

Fonctions convexes

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient x, y, z dans I , avec $x < y < z$.

a. Comparer les taux d'accroissement $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ et $\frac{f(z) - f(x)}{z - x}$.

b. Quel est le signe du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} ?$$

a. Comme $y \in]x, z[$, on peut écrire $y = (1 - \lambda)x + \lambda z$ avec $\lambda = \frac{y - x}{z - x} \in]0, 1[$. Par convexité de f , on a $f(y) = f((1 - \lambda)x + \lambda z) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(z)$, ce qui s'arrange en

$$f(y) - f(x) \leq \lambda (f(z) - f(x)) = \frac{y - x}{z - x} (f(z) - f(x)) ,$$

ou encore

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} .$$

b. On a $D = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 0 & y - x & f(y) - f(x) \\ 0 & z - x & f(z) - f(x) \end{vmatrix}$ en effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. Donc, par développement par rapport à la première colonne,

$$D = (y - x) (f(z) - f(x)) - (z - x) (f(y) - f(x)) .$$

De la question a., on déduit immédiatement que $D \geq 0$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, croissante. Montrer que

- soit f est constante sur $\mathbb{R}$,
- soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Supposons f non constante, alors il existe x et y réels tels que $x < y$ (pour fixer les idées) et $f(x) \neq f(y)$. Comme f est croissante, on a donc $f(y) > f(x)$. Pour $t \geq y$, on a alors $\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ (cf. question a. de l'exercice précédent), soit encore $f(t) \geq f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} (t - x)$. On a donc minoré, sur $[y, +\infty[$, la fonction f par une fonction affine qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ puisqu'elle a un coefficient directeur strictement positif. Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$.

3.a. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit $g : I \rightarrow J$ une fonction convexe et $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. Montrer que $h \circ g$ est convexe sur I .

b. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction $g = \ln \circ f$ est convexe sur I si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, la fonction f^α est convexe sur I .

a. Si $g : I \rightarrow J$ est convexe et $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe croissante, alors pour $x \in I$, $y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a, par convexité de g ,

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) ,$$

donc

$$\begin{aligned}(h \circ g)(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\leq h(\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)) \\ &\leq \lambda(h \circ g)(x) + (1 - \lambda)(h \circ g)(y)\end{aligned}$$

en utilisant successivement la croissance et la convexité de h . On a ainsi prouvé que la fonction composée $h \circ g$ est convexe sur I .

- b. •** Si $g = \ln \circ f$ est convexe sur I , alors il en est évidemment de même de αg pour $\alpha > 0$, puis de $f^\alpha = \exp \circ (\alpha g)$ en utilisant le **a.** puisque la fonction $h = \exp$ est convexe croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Réciproquement, supposons f^α convexe pour tout $\alpha > 0$.

Fixons $x \in I, y \in I, \lambda \in [0, 1]$. On a

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad f^\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f^\alpha(x) + (1 - \lambda)f^\alpha(y),$$

donc

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln \left[f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \right] \leq \frac{1}{\alpha} \ln (\lambda f^\alpha(x) + (1 - \lambda)f^\alpha(y)) \quad (*) .$$

Pour conclure, il suffit de passer à la limite quand α tend vers zéro : en effet, la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \alpha \mapsto \ln (\lambda f^\alpha(x) + (1 - \lambda)f^\alpha(y))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \varphi'(\alpha) = \frac{\lambda f(x)^\alpha \cdot \ln f(x) + (1 - \lambda) f(y)^\alpha \cdot \ln f(y)}{\lambda f(x)^\alpha + (1 - \lambda) f(y)^\alpha} .$$

En particulier, $\varphi'(0) = \lambda \ln f(x) + (1 - \lambda) \ln f(y)$. Comme $\varphi(0) = 0, \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} = \varphi'(0)$. En passant à la limite dans (*), on obtient

$$\ln \left[f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \right] \leq \lambda \ln f(x) + (1 - \lambda) \ln f(y),$$

c'est-à-dire la convexité de $g = \ln \circ f$.

- 4.** Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Montrer que g est convexe si et seulement si f est convexe.

Supposons f convexe. Soient x et y avec $0 \leq x \leq y$, soit $t \in [0, 1]$, notons alors que

$$x \leq (1 - t)x + ty \leq y, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{y} \leq \frac{1}{(1 - t)x + ty} \leq \frac{1}{x},$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{1}{(1 - t)x + ty} = (1 - s) \frac{1}{x} + s \frac{1}{y}, \quad \text{avec} \quad s = \frac{ty}{(1 - t)x + ty} \in [0, 1].$$

Donc

$$\begin{aligned}
g((1-t)x+ty) &= ((1-t)x+ty) \cdot f\left(\frac{1}{(1-t)x+ty}\right) \\
&= ((1-t)x+ty) \cdot f\left((1-s)\frac{1}{x} + s\frac{1}{y}\right) \\
&\leq ((1-t)x+ty) \cdot \left((1-s)f\left(\frac{1}{x}\right) + sf\left(\frac{1}{y}\right)\right) \\
&= (1-t)x f\left(\frac{1}{x}\right) + t y f\left(\frac{1}{y}\right) \\
&= (1-t)g(x) + t g(y) .
\end{aligned}$$

On a donc prouvé la convexité de g .

La réciproque se traite de la même manière car, si $g(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right)$, alors $f(x) = x g\left(\frac{1}{x}\right)$.

Intégration sur un segment

5. Trouver les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \int_x^y f(t) dt = \frac{y-x}{2} (f(x) + f(y)) .$$

- Si f vérifie (*), alors f est affine: en effet, soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad F(y) - F(x) = \frac{y-x}{2} (f(x) + f(y)) ,$$

puis en dérivant par rapport à y :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(y) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) + \frac{y-x}{2} f'(y) ,$$

soit $f(y) - f(x) = (y-x) f'(y)$. En particulierisant pour $y = 0$, cela donne

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f'(0) x + f(0) ,$$

donc f est une fonction affine.

- Réciproquement, si f est affine, $f(x) = ax + b$, on vérifie que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \int_x^y f(t) dt = \frac{a}{2}(y^2 - x^2) + b(y-x) = \frac{y-x}{2} (a(x+y) + 2b) = \frac{y-x}{2} (f(x) + f(y)) .$$

Conclusion: Les solutions sont les fonctions affines.

6. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout x réel, on pose

$$f(x) = \int_0^x g(t) \sin(x-t) dt .$$

- a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = \int_0^x g(t) \cos(x-t) dt$.
- b. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.
- c. Acheter la résolution de cette équation différentielle.

- a. En transformant $\sin(x-t)$ par les formules d'addition de la trigonométrie, on voit que

$$f(x) = \sin(x) \int_0^x g(t) \cos(t) dt - \cos(x) \int_0^x g(t) \sin(t) dt .$$

Il résulte alors immédiatement du théorème fondamental de l'analyse que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) \int_0^x g(t) \cos(t) dt + \sin(x) g(x) \cos(x) + \sin(x) \int_0^x g(t) \sin(t) dt - \cos(x) g(x) \sin(x) \\ &= \int_0^x g(t) (\cos(x) \cos(t) + \sin(x) \sin(t)) dt \\ &= \int_0^x g(t) \cos(x-t) dt . \end{aligned}$$

- b. De la même façon, on montre que f' est de classe $\mathcal{C}^1$, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin(x) \int_0^x g(t) \cos(t) dt + g(x) \cos^2(x) + \cos(x) \int_0^x g(t) \sin(t) dt + g(x) \sin^2(x) \\ &= -f(x) + g(x) , \end{aligned}$$

donc f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.

