbb{R}_{j-1}[X] \subset \mathrm{Ker}(\Delta^j)$ ou encore $\mathrm{Im}(\Delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$, mais si vous prétendez qu'il y a égalité sans avoir prouvé l'inclusion réciproque, cela peut être lourdement sanctionné! C'est ici que la question **7.** et le théorème du rang peuvent être utilisés.

11.a. La recherche d'une matrice M telle que $M^2 = A$ conduit à un système (non linéaire) d'équations incompatibles. Ce n'est pas bien difficile mais la discussion n'est pas toujours bien organisée.

12.a. Pour la liberté, il suffit de mentionner que c'est une famille de polynômes à degrés échelonnés (notion au programme de 1ère année).

12.b. Il ne suffit pas de vérifier que les sous-espaces $\{0\}$ et $\mathbb{R}_d[X]$ sont stables par Δ, il faut expliquer pourquoi **<u>ce sont les seuls</u>** (oui, c'est plus difficile).

13. et **14.** Les questions sont peut-être mal posées, mais les réponses données sont rarement celles attendues, même si elles ne sont pas forcément fausses. Je pense qu'ici, il faut lire un peu la suite de l'énoncé pour essayer de comprendre où le concepteur du sujet essaie de vous amener.

17. Encore une famille de polynômes à degrés échelonnés, cet argument suffit.

Je ne commenterai pas la suite, assez peu abordée.

Commentaires généraux. La compréhension de l'algèbre linéaire semble être un très gros problème pour quelques-un(e)s d'entre vous. Il va pourtant falloir s'y mettre, cela représente une grosse partie de votre programme de math.

En plus des erreurs classiques comme prétendre qu'il y a égalité entre deux sous-espaces alors que vous n'avez montré qu'une inclusion, je note aussi que certains d'entre vous ont un peu de mal avec les notations abstraites. Les notations T et Δ représentent des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, autrement dit des "machines" qui transforment un polynôme en un autre polynôme. L'énoncé rappelle gentiment en préambule que la notation T^k correspond à $T \circ T \circ \cdots \circ T$ avec k facteurs, ainsi $T^k(P)$ est le polynôme obtenu en appliquant k fois l'endomorphisme T au polynôme P et ne doit pas être confondu avec

$$\big(T(P)\big)^k = T(P) \times T(P) \times \cdots \times T(P) \; .$$

Il faudra donc s'entraîner à travailler sur ce type de problème faisant intervenir des "opérateurs" (nom que l'on donne fréquemment à des endomorphismes d'espaces de polynômes ou de fonctions).