DÉTERMINANTS

I. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base (programme de PCSI)

1. Définition.

Définitions préliminaires.

• Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit n un entier naturel non nul. Une application $f : E^n \to \mathbb{K}$ est appelée une **forme n-linéaire** si elle est linéaire par rapport à chaque variable, i.e. si toutes ses applications partielles sont linéaires, à savoir pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, pour tout $(n-1)$-uplet $(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) \in E^{n-1}$, l'application

$$E \to \mathbb{K} \quad ; \quad t \mapsto f(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

est linéaire. On dit aussi que f est une **forme multilinéaire** sans préciser nécessairement le nombre de variables.

• Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E. On dit que f est **alternée** si $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$ pour tout n-uplet $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$ tel que les x_i ne soient pas tous distincts. Cela signifie encore que

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n \quad \Big(\exists (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad i \neq j \quad \text{et } x_i = x_j\Big) \Longrightarrow f(x_1, \cdots, x_n) = 0 \,.$$

Propriété élémentaire. Une forme n-linéaire $f : E^n \to \mathbb{K}$ est alternée *si et seulement si* elle est **antisymétrique**, i.e. si le fait d'échanger deux parmi les n variables conduit à un résultat opposé. Par exemple: $f(x_2, x_1, x_3, \cdots, x_n) = -f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$.

Proposition (admise) et définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit $\mathcal{E}$ une base de E. Alors il existe une unique forme n-linéaire alternée $f : E^n \to \mathbb{K}$ telle que $f(\mathcal{E}) = 1$.

Cette application f est appelée **déterminant en base $\mathcal{E}$**, et on la note $\det_{\mathcal{E}}$.

On a ainsi $\det_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) = 1$ ou encore, si $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$, on a $\det_{\mathcal{E}}(e_1, \cdots, e_n) = 1$.

2. Propriétés.

Proposition. Si $\mathcal{E}$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, alors toute forme n-linéaire alternée $f : E^n \to \mathbb{K}$ est multiple de $\det_{\mathcal{E}}$, i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \det_{\mathcal{E}}$.

Preuve. Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée sur E, posons $\lambda = f(\mathcal{E})$.

• *Si $\lambda \neq 0$, posons $g = \dfrac{1}{\lambda} f$, alors g est une forme n-linéaire alternée sur E, et $g(\mathcal{E}) = 1$, donc $g = \det_{\mathcal{E}}$, on en déduit que $f = \lambda \det_{\mathcal{E}}$.*

• *Si $\lambda = 0$, posons $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$. Soit $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E, soit la matrice $A = (a_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X})$, on a alors $x_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. Donc*

$$f(\mathcal{X}) = f\big(a_{1,1}e_1 + \cdots + a_{n,1}e_n, \cdots \cdots, a_{1,n}e_1 + \cdots + a_{n,n}e_n\big)$$

se développe par multilinéarité en une somme

$$f(\mathcal{X}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}} \alpha_\sigma \, f\big(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}\big)$$

où $\mathcal{A} = [\![1, n]\!]^{[\![1, n]\!]}$ est l'ensemble des applications de $[\![1, n]\!]$ sur lui-même, les α_σ étant des coefficients scalaires. En raison du caractère alterné de f, les termes $f\big(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}\big)$ sont nuls lorsque σ n'est pas injective, i.e. lorsque σ n'est pas une permutation de $[\![1, n]\!]$. Comme $f(e_1, \cdots, e_n)$ est nul, en admettant que toute permutation se décompose en un produit de transpositions, le caractère alterné, donc antisymétrique, de f donne aussi la nullité de $f\big(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}\big)$. On a finalement $f = 0$.

Proposition (changement de base). Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux bases de E, alors $\det_{\mathcal{E}'} = \det_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E}) \cdot \det_{\mathcal{E}}$, autrement dit, pour toute famille $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ de n vecteurs de E avec $n = \dim(E)$, on a la "relation de Chasles" $\det_{\mathcal{E}'}(\mathcal{X}) = \det_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E}) \cdot \det_{\mathcal{E}}(\mathcal{X})$, soit

$$\det_{\mathcal{E}'}(x_1, \cdots, x_n) = \det_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E}) \cdot \det_{\mathcal{E}}(x_1, \cdots, x_n) \ .$$

Preuve. D'après la proposition précédente, il existe un scalaire λ tel que $\det_{\mathcal{E}'} = \lambda \det_{\mathcal{E}}$, et en évaluant sur la famille de vecteurs $\mathcal{E}$, on obtient $\lambda = \det_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E})$.