- c. L'équation est linéaire et on a obtenu une solution particulière, il reste donc à ajouter la solution générale de l'équation homogène $y'' + y = 0$. Cela donne

$$y(x) = A \cos(x) + B \sin(x) + \int_0^x g(t) \sin(x-t) dt ,$$

ou encore

$$y(x) = \left(A - \int_0^x g(t) \sin(t) dt \right) \cos(x) + \left(B + \int_0^x g(t) \cos(t) dt \right) \sin(x) .$$

-
7. Étude et représentation graphique de $g : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$. On précisera le comportement de $g(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$ et lorsque $x \rightarrow \pm\infty$.
-

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$. Alors f est définie et continue (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$, notons F l'une d'elles. On peut alors écrire $g(x) = F(2x) - F(x)$, donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$, avec

$$g'(x) = 2f(2x) - f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}} = \frac{2\sqrt{1+x^2+x^4} - \sqrt{1+4x^2+16x^4}}{\sqrt{1+4x^2+16x^4} \sqrt{1+x^2+x^4}}.$$

Comme $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ est du même signe que $a - b$ (avec a et b réels positifs), on déduit que $g'(x)$ est du signe de

$$4(1+x^2+x^4) - (1+4x^2+16x^4) = 3(1-4x^2).$$

En posant le changement de variable $t = -u$ dans l'intégrale définissant $g(x)$, on voit aussi que la fonction g est impaire. Nous l'étudierons donc sur $\mathbb{R}_+$. Le calcul de dérivée ci-dessus montre que g est croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, puis décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right]$. De plus, $g(0) = 0$.

On a $g'(0) = 1$, donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ à l'origine est la première bissectrice. On peut préciser la position par rapport à cette tangente en constatant que, pour $x \geq 0$,

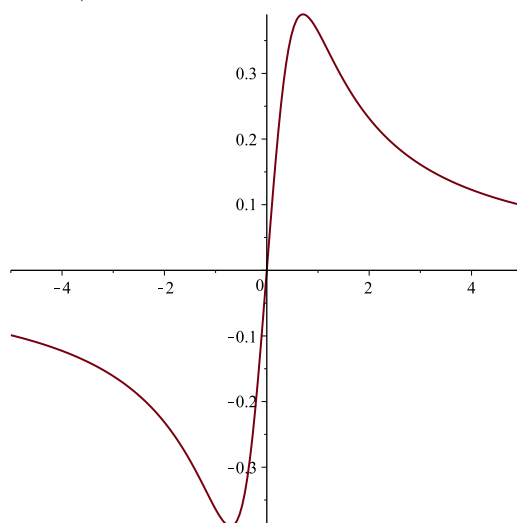
$$g(x) \leq \int_x^{2x} dt = x,$$

la courbe $\mathcal{C}_g$ est donc (pour $x \geq 0$) en-dessous de la première bissectrice.

Enfin, pour $x > 0$, on a

$$0 \leq g(x) \leq (2x - x) \max_{t \in [x, 2x]} \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+x^4}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

donc par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. On peut préciser: $g(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.



8. On pose $F(x) = \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}(\sqrt{t}) \, dt + \int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t}) \, dt$.

Montrer que la fonction F est constante sur $\mathbb{R}$ et préciser sa valeur.

Les fonctions $u : t \mapsto \operatorname{Arccos}(\sqrt{t})$ et $v : t \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t})$ sont définies et continues sur $[0, 1]$, notons U et V respectivement leurs primitives s'annulant en zéro ; U et V sont donc des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$.

Les fonctions $\varphi : x \mapsto \cos^2 x$ et $\psi : x \mapsto \sin^2 x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0, 1]$.

La fonction $F = U \circ \varphi + V \circ \psi$ est donc définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et admet pour dérivée

$$F' = \varphi' \cdot (U' \circ \varphi) + \psi' \cdot (V' \circ \psi) = \varphi' \cdot (u \circ \varphi) + \psi' \cdot (v \circ \psi),$$

soit

$$F'(x) = 2 \sin x \cos x \left(\operatorname{Arcsin}(\sqrt{\sin^2 x}) - \operatorname{Arccos}(\sqrt{\cos^2 x}) \right).$$

Notons que la fonction F est paire et π -périodique puisque les fonctions φ et ψ ci-dessus sont paires et π -périodiques. Pour montrer que F est constante sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de montrer que F est constante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Or, si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\sin x$ et $\cos x$ sont positifs donc $\sqrt{\sin^2 x} = \sin x$, $\sqrt{\cos^2 x} = \cos x$ et

$$F'(x) = 2 \sin x \cos x \left(\operatorname{Arcsin}(\sin x) - \operatorname{Arccos}(\cos x) \right).$$

Mais la relation $\operatorname{Arcsin}(\sin x) = x$ est vraie pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tandis que la relation $\operatorname{Arccos}(\cos x) = x$ est vraie pour $x \in [0, \pi]$. Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a donc $F'(x) = 0$. La fonction F est donc constante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme elle est paire et π -périodique, elle est constante sur $\mathbb{R}$. Pour calculer sa valeur, calculons $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ en utilisant la relation classique $\forall x \in [0, 1] \quad \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$:

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arccos}(\sqrt{t}) \, dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t}) \, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} \, dt = \frac{\pi}{4}.$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{\pi}{4}$.

9. En utilisant une somme de Riemann, donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.

Rappelons que, si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux, alors la somme de Riemann

$R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers l'intégrale $\int_0^1 f(x) \, dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.

En choisissant $f : x \mapsto \sqrt{x}$, on a

$$R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n^{3/2}} S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3}.$$

Donc $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}.$

10.a. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha > 1$.

b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right).$

a. On reconnaît une somme de Riemann puisque

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2).$

Pour $\alpha > 1$, posons $T_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha}$. Alors

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^\alpha} \right]$$

et l'expression entre crochets est de nouveau une somme de Riemann admettant pour limite $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^\alpha} = \frac{1-2^{1-\alpha}}{\alpha-1}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 0$. Plus précisément, $T_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1-2^{1-\alpha}}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$

b. Posons $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et $U_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$. On a vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(2)$. D'autre part, on sait que $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, mais il va falloir écrire cela avec un peu plus de précision. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre deux à la fonction $f = \sin$, on a, pour tout x réel positif,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| = |\sin(x) - x| \leq \frac{x^3}{3!} \max_{t \in [0, x]} |f^{(3)}(t)| \leq \frac{x^3}{6}.$$

On en déduit que

$$|U_n - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\sin\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} \right) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \left| \sin\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{6k^3} \leq n \frac{1}{6(n+1)^3},$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - S_n) = 0$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(2)$. On peut aussi appliquer la question **a.** avec $\alpha = 3$.

