

**ÉNONCÉ:** Discuter en fonction du réel  $\alpha$  la nature des intégrales suivantes:

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{1 - \cos(t)}{t^\alpha} dt \quad ; \quad J_\alpha = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad ; \quad K_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(t-1)^\alpha} dt .$$

### UN CORRIGÉ

Notons d'abord que les fonctions considérées sont toutes à valeurs positives sur les intervalles proposés. La convergence de l'intégrale équivaut donc à sa convergence absolue, et donc à l'intégrabilité de la fonction (l'intégrande) sur l'intervalle.

- a.** La fonction  $f : t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^\alpha}$  est continue et positive sur  $]0, 1]$  et, de l'équivalent classique  $1 - \cos(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2}{2}$ , on déduit l'équivalent  $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} t^{2-\alpha} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{t^{\alpha-2}}$ . Le cours indique que la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha-2}}$  est intégrable en 0 (ou sur  $]0, 1]$ ) si et seulement si  $\alpha - 2 < 1$ , i.e.  $\alpha < 3$ . Par le critère des équivalents,

**Bilan: l'intégrale  $I_\alpha$  est convergente si et seulement si  $\alpha < 3$ .**

- b.** La fonction  $g : t \mapsto t^{\alpha-1} e^{-t}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^* = ]0, +\infty[$ . Deux études locales s'avèrent nécessaires:

- en la borne 0, on a  $g(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{\alpha-1} = \frac{1}{t^{1-\alpha}}$ , d'où l'intégrabilité en 0 si et seulement si  $1 - \alpha < 1$ , i.e.  $\alpha > 0$ .
- en la borne  $+\infty$ , les résultats de croissance comparée donnent  $t^2 g(t) = t^{\alpha+1} e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ , et ceci quel que soit le réel  $\alpha$ ; on a donc, dans tous les cas,  $g(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  en  $+\infty$ , donc  $g$  est toujours intégrable en  $+\infty$ .

**Bilan: l'intégrale  $J_\alpha$  est convergente si et seulement si  $\alpha > 0$ .**

- c.** La fonction  $h : t \mapsto \frac{\ln(t)}{(t-1)^\alpha}$  est continue sur  $]1, +\infty[$ . Deux études locales s'avèrent ici aussi nécessaires:

- en la borne 1, par translation de la variable, on peut dire que  $h$  est intégrable en 1 si et seulement si la fonction  $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}$  est intégrable en 0; or,  $\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ , d'où l'intégrabilité en 0 si et seulement si  $\alpha - 1 < 1$ , soit  $\alpha < 2$ .
- en la borne  $+\infty$ , si l'on se souvient par exemple des intégrales de Bertrand (ou des séries de Bertrand) étudiées en exercice (*mais le résultat de cette étude n'est pas au programme*), on peut conjecturer que le facteur  $\ln(t)$  ne va pas peser très lourd dans le comportement de l'intégrale. Il est alors raisonnable d'envisager la disjonction de cas suivante:

▷ si  $\alpha \leq 1$ , alors au voisinage de  $+\infty$ ,  $h(t) \geq \frac{1}{(t-1)^\alpha}$  et cette fonction minorante est positive et non intégrable en  $+\infty$ , donc par comparaison  $h$  n'est pas intégrable en  $+\infty$ ;

▷ si  $\alpha > 1$ , en introduisant un réel  $\beta$  tel que  $1 < \beta < \alpha$ , alors  $t \mapsto \frac{1}{t^\beta}$  est intégrable en  $+\infty$ ,

et  $t^\beta h(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^{\alpha-\beta}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$  par croissances comparées, soit encore  $h(t) = o\left(\frac{1}{t^\beta}\right)$  en  $+\infty$ , d'où l'intégrabilité de  $h$  en  $+\infty$ .

**Bilan: l'intégrale  $K_\alpha$  est convergente si et seulement si  $1 < \alpha < 2$ .**

## COMMENTAIRES

Il y a de nombreuses erreurs de méthode à signaler:

1. Comme on recherche une condition **nécessaire et suffisante** sur  $\alpha$  pour qu'une intégrale converge, il est pertinent d'utiliser le plus possible des **équivalents**. On sait en effet que, si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ , alors  $f$  est intégrable en  $a$  **si et seulement si**  $g$  est intégrable en  $a$ .

Une majoration, en revanche, ne pourra jamais donner qu'une condition **suffisante** pour qu'une fonction soit intégrable, et certainement pas une CNS! En effet, supposons que l'on ait  $0 \leq f \leq g$  sur un intervalle  $I$ ; alors l'intégrabilité de  $g$  sur  $I$  entraîne celle de  $f$ , mais... si  $g$  n'est pas intégrable, cela ne fournit aucun renseignement sur l'intégrabilité de  $f$ . Il est donc impossible d'obtenir une **CNS** sur le paramètre  $\alpha$  à partir d'une majoration. Idem pour l'utilisation des relations de comparaison locales  $o$  et  $O$ .

2. Dans le premier exemple, il ne fallait pas scinder l'intégrale en deux:  $I_\alpha = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} - \int_0^1 \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt$ .

En effet, la convergence de l'intégrale  $I_\alpha$  **n'est pas équivalente** à la convergence des deux intégrales du second membre (ici encore, on n'a pas une CNS, mais seulement une condition **suffisante**). Pour certaines valeurs de  $\alpha$ , précisément si  $1 \leq \alpha < 3$ , l'intégrale  $I_\alpha$  est convergente, alors que les intégrales du second membre sont toutes deux divergentes.

3. Éviter de se lancer dans des discussions a priori du style: "Premier cas: si  $\alpha > 0$ , deuxième cas: si  $\alpha = 0$ , troisième cas: si  $\alpha < 0$ ". Il n'y a pas toujours de raison pour qu'une telle discussion soit pertinente! **Une disjonction de cas n'est pertinente que si elle fait suite à une analyse préalable de la situation.**

Par exemple, pour l'intégrale  $K_\alpha$  au voisinage de  $+\infty$ , deux raisonnements différents permettent de conclure suivant que  $\alpha > 1$  ou  $\alpha \leq 1$ , cf. corrigé au verso où j'essaie d'expliquer un peu pourquoi je suis amené à considérer ces deux cas de figure.

4. Certains passent beaucoup de temps à chercher d'éventuels prolongements par continuité, ce qui ne sert pas à grand-chose dans ce genre de discussion. Quelques copies font alors du hors-sujet total.

## BILAN

Le bilan de ce contrôle n'est pas très bon: une moyenne de 7,86, une médiane de 7, les notes allant de 0 à 19.

16 copies (sur 43) ont une note inférieure ou égale à 5. Les raisons:

- un manque de méthode (donc d'entraînement ?) inquiétant, comme le fait de penser qu'une majoration peut fournir une CNS d'intégrabilité, ou le fait de rechercher à tout prix un prolongement par continuité en certaines bornes; la notion de condition **nécessaire et suffisante** est-elle bien comprise? on peut parfois en douter!
- un manque de maîtrise de l'analyse, qu'il s'agisse du calcul asymptotique, des croissances comparées usuelles ou même parfois des propriétés opératoires des logarithmes et exponentielles;
- quelques copies aussi sont totalement inacceptables: des brouillons inextricables sans conclusion énoncée clairement, des ratures partout à tel point qu'on ne sait plus ce qu'il faut lire et ce qu'il ne faut pas lire. Ce sont des défauts majeurs, à corriger d'urgence avant que les écrits des concours ne soient trop proches!!!