Théorème. Caractérisation des bases. Si $\mathcal{E}$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, si $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E, alors $\mathcal{X}$ est une base de E *si et seulement si* $\det_{\mathcal{E}}(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$.

Preuve. Si la famille $\mathcal{X}$ est liée, alors l'un au moins des vecteurs est combinaison linéaire des autres, supposons par exemple que $x_1 = \sum_{i=2}^{n} a_i x_i$, alors

$$\det_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) = \det_{\mathcal{E}}\left(\sum_{i=2}^{n} a_i x_i, x_2, \cdots, x_n\right) = \sum_{i=2}^{n} a_i \ \det_{\mathcal{E}}(x_i, x_2, \cdots, x_n)$$

en exploitant la multilinéarité de $\det_{\mathcal{E}}$. Ensuite, son caractère alterné entraîne que chaque terme $\det_{\mathcal{E}}(x_i, x_2, \cdots, x_n)$, avec $2 \leq i \leq n$, est nul. Donc $\det_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) = 0$.

Si la famille $\mathcal{X}$ est libre, alors c'est une base puisqu'elle est de cardinal n, on peut alors considérer le déterminant en base $\mathcal{X}$, et la "relation de Chasles" mentionnée ci-dessus donne

$$\det_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) \cdot \det_{\mathcal{X}}(\mathcal{E}) = \det_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) = 1 \ ,$$

ce qui entraîne en particulier que $\det_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) \neq 0$.

Calculs d'aires et de volumes. Dans $\mathbb{R}^2$, le déterminant d'une famille libre de deux vecteurs x_1 et x_2 relativement à la base canonique représente l'**aire orientée** du parallélogramme construit sur les vecteurs x_1 et x_2, le signe étant positif ou négatif suivant que la base (x_1, x_2) est directe ou indirecte.

Dans $\mathbb{R}^3$, le déterminant d'une famille libre de trois vecteurs x_1, x_2 et x_3 relativement à la base canonique représente le **volume orienté** du parallélépipède construit sur ces vecteurs, le signe étant positif ou négatif suivant que la base (x_1, x_2, x_3) est directe ou non.

II. Déterminant d'un endomorphisme (programme PCSI)

Notation. Si $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ est une famille de vecteurs de E, si u est un endomorphisme de E, on note $u(\mathcal{X})$ la famille des vecteurs images: $u(\mathcal{X}) = \big(u(x_1), \cdots, u(x_n)\big)$.

Proposition et définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}\big(u(\mathcal{B})\big)$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de E, on le note simplement $\det(u)$, c'est le **déterminant de l'endomorphisme** u.

Preuve. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, soit l'application $g : E^n \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall \mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n) \in E^n \qquad g(\mathcal{X}) = \det_{\mathcal{B}}\big(u(\mathcal{X})\big) = \det_{\mathcal{B}}\big(u(x_1), \cdots, u(x_n)\big) \ .$$

Il est immédiat de vérifier que g est n-linéaire alternée. Il existe donc un scalaire λ tel que $g = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. En évaluant sur la famille de vecteurs $\mathcal{B}$, on obtient $\lambda = g(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}}\big(u(\mathcal{B})\big)$. Ainsi,

$$\forall \mathcal{X} \in E^n \qquad \det_{\mathcal{B}}\big(u(\mathcal{X})\big) = \det_{\mathcal{B}}\big(u(\mathcal{B})\big) \cdot \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) \ .$$

Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E. On a alors, par la "relation de Chasles"

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}'}\big(u(\mathcal{B}')\big) &= \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}\big(u(\mathcal{B}')\big) \\ &= \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}\big(u(\mathcal{B})\big) \cdot \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \\ &= \det_{\mathcal{B}}\big(u(\mathcal{B})\big) \end{aligned}$$

puisque $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') = 1$.