- 11.** En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à $f : t \mapsto \ln(1+t)$ entre 0 et 1, montrer que la série harmonique alternée a pour somme $\ln(2)$, i.e. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour f entre 0 et 1 (légitime car f est de classe $\mathcal{C}^\infty$) s'écrit

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (1-0)^k \right| \leq \frac{M_{n+1} (1-0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{avec} \quad M_{n+1} = \max_{t \in [0,1]} |f^{(n+1)}(t)|.$$

On calcule les dérivées successives de f , on a $f'(t) = \frac{1}{1+t}$, $f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$ et, par une récurrence facile, $f^{(k)}(t) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+t)^k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. En particulier, on a $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, et $M_{n+1} = \max_{t \in [0,1]} |f^{(n+1)}(t)| = |f^{(n+1)}(0)| = n!$

Du coup, le majorant $\frac{M_{n+1} (1-0)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et,

par encadrement, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln(2)$, on a $\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = \ln(2)$, ce qu'il fallait démontrer.

- 12.** Pour p et q entiers naturels, on pose $I_{p,q} = \int_a^b (t-a)^p (b-t)^q dt$.

- a.** Trouver une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
b. Exprimer $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles.

- a.** Une hipépé donne directement

$$I_{p,q} = \left[\frac{(t-a)^{p+1}}{p+1} (b-t)^q \right]_a^b + \frac{q}{p+1} \int_a^b (t-a)^{p+1} (b-t)^{q-1} dt = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}.$$

- b.** Par une récurrence immédiate, pour tout $k \in \llbracket 0, q \rrbracket$, on a

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} \frac{q-1}{p+2} \cdots \frac{q-k+1}{p+k} I_{p+k,q-k}$$

et, en particulier, pour $k = q$, on obtient

$$I_{p,q} = \frac{q(q-1) \cdots 1}{(p+1)(p+2) \cdots (p+q)} I_{p+q,0} = \frac{p! q!}{(p+q)!} I_{p+q,0} = \frac{p! q!}{(p+q+1)!} (b-a)^{p+q+1}.$$

13. Expliciter et représenter $F : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{3 + \cos^2(t)}$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{3 + \cos^2 t}$ est définie et continue (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$, et F est sa primitive qui s'annule en 0. Donc F est aussi définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En posant le changement de variable $t = -u$, on peut remarquer que F est impaire.

Tant que $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on peut aussi poser dans l'intégrale définissant $F(x)$, le changement de variable $u = \tan(t)$, soit $t = \text{Arctan}(u)$, on a alors $\cos^2(t) = \frac{1}{1 + \tan^2(t)} = \frac{1}{1 + u^2}$, et on obtient

$$F(x) = \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{3 + \frac{1}{1+u^2}} \frac{du}{1+u^2} = \int_0^{\tan(x)} \frac{du}{4 + 3u^2}.$$

En posant enfin $u = \frac{2}{\sqrt{3}}v$, on a, toujours pour $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$,

$$F(x) = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2} \tan(x)} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} dv}{4(1+v^2)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{Arctan} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \tan(x) \right).$$

Comme F est continue, on a $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$ et $F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$.

La fonction f étant π -périodique, on déduit (par exemple en dérivant) que $F(x + \pi) - F(x)$ est constant, donc

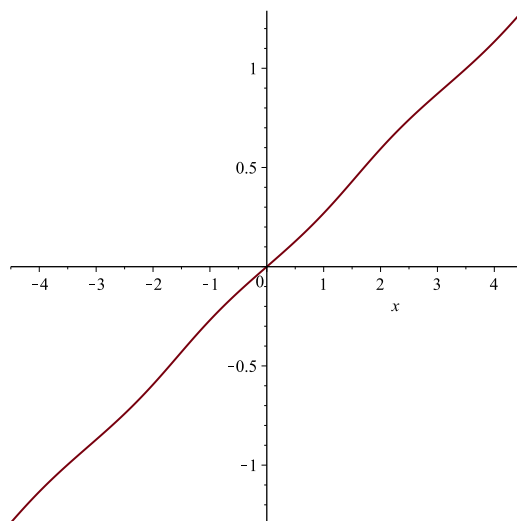
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x + \pi) - F(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

On en déduit facilement que, pour tout k entier relatif, on a

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[\quad F(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{Arctan} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \tan(x) \right) + k \frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$

$$\text{et } F\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} + k \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

La courbe représentative de F n'est pas très spectaculaire!



Convergence et calcul d'intégrales généralisées.

14. Quelle est la nature des intégrales généralisées suivantes ?

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} ; \quad I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt ; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2 + 1} dt ; \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt .$$

a. La fonction positive $f : t \mapsto \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1[$. En effet, au voisinage de 1, on a $f(t) \sim \frac{1}{1-t}$ et cette dernière fonction n'est pas intégrable en 1 puisque $u \mapsto \frac{1}{u}$ n'est pas intégrable en 0. L'intégrale I_1 est donc divergente.

b. Soit $f : t \mapsto e^{-t} \ln(t)$, alors f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. En effet,
- sur $]0, 1]$, on a $|f(t)| \leq |\ln(t)|$, et la fonction $\ln$ est intégrable sur $]0, 1]$, donc f est intégrable sur $]0, 1]$.
- au voisinage de $+\infty$, on a $t^2 f(t) = t^2 e^{-t} \ln(t) = o(t^3 e^{-t})$ et cette expression tend vers 0 par croissances comparées, donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$, ce qui entraîne l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$.

L'intégrale I_2 est donc (absolument) convergente.

c. Soit $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2 + 1}$, alors f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. En effet,
- sur $]0, 1]$, on a $|f(t)| \leq |\ln(t)|$, et la fonction $\ln$ est intégrable en 0, donc f est intégrable en 0.

- au voisinage de $+\infty$, on a $t^{3/2} f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ en $+\infty$
d'où l'intégrabilité de f en $+\infty$.

L'intégrale I_3 est donc (absolument) convergente.

d. Soit $f : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}$, alors f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. En effet,

- on a $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et cette dernière fonction est intégrable sur $]0, 1]$, donc f est intégrable sur $]0, 1]$.

- au voisinage de $+\infty$, on a $t^{5/4} f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^{1/4}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^{5/4}}\right)$ en $+\infty$
d'où l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$.

L'intégrale I_4 est donc convergente.

15. Intégrales de Bertrand.

Étudier la nature de l'intégrale $I_{\alpha, \beta} = \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$, avec α et β deux réels.

Posons $f(t) = \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ pour $t \in [e, +\infty[$.

• Supposons $\alpha > 1$. Soit γ un réel tel que $1 < \gamma < \alpha$. Par croissances comparées, on a alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\gamma f(t) = 0$, soit $f(t) = o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, puisque l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ converge, on déduit la convergence de l'intégrale $I_{\alpha, \beta}$.

• Supposons $\alpha = 1$. Pour tout $x \in [e, +\infty[$, on a alors

$$F(x) = \int_e^x f(t) dt = \int_e^x \frac{dt}{t (\ln t)^\beta} = \begin{cases} \ln(\ln x) & \text{si } \beta = 1 \\ \frac{(\ln x)^{1-\beta} - 1}{1-\beta} & \text{si } \beta \neq 1 \end{cases}.$$

On constate que cette intégrale partielle admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$.

• Supposons $\alpha < 1$. On constate alors que $\frac{1}{t f(t)} = t^{\alpha-1} (\ln t)^\beta \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, ce qui peut se traduire par $\frac{1}{t} = o(f(t))$ en $+\infty$. L'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t}$ étant divergente, on déduit la divergence de l'intégrale $I_{\alpha, \beta}$.

Bilan. L'intégrale de Bertrand $I_{\alpha, \beta}$ converge si et seulement si $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

16. Montrer la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{\frac{3}{2}} - 1} dt$.

C'est une intégrale "quadruplement généralisée" puisque la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^{\frac{3}{2}} - 1}$ est continue sur les intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$, et a priori non définie au point 1. Mais en fait, on a $\ln t \underset{t \rightarrow 1}{\sim} t - 1$, et en posant $t = 1 + h$ avec $h \rightarrow 0$, on voit que

$$t^{\frac{3}{2}} - 1 = (1 + h)^{\frac{3}{2}} - 1 \sim \frac{3}{2}h = \frac{3}{2}(t - 1) .$$

Finalement, la fonction f est prolongeable en une fonction continue sur $]0, +\infty[$ en posant $f(1) = \frac{2}{3}$.

Au voisinage de 0, on a $f(t) \sim -\ln t = |\ln t|$, fonction réputée intégrable sur $]0, 1[$, donc f est intégrable sur $]0, 1[$.

Au voisinage de $+\infty$, on a $f(t) \sim \frac{\ln(t)}{t^{\frac{3}{2}}}$, mais $\ln t = o\left(t^{\frac{1}{4}}\right)$ par les résultats classiques de croissances comparées, donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^{\frac{5}{4}}}\right)$, avec $\frac{5}{4} > 1$, donc f est aussi intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

17. Convergence et calcul des intégrales généralisées suivantes:

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh}(t)} ; \quad I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt ; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt ; \quad I_4 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}} dt .$$

- a.** La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(t)}$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$, et $f(t) = \frac{2}{e^t - e^{-t}}$, on a donc $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-t}$. Comme $t \mapsto 2e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, la fonction f l'est aussi.

Pour le calcul, on pose $u = e^t$, on a alors

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{2 dt}{e^t - e^{-t}} = 2 \int_e^{+\infty} \frac{du}{u^2 - 1} = \int_e^{+\infty} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du = \left[\ln \left(\frac{u-1}{u+1} \right) \right]_e^{+\infty} ,$$

$$\text{donc } I_1 = \ln \left(\frac{e+1}{e-1} \right) .$$

- b.** La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ est définie et continue sur $]0, 1[$, et on a $t^{3/4} f(t) = t^{1/4} \ln(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} 0$ par croissances comparées, donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^{3/4}}\right)$ au voisinage. Comme $\frac{3}{4} < 1$, cette dernière fonction (de type Riemann) est intégrable sur $]0, 1[$, donc f est aussi intégrable sur $]0, 1[$ par comparaison.

Pour le calcul, on pose $u = \sqrt{t}$, on a alors

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{2 \ln(u)}{u} 2u du = 4 \int_0^1 \ln(u) du = -4 .$$

- c. La fonction $f : t \mapsto \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$. On a $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$, ce qui entraîne l'intégrabilité de f sur $]0, 1]$. De plus, $t^{3/2} f(t) = t e^{-\sqrt{t}} = e^{\ln(t) - \sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ au voisinage de $+\infty$, ce qui entraîne l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$.

Pour le calcul, on pose $u = \sqrt{t}$, on a alors

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} 2u du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u} du = 2.$$

- d. La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}$ est définie et continue sur $]0, 1[$. On a $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$ d'où l'intégrabilité de f sur $]0, \frac{1}{2}]$, et f est prolongeable par continuité au point 1, puisque $f(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{t-1}{\sqrt{1-t}} = -\sqrt{1-t}$, donc $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 0$. Donc f est intégrable sur $]0, 1[$.

Pour le calcul, on pose $u = \sqrt{1-t}$, on a alors

$$I_4 = \int_1^0 \frac{\ln(1-u^2)}{u} (-2u) du = 2 \int_0^1 (\ln(1+u) + \ln(1-u)) du = 2 \int_0^2 \ln(u) du = 4 \ln(2) - 4$$

après quelques transformations d'écriture laissées au vaillant lecteur.

18. Convergence et calcul des intégrales généralisées suivantes:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)} ; I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)} ; I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt ; I_4 = \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt.$$

- a. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{(t+1)(t+2)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, et on a $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, cela garantit la convergence de l'intégrale I_1 . Ensuite, on décompose en éléments simples: $f(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ est donc $F : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$. Finalement, $I_1 = [F(x)]_0^{+\infty} = \ln(2)$.

- b. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, et on a $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t}$, cela garantit la convergence de l'intégrale I_2 . Le changement de variable $u = e^t$ (la fonction $t \mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$) donne

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u(u+1)\left(\frac{1}{u}+1\right)} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^2} = \frac{1}{2}.$$

- c. La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$, et on a $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$, la fonction $\ln$ étant réputée intégrable sur $]0, 1]$, on en déduit déjà l'intégrabilité de f sur $]0, 1]$. Au voisinage de $+\infty$, on a $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^2}$, donc $t^{\frac{3}{2}} f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, ce qui entraîne l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$ par comparaison aux fonctions de type Riemann. Tout cela prouve la convergence de l'intégrale I_3 . Une astuce permet de calculer I_3 . En effet, le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ donne

$$I_3 = \int_{+\infty}^0 \frac{\ln \frac{1}{u}}{\left(1 + \frac{1}{u}\right)^2} \left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{-\ln(u)}{(u+1)^2} du = -I_3,$$

donc $I_3 = 0$.

- d. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante, de $]0, +\infty[$ vers lui-même. L'intégrale I_4 est donc de même nature (et a même valeur en cas de convergence) que l'intégrale $J_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+u^2)}{u^2} du$. La fonction $g : u \mapsto \frac{\ln(1+u^2)}{u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 avec $g(0) = 1$, et au voisinage de $+\infty$ on a $g(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln(u)}{u^2} = o\left(\frac{1}{u^{3/2}}\right)$ par croissances comparées, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où la convergence de l'intégrale J_4 et celle de I_4 . On calcule J_4 par une hipépé (la fonction entre crochets a des limites nulles aux bornes):

$$I_4 = J_4 = \left[-\frac{1}{u} \ln(1+u^2) \right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = 0 + 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi.$$

19. Calculer $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, avec $a < b$. On pourra poser $x = \frac{a+b}{2} + t$.

Posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ pour $x \in]a, b[$. Lorsque $x \rightarrow a$, on a $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{b-a}} \frac{1}{\sqrt{x-a}}$.