Relations à retenir: si $u \in \mathcal{L}(E)$, si $\mathcal{B}$ est une base de E, si $\mathcal{X} \in E^n$,

$$\boxed{\det(u) = \det_{\mathcal{B}}\big(u(\mathcal{B})\big) \qquad \text{et} \qquad \det_{\mathcal{B}}\big(u(\mathcal{X})\big) = \det(u) \cdot \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) \ .}$$

Remarque. $\det(\mathrm{id}_E) = \det_{\mathcal{B}}\big(\mathrm{id}_E(\mathcal{B})\big) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Interprétation. Le déterminant d'un endomorphisme u est donc le coefficient multiplicateur qui s'applique au déterminant d'une famille de n vecteurs lorsqu'on leur applique u. Ainsi, dans un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$, si un endomorphisme u a pour déterminant le réel D, alors u multiplie les aires orientées par le coefficient D. Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension trois, un endomorphisme u de déterminant D multiplie les volumes orientés par D.

Proposition. Si u et v sont deux endomorphismes de E, alors

$$\boxed{\det(u \circ v) = \det(u) \cdot \det(v) \ .}$$

Preuve. En effet, si $\mathcal{B}$ est une base de E,

$$\det(u \circ v) = \det_{\mathcal{B}}\Big(u\big(v(\mathcal{B})\big)\Big) = \det(u) \cdot \det_{\mathcal{B}}\big(v(\mathcal{B})\big) = \det(u) \cdot \det(v) \ .$$

Proposition. Caractérisation des automorphismes.

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., avec $\dim(E) = n$, soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u \in \mathrm{GL}(E)$ *si et seulement si* $\det(u) \neq 0$. Dans ce cas, on a $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

Preuve. Si u est un automorphisme de E, la relation $u \circ u^{-1} = \mathrm{id}$ entraîne

$$1 = \det(\mathrm{id}_E) = \det(u) \cdot \det(u^{-1}) \ ,$$

donc $\det(u) \neq 0$ *et* $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

Si $u \notin \mathrm{GL}(E)$*, alors si* $\mathcal{B}$ *est une base de* E*, la famille image* $u(\mathcal{B})$ *n'est pas une base de* E*, donc par la caractérisation des bases (paragraphe précédent),* $\det_{\mathcal{B}}\big(u(\mathcal{B})\big) = 0$*, soit* $\det(u) = 0$.

III. <u>Déterminant d'une matrice carrée (programme PCSI)</u>

<u>1. Définition et propriétés.</u>

<u>Définition.</u> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. On définit le **déterminant** de la matrice A, noté $\det(A)$, comme étant le déterminant, relativement à la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{K}^n$, de la famille de ses vecteurs-colonnes $\big(C_1(A), \cdots, C_n(A)\big)$:

$$\det(A) = \det_{\mathcal{B}_0}\big(C_1(A), \cdots, C_n(A)\big)\ .$$

Inversement, si $\mathcal{B}$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, si $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})\big)\ .$$

Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n est donc n-linéaire alterné par rapport aux colonnes de la matrice.

<u>Exemple.</u> Voici une illustration de cette propriété de "multilinéarité", ici plus précisément de la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne de la matrice:

$$\begin{vmatrix} \alpha u + \beta v & y & z \\ \alpha u' + \beta v' & y' & z' \\ \alpha u'' + \beta v'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} u & y & z \\ u' & y' & z' \\ u'' & y'' & z'' \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} v & y & z \\ v' & y' & z' \\ v'' & y'' & z'' \end{vmatrix}\ .$$

De la n-linéarité par rapport aux colonnes, on déduit que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)\ .$$

Le déterminant d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ est noté $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

Pour $n = 2$, si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$.

Pour $n = 3$, si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$, on a la "formule"

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1} - a_{3,3}a_{2,1}a_{1,2}\ ,$$

que l'on peut retrouver par la disposition suivante :

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array}\right.$$

que l'on appelle **règle de Sarrus**.