On sait que $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$, on en déduit (en faisant une trans-

lation de la variable, c'est-à-dire en posant $t = x - a$) que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-a}}$ est intégrable sur

$]a, a + \alpha]$. Donc f est intégrable sur $]a, c]$ avec par exemple $c = \frac{a+b}{2}$. On montre de même que f est intégrable sur $[c, b[$. Finalement, f est intégrable sur $]a, b[$.

On met le trinôme sous forme canonique :

$$(x-a)(b-x) = -\left[x^2 - (a+b)x + ab\right] = -\left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right].$$

On pose alors le changement de variable affine $x - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} u$ pour rechercher une primitive F de f sur $]a, b[$ (un calcul d'intégrale sans borne est sans doute ici plus pratique. Pour respecter les indications de l'énoncé, on peut procéder en deux temps: d'abord poser $x = \frac{a+b}{2} + t$, puis poser $t = \frac{b-a}{2} u$) :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \operatorname{Arcsin} u = \operatorname{Arcsin} \left[\frac{2}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Enfin } I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \pi.$$

20. Convergence et calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \ln x}{(1+x^4)^3} dx$.

a. Soit $f : x \mapsto \frac{x^3 \ln x}{(1+x^4)^3}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est prolongeable par continuité en 0 puisque

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) \sim \frac{\ln x}{x^9}$, donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^8}\right)$, ce qui garantit largement l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$, donc finalement sur $]0, +\infty[$.

b. Pour le calcul, posons d'abord $u = x^4$, ainsi $I = \frac{1}{16} J$, avec $J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln u \, du}{(1+u)^3}$. Pour calculer J , on va procéder à une intégration par parties, mais en y allant prudemment car les deux termes obtenus sont divergents en 0. Posons donc, pour $a > 0$, $J_a = \int_a^{+\infty} \frac{\ln u \, du}{(1+u)^3}$. On a alors

$$\begin{aligned} J_a &= \left[-\frac{\ln u}{2(1+u)^2} \right]_a^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)^2} \\ &= \frac{\ln a}{2(1+a)^2} + \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{(1+u)^2} - \frac{1}{1+u} \right) du \\ &= \frac{\ln a}{2(1+a)^2} - \frac{1}{2} \ln a - \frac{1}{2(1+a)} + \frac{1}{2} \ln(1+a) \\ &= -\frac{(a+2)a \ln a}{2(1+a)^2} - \frac{1}{2(1+a)} + \frac{1}{2} \ln(1+a) \xrightarrow{a \rightarrow 0} -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc $J = -\frac{1}{2}$, puis $I = -\frac{1}{32}$.

21. Soient les intégrales généralisées $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{1+t^4}$.

- a. Montrer leur convergence.
- b. Calculer J .
- c. Factoriser, dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = X^4 + 1$.
- d. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4}$, puis la calculer.

- a. Les fonctions $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^4}$ et $g : t \mapsto \frac{t}{1+t^4}$ sont continues sur $[0, +\infty[$, et on a les équivalents $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$ et $g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$, d'où l'on déduit leur intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$.
- b. En posant $u = t^2$, on a $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{4}$.
- c. $X^4 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 + 1)^2 - (X\sqrt{2})^2 = (X^2 - X\sqrt{2} + 1)(X^2 + X\sqrt{2} + 1)$.
Le polynôme $X^4 + 1$ n'a visiblement pas de racine réelle (pour tout x réel, on a $x^4 + 1 > 0$), sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est donc constituée de deux facteurs du second degré sans racine réelle (i.e. de discriminant strictement négatif).
- d. Le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ donne $I = \int_{+\infty}^0 -\frac{1}{1+\frac{1}{u^4}} \frac{du}{u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{1+u^4}$.

De la question c., on déduit $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 - t\sqrt{2} + 1)(t^2 + t\sqrt{2} + 1)}$, donc

$$\begin{aligned}
 I - \sqrt{2} J + I &= \int_0^{+\infty} \frac{(t^2 - t\sqrt{2} + 1) dt}{(t^2 - t\sqrt{2} + 1)(t^2 + t\sqrt{2} + 1)} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \quad (\text{mise sous forme canonique du trinôme}) \\
 &= \int_1^{+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} du}{\frac{1}{2}(u^2 + 1)} \quad (\text{on pose } t + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} u) \\
 &= \sqrt{2} \int_1^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} \\
 &= \sqrt{2} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Connaissant J , on déduit $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

22. On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$.

a. Montrer que ces intégrales sont convergentes et que $I = J$.

b. Calculer $I + J$. En déduire I et J .

a. La fonction $f : t \mapsto \ln(\sin t)$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et, au voisinage de 0, on a $\sin t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$, ce qui peut écrire $\sin(t) = t(1 + \varepsilon(t))$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$, donc

$$\ln(\sin t) = \ln(t) + \ln(1 + \varepsilon(t)) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t),$$

le second terme (de limite nulle) étant négligeable devant le premier (de limite infinie). La fonction $\ln$ étant intégrable sur $]0, 1]$ ou sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit l'intégrabilité de f sur ce même intervalle, donc la convergence de l'intégrale I . Le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$ montre que les intégrales I et J sont de même nature et sont égales en cas de convergence. Donc l'intégrale J converge et $J = I$.

b. On a

$$2I = I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t \cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2} \sin(2t)\right) dt = -\frac{\pi}{2} \ln(2) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t) dt,$$

Or, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin u) du = \frac{1}{2} \left(I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u) du \right)$ par le changement de variable $u = 2t$ puis la relation de Chasles. Enfin, en posant $v = \pi - u$, on a

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u) du = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\sin(\pi - v)) (-dv) = I$$

puisque $\sin(\pi - v) = \sin(v)$. Finalement, on a obtenu $2I = -\frac{\pi}{2} \ln(2) + I$, donc

$$I = J = -\frac{\pi}{2} \ln(2).$$

23. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, continue, telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ soit convergente. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

a. Pour $x > 0$, montrer que $\int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt$.

b*. En déduire convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$.

a. Les intégrales $\int_x^{+\infty} \frac{f(at)}{t} dt$ et $\int_x^{+\infty} \frac{f(bt)}{t} dt$ sont convergentes puisqu'elles se ramènent aux intégrales $\int_{ax}^{+\infty} \frac{f(u)}{u} du$ et $\int_{bx}^{+\infty} \frac{f(v)}{v} dv$ par les changements de variable $u = at$ et

$v = bt$. Puis

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt &= \int_x^{+\infty} \frac{f(at)}{t} dt - \int_x^{+\infty} \frac{f(bt)}{t} dt \\ &= \int_{ax}^{+\infty} \frac{f(u)}{u} du - \int_{bx}^{+\infty} \frac{f(u)}{u} du \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u} du \quad (\text{relation de Chasles}). \end{aligned}$$

b. La continuité de f en 0 permet d'écrire $f(t) = f(0) + \varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$. On a donc, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u} du \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{u} du + \int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(u)}{u} du \\ &= f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(u)}{u} du. \end{aligned}$$

Or, $\left| \int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right| \leq \int_{ax}^{bx} \frac{|\varepsilon(u)|}{u} du \leq \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \max_{u \in [ax, bx]} |\varepsilon(u)|$. Or, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\max_{u \in [ax, bx]} |\varepsilon(u)| \right) = 0$ (revenir à la définition de la limite pour s'en persuader!), on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$, ce qui montre la convergence de l'intégrale proposée et fournit la relation $\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

24. Convergence et, le cas échéant, calcul de $I(a, b) = \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t} + a \sqrt{t+1} + b \sqrt{t+2} \right) dt$.

La fonction $f : t \mapsto \sqrt{t} + a \sqrt{t+1} + b \sqrt{t+2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, cherchons-en un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{t} \left(1 + a \sqrt{1 + \frac{1}{t}} + b \sqrt{1 + \frac{2}{t}} \right) \\ &= \sqrt{t} \left[1 + a \left(1 + \frac{1}{2t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right) + b \left(1 + \frac{1}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right) \right] \\ &= (1 + a + b) \sqrt{t} + \left(\frac{a}{2} + b \right) \frac{1}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

On en déduit la discussion suivante:

- si $a + b + 1 \neq 0$, alors $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} C \sqrt{t}$, où C est une constante non nulle, donc l'intégrale proposée est divergente ;

- si $a + b + 1 = 0$ et $\frac{a}{2} + b \neq 0$, alors $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{D}{\sqrt{t}}$, où D est une constante non nulle, donc l'intégrale proposée est de nouveau divergente puisque $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$;

- si $a + b + 1 = 0$ et $\frac{a}{2} + b = 0$, alors $f(t) = O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ au voisinage de $+\infty$, et f est alors intégrable sur $[0, +\infty[$.

Bilan. L'intégrale proposée converge si et seulement si $a + b + 1 = 0$ et $\frac{a}{2} + b = 0$, i.e. si et seulement si $a = -2$ et $b = 1$.

On doit donc maintenant calculer

$$\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t} - 2\sqrt{t+1} + \sqrt{t+2} \right) dt = \frac{2}{3} \left[t^{3/2} - 2(t+1)^{3/2} + (t+2)^{3/2} \right]_0^{+\infty}.$$

De nouveau par des développements asymptotiques,

$$\begin{aligned} t^{3/2} - 2(t+1)^{3/2} + (t+2)^{3/2} &= t^{3/2} \left(1 - 2\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{3/2} + \left(1 + \frac{2}{t}\right)^{3/2} \right) \\ &= t^{3/2} \left[1 - 2\left(1 + \frac{3}{2t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) + \left(1 + \frac{3}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \right] \\ &= O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à évaluer en 0 pour conclure que

$$\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t} - 2\sqrt{t+1} + \sqrt{t+2} \right) dt = \frac{2}{3} \left(2 - 2^{3/2} \right) = \frac{4}{3} (1 - \sqrt{2}).$$

Intégrabilité.

25. Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2 + 1}$ et $g : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2 + 4}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer leurs intégrales sur $]0, +\infty[$ sans passer par un calcul de primitive.

- Pour l'intégrabilité sur $]0, 1]$, on a $|f(x)| \sim |\ln x|$ et $|g(x)| \sim \frac{1}{4} |\ln x|$ au voisinage de zéro, la fonction $\ln$ étant intégrable sur $]0, 1]$, donc f et g sont aussi intégrables sur cet intervalle.
- Pour l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$, utilisons le fait que $\ln x = o(\sqrt{x})$ au voisinage de $+\infty$, on en déduit que $f(x)$ et $g(x)$ sont tous deux négligeables devant $\frac{1}{x^{3/2}}$ lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{3/2}}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, donc f et g sont aussi intégrables sur cet intervalle.

- En posant $x = \frac{1}{t}$, on a

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx = \int_{+\infty}^1 \frac{-\ln t}{\frac{1}{t^2} + 1} \left(-\frac{dt}{t^2} \right) = - \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt ,$$

donc, en ajoutant les deux, $\int_{\mathbb{R}_+^*} f = 0$.

- En posant $x = 2u$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(2u)}{4(u^2 + 1)} 2 du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2 + 1} du + \frac{\ln 2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 1} , \end{aligned}$$

soit $\int_{\mathbb{R}_+^*} g = \frac{\pi \ln 2}{4}$.

26. Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 2$.

a. Montrer la convergence de l'intégrale généralisée $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$.

b. Montrer les inégalités $0 \leq I_\alpha \leq \int_0^\pi \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$.

a. La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

- Au voisinage de 0, on a $f(t) \sim \frac{1}{t^{\alpha-1}}$, avec $\alpha - 1 < 2$, ce qui assure l'intégrabilité sur $]0, 1]$.

• Montrons maintenant la convergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ (ce qui est moins fort que l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$, cette dernière propriété n'étant pas forcément vraie ici) : il suffit pour cela de montrer que l'intégrale partielle $F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Pour cela, on intègre par parties :

$$F(x) = \frac{\cos x}{x^\alpha} - \cos 1 - \alpha \int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt .$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} = 0$, et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt$ est absolument convergente (puisque l'intégrande est majoré en valeur absolue par $\frac{1}{t^{\alpha+1}}$, intégrable sur $[1, +\infty[$ étant donné que $\alpha + 1 > 1$), donc convergente, ce qui assure l'existence d'une limite finie pour l'intégrale partielle $\int_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt$.

- b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $J_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$. L'intégrande étant du signe de $(-1)^k$ sur l'intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$, l'intégrale J_k est elle-même du signe de $(-1)^k$, et $|J_k| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt$. La suite $(|J_k|)$ est strictement décroissante et tend vers zéro : en effet, par une translation de la variable, on a

$$|J_{k+1}| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(t+\pi)^\alpha} dt < \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt = |J_k|$$

puisque $\frac{|\sin t|}{(t+\pi)^\alpha} \leq \frac{|\sin t|}{t^\alpha}$ sur l'intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$, l'inégalité étant stricte sur l'intervalle ouvert. De plus,

$$|J_k| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(k\pi)^\alpha} dt = \frac{1}{(k\pi)^\alpha} \int_0^\pi |\sin t| dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Or, $I_\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} J_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k |J_k|$, le critère spécial des séries alternées permet donc d'affirmer que, pour tout $n \geq -1$, le reste d'ordre n , noté r_n , est de même signe (strictement) que "le premier terme négligé". Ainsi, $r_{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} J_k = I_\alpha$ est du signe de J_0 , donc strictement positif, ce qui donne $0 < I_\alpha$. De même, $r_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} J_k = I_\alpha - J_0$ est du signe de J_1 , donc strictement négatif, ce qui donne $I_\alpha < J_0$; on a donc obtenu l'encadrement demandé.

27.a. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ (*sinus cardinal*) n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, mais que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente.

- b. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin \lambda t dt = 0$.
- c. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$ et $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt$. Montrer que la suite (J_n) est constante, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0$, et en déduire que $I = \frac{\pi}{2}$.
- d. En déduire que $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \frac{\pi}{2}$.

a. Vu en cours.

b. Puisque f est de classe C^1 , on peut intégrer par parties, cela donne, pour $\lambda > 0$,

$$\int_a^b f(t) \sin \lambda t dt = \frac{1}{\lambda} \left(f(a) \cos(\lambda a) - f(b) \cos(\lambda b) + \int_a^b f'(t) \cos(\lambda t) dt \right).$$

Avec, en vrac, l'inégalité triangulaire, la majoration de la valeur absolue d'une intégrale par l'intégrale de la valeur absolue, le fait que $|\cos| \leq 1$, on a $\left| \int_a^b f(t) \sin \lambda t \, dt \right| \leq \frac{K}{\lambda}$, où K est une constante (indépendant de λ), par exemple $K = 2\|f\|_\infty + (b-a)\|f'\|_\infty$. On en déduit que cette intégrale (dépendant du paramètre λ) tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

- c. Les intégrales J_n et K_n sont “faususement généralisées” en 0, puisque les intégrandes sont prolongeables par continuité en ce point. On a

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t}{\sin t} \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(2n+2)t \, dt = 0$$

en utilisant la relation $\sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$. La suite (J_n) est donc constante, donc pour tout n entier naturel, $J_n = J_0 = \frac{\pi}{2}$. Ensuite,

$$J_n - K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t - \sin t}{t \sin t} \sin(2n+1)t \, dt,$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0$ par la question b. Notons que, pour appliquer cette question b.,

il faut montrer que la fonction $f : t \mapsto \frac{t - \sin t}{t \sin t}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le **segment** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ce qui nécessite une étude locale en zéro... qui est laissée au vaillant

lecteur! *Ce prolongement doit vérifier $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{1}{6}$, sinon vous recommencez vos calculs!* On en déduit alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$, mais par ailleurs, un

changement de variable tout simple donne $K_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \, dx$ (intégrale partielle liée à l'intégrale généralisée I), on a donc aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = I$. Finalement, $I = \frac{\pi}{2}$.

- d. La fonction $g : t \mapsto \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car elle est prolongeable par continuité en zéro, et qu'elle est $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$. Une intégration par parties (justifiée car l'expression entre crochets admet des limites finies en 0 et en $+\infty$) donne

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \, dt &= \left[-\frac{\sin^2 t}{t}\right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin t \cos t}{t} \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t} \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

28. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \sin(e^t) \, dt$ est convergente.

La fonction $f : t \mapsto \sin(e^t)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Écrivons une intégrale partielle, et intégrons par parties:

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin(e^t) dt &= \int_0^x e^{-t} \cdot e^t \sin(e^t) dt \\ &= \left[-e^{-t} \cos(e^t) \right]_0^x - \int_0^x e^{-t} \cos(e^t) dt \\ &= \cos(1) - e^{-x} \cos(e^x) - \int_0^x e^{-t} \cos(e^t) dt . \end{aligned}$$

Comme $|e^{-x} \cos(e^x)| \leq e^{-x}$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cos(e^x) = 0$. La même majoration de la valeur absolue montre que la fonction $t \mapsto e^{-t} \cos(e^t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(e^t) dt$ est convergente. Ainsi, l'intégrale partielle $\int_0^x \sin(e^t) dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, ce qui est la définition de la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \sin(e^t) dt$.

Remarque. On peut montrer que cette intégrale n'est pas absolument convergente, autrement dit la fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. L'insatiable lecteur vérifiera en effet que le changement de variable $u = e^t$ transforme l'intégrale $\int_0^{+\infty} |\sin(e^t)| dt$ en l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(u)}{u} \right| du$, qui est divergente, c'est bien connu.

29. Calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx$. On commencera par linéariser $\sin^3 x$ puis on essaiera de décomposer en une somme de deux intégrales.

Tout d'abord, cette intégrale impropre est convergente : la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin^3 x}{x^2}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ d'où l'intégrabilité de f sur $]0, 1]$, et la majoration $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$ prouve l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$.

On linéarise : $\sin^3 x = \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x)$ (calcul laissé au lecteur).

On serait tenté d'écrire $I = \frac{3}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx - \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2} dx$, MAIS... ces deux intégrales impropres sont divergentes (à cause de la borne 0, pas de problème d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$).

On écrira donc $I = \lim_{a \rightarrow 0} I_a$, avec $I_a = \int_a^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx$, puis

$$I_a = \frac{3}{4} \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx - \frac{1}{4} \int_a^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{4} \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx - \frac{3}{4} \int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2} du \\
&= \frac{3}{4} \int_a^{3a} \frac{\sin u}{u^2} du
\end{aligned}$$

(on a posé $u = 3x$ dans la deuxième intégrale).

Au voisinage de zéro, on a $\sin u = u + o(u^2)$, donc $\frac{\sin u}{u^2} = \frac{1}{u} + r(u)$, la fonction $r(u)$ étant un “ $o(1)$ ” au voisinage de zéro: cela signifie que $\lim_{u \rightarrow 0} r(u) = 0$ et cela entraîne notamment que la fonction r est bornée au voisinage de zéro, posons donc $|r(u)| \leq M$ pour u proche de 0.

Alors $I_a = \frac{3}{4} \int_a^{3a} \frac{du}{u} + \frac{3}{4} \int_a^{3a} r(u) du = \frac{3}{4} \ln 3 + \frac{3}{4} \int_a^{3a} r(u) du$. Or,

$$\left| \int_a^{3a} r(u) du \right| \leq \int_a^{3a} |r(u)| du \leq M(3a - a) = 2aM$$

et, en particulier, $\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{3a} r(u) du = 0$. Finalement, $I = \lim_{a \rightarrow 0} I_a = \frac{3}{4} \ln 3$.

- 30.** Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$. La fonction f' étant supposée intégrable sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t) dt$ est convergente. Donc f admet une limite finie en $+\infty$, à savoir $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t) dt$, notons-la l .
Supposons $l \neq 0$, on aurait $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} l$ et la fonction constante de valeur l n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ alors que f l'est, on a donc une contradiction. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- 31.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

- a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
- b. Montrer que ff' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

- a. Comme f' est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire $f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Comme f'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f''(t) dt$ est convergente, donc $f'(x)$ admet une limite finie l lorsque x tend vers $+\infty$. Il reste à montrer que $l = 0$.

Si on avait $l > 0$, alors il existerait $A > 0$ tel que, pour tout $t \geq A$, on ait $f'(t) \geq \frac{l}{2}$. Pour tout réel x supérieur à A , on pourrait écrire

$$f(x) = f(0) + \int_0^A f'(t) dt + \int_A^x f'(t) dt \geq f(0) + \int_0^A f'(t) dt + \frac{l}{2}(x - A) = \frac{l}{2}x + B,$$

où B est une constante. La fonction affine $x \mapsto \frac{l}{2}x + B$ est positive (pour x assez grand), et elle n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par comparaison, la fonction f ne serait pas non plus intégrable sur $\mathbb{R}_+$, ce qui est une contradiction. On obtient une contradiction analogue si on suppose $l < 0$. On a donc $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

- b. La fonction ff' est continue sur $[0, +\infty[$ et, au voisinage de $+\infty$, on a $f(x)f'(x) = o(f(x))$ d'après la question précédente, avec f supposée intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par comparaison, on déduit que ff' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

32. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f(0) = 0$. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x \left(\frac{f(t)}{t} \right)^2 dt \leq 2 \int_0^x \frac{f(t) f'(t)}{t} dt,$$

après avoir prouvé la convergence des intégrales considérées.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $f(0) = 0$, elle admet en 0 le développement limité à l'ordre un: $f(t) = f'(0) \cdot t + o(t)$. Ainsi, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = f'(0)$. Les fonctions $g : t \mapsto \left(\frac{f(t)}{t} \right)^2$ et $h : t \mapsto \frac{f(t) f'(t)}{t}$ sont toutes deux continues sur $]0, x]$ pour tout $x > 0$, et prolongeables par continuité en 0 en posant $g(0) = h(0) = (f'(0))^2$. Les intégrales considérées sont donc toutes deux "faussetment généralisées".

Une intégration par parties donne alors

$$\int_0^x \left(\frac{f(t)}{t} \right)^2 dt = \int_0^x f(t)^2 \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{f(t)^2}{t} \right]_0^x + \int_0^x \frac{2 f(t) f'(t)}{t} dt.$$

Cette i.p.p. est justifiée par le fait que le terme entre crochets admet une limite (nulle) en 0.

Le crochet vaut finalement $-\frac{f(x)^2}{x}$, il est négatif, ce qui fournit l'inégalité demandée.

33.a. Montrer que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- b*. Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt$. Montrer que $F(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- a. L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ est divergente ; pour le montrer, il suffit de prouver que les "intégrales partielles" ne sont pas majorées, c'est-à-dire que la fonction F introduite

à la question suivante n'est pas majorée sur $\mathbb{R}_+$. Remarquons que l'intégrale est "faussement impropre" en 0 puisque $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\sin t|}{t} = 1$ (fonction prolongeable par continuité). Pour cela, pour k entier naturel, on minore $I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$: comme $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{(k+1)\pi}$ sur l'intervalle considéré, on a

$$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

Donc, par la relation de Chasles, $F(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} I_k \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

On a noté comme d'habitude H_n la somme partielle d'ordre n de la série harmonique :

$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et on sait effectivement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$ (somme partielle d'une série di-

vergente à termes positifs). Rappelons aussi que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge (*intégrale de Dirichlet*), cela se prouve par une i.p.p., mais on vient de prouver qu'elle n'est pas absolument convergente, elle est donc "semi-convergente".

- b. Reprenons les notations introduites à la question précédente : on a $\frac{2}{(k+1)\pi} \leq I_k \leq \frac{2}{k\pi}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité de gauche étant valable aussi pour $k = 0$. En sommant, on obtient, pour tout n entier naturel non nul :

$$\frac{2}{\pi} H_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} \leq F(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} I_k = I_0 + \sum_{k=1}^{n-1} I_k \leq I_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k\pi} = I_0 + \frac{2}{\pi} H_{n-1}.$$

Or, on sait que $H_n \sim \ln n$ (résultat classique, on peut le retrouver par une comparaison série-intégrale), et $H_{n-1} \sim \ln(n-1) \sim \ln n$, donc par encadrement (*) : $F(n\pi) \sim \frac{2}{\pi} \ln n$ lorsque l'entier n tend vers l'infini. Soit maintenant x un réel strictement positif, on a l'encadrement $\pi \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor \leq x < \pi \left(1 + \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor \right)$ et, comme la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}_+$

(primitive d'une fonction continue positive), on a $F\left(\pi \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor\right) \leq F(x) \leq F\left(\pi \left(1 + \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor\right)\right)$,

et le minorant et le majorant sont tous deux équivalents à $\frac{2}{\pi} \ln x$ lorsque x tend vers l'infini.

Détaillons par exemple pour le minorant : on a, d'après (*), $F\left(\pi \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor\right) \sim \frac{2}{\pi} \ln \left(\left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor\right)$,

et on peut écrire

$$\left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor = \frac{x}{\pi} (1 + r(x)), \quad \text{avec} \quad r(x) = \frac{\pi}{x} \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $\ln \left(\left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor\right) = \ln x - \ln \pi + \ln(1 + r(x)) \sim \ln x$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ puisque les autres termes sont manifestement négligeables devant $\ln x$ au voisinage de $+\infty$.

Finalement, par encadrement, $F(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln x$ lorsque x tend vers l'infini.

34. Calculer, après avoir justifié son existence, $I = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) dx$.

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut donc, pour tout $x \geq 0$, définir $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$. D'après le théorème fondamental, la fonction f est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, avec $f'(x) = -e^{-x^2}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, posons alors $J(a) = \int_0^a \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) dx$. Notons que, pour $x \geq 1$, on a $0 \leq f(x) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-x}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$, ce qui justifie l'intégration par parties qui va suivre:

$$\begin{aligned} J(a) &= \int_0^a f(x) dx = [x f(x)]_0^a - \int_0^a x f'(x) dx = a f(a) + \int_0^a x e^{-x^2} dx \\ &= a f(a) + \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^a = a f(a) + \frac{1}{2} (1 - e^{-a^2}). \end{aligned}$$

L'intégrale $J(a)$ admet une limite finie lorsque $a \rightarrow +\infty$, ce qui justifie la convergence de l'intégrale I proposée et donne $I = \lim_{a \rightarrow +\infty} J(a) = \frac{1}{2}$.

35*. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue et 1-périodique. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ est convergente **si et seulement si** $\int_0^1 f(t) dt = 0$.

Soit F la primitive de f nulle en zéro: $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Une intégration par parties donne, pour $x \geq 1$,

$$(*) \quad \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = \frac{F(x)}{x} - F(1) + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2} dt.$$

Voyons maintenant comment gérer les différents termes.

La fonction f , étant continue et périodique, est bornée sur $\mathbb{R}$, posons $M = \|f\|_\infty$.

Soit $K = F(1) = \int_0^1 f(t) dt$. Pour $x \geq 0$, la relation de Chasles et la 1-périodicité de f permet d'écrire

$$(**) \quad F(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \int_k^{k+1} f(t) dt + \int_{\lfloor x \rfloor}^x f(t) dt = K \lfloor x \rfloor + \int_{\lfloor x \rfloor}^x f(t) dt.$$

On note que

$$\left| \int_{\lfloor x \rfloor}^x f(t) \, dt \right| = \left| \int_0^{x - \lfloor x \rfloor} f(t) \, dt \right| \leq \int_0^{x - \lfloor x \rfloor} |f(t)| \, dt \leq \int_0^1 |f(t)| \, dt \leq M .$$

Distinguons maintenant les deux cas:

- si $K = 0$, alors F est bornée sur $\mathbb{R}$ d'après (**), puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$, et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} \, dt$ est absolument convergente (*par comparaison avec celle de $t \mapsto \frac{M}{t^2}$*), on déduit alors de (*) la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \, dt$.
- si $K \neq 0$, alors $F(x) \sim K \lfloor x \rfloor \sim Kx$ lorsque x tend vers $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = K$, mais l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} \, dt$ est divergente puisque $\frac{F(t)}{t^2} \sim \frac{K}{t}$ au voisinage de $+\infty$; on déduit cette fois de (*) la divergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \, dt$.