Attention! La règle de Sarrus est la pire des méthodes de calcul de déterminants dans la mesure où:

- elle conduit à une expression du déterminant sous forme développée et non factorisée ;

- elle ne se généralise pas aux dimensions supérieures à 3.

On l'utilisera donc le moins possible!!

Lien avec les déterminants d'endomorphismes. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, si u est un endomorphisme de E, alors $\det(u) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\big)$, où $\mathcal{B}$ est une quelconque base de E.

En effet, $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}\big(u(\mathcal{B})\big) = \det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(u(\mathcal{B})\big)\Big) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\big)$.

On en déduit que **deux matrices semblables ont le même déterminant.**

Conséquence. Déterminant d'un produit. Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors

$$\boxed{\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)\ .}$$

En effet, notons u et v les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés aux matrices A et B respectivement, notons $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(v)$, puis $AB = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u \circ v)$, donc en utilisant le paragraphe précédent,

$$\det(AB) = det(u \circ v) = \det(u) \cdot \det(v) = \det(A) \cdot \det(B)\ .$$

Caractérisation des matrices inversibles. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la matrice A est inversible *si et seulement si* $\det(A) \neq 0$ et, dans ce cas, on a $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

C'est une conséquence immédiate de la propriété analogue vue sur les déterminants d'endomorphismes ("caractérisation des automorphismes").

Remarque. On retrouve ainsi le fait que deux matrices semblables ont le même déterminant. En effet, si $B = P^{-1}AP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\det(B) = \det(P^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(P) = \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(A) \cdot \det(P) = \det(A)\ .$$

Propriété admise. Une matrice carrée et sa transposée ont le même déterminant:

$$\det(A^\top) = \det(A)\ .$$

On en déduit que **le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n est aussi n-linéaire alterné par rapport aux lignes de la matrice.**

2. Calcul des déterminants

a. Effet des opérations élémentaires

Des propriétés de définition, on déduit l'effet des opérations élémentaires sur les colonnes dans un calcul de déterminant:

- l'opération $C_i \longleftrightarrow C_j$ avec $i \neq j$ (échange de deux colonnes, ou "transposition") change le déterminant en son opposé, c'est le caractère "antisymétrique" d'une forme multilinéaire alternée ;

- l'opération $C_j \leftarrow \lambda C_j$ (multiplication d'une colonne par un scalaire, ou "dilatation") multiplie la valeur du déterminant par le scalaire λ, c'est la linéarité par rapport à la j-ème colonne ;

- l'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $i \neq j$ (ajout à une colonne d'un multiple d'une autre, ou "transvection") ne modifie pas la valeur du déterminant.

Comme une matrice et sa transposée ont le même déterminant, on déduit que les opérations élémentaires sur les lignes ont le même effet sur le calcul du déterminant d'une matrice carrée.

b. Cas des matrices triangulaires

Proposition. Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le produit de ses coefficients diagonaux.

Preuve. D'abord, si un des coefficients diagonaux est nul, alors la matrice est non inversible, donc le déterminant est nul.

Si les coefficients diagonaux sont tous non nuls, on peut tranformer A en la matrice-unité I_n par des opérations élémentaires sur les colonnes (le lecteur détaillera) ; il suffit alors, à chaque opération effectuée, de regarder l'effet produit sur le déterminant.

Muni de ce dernier résultat, les opérations élémentaires (sur les lignes ou colonnes) permettent de mener à bien le calcul de nombreux déterminants classiques. **On aura toujours à l'esprit le fait qu'il est beaucoup plus intéressant de donner un résultat sous forme factorisée que sous forme développée! On privilégiera donc les opérations qui conduisent à des factorisations.**

Exemple 1. Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} a & & & \\ & \ddots & (b) & \\ & & \ddots & \\ & (b) & & \ddots \\ & & & & a \end{vmatrix}_{(n)}$, en commençant par remarquer que la somme des coefficients est la même sur chaque ligne (ou colonne).

Exemple 2. Démontrer l'égalité $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

Exemple 3. Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $a_{i,j} = |i-j|$. *On pourra commencer par effectuer les opérations $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$ pour j de 2 à n.*

c. Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Définition. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n. Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on appelle **cofacteur d'indices** (i,j) de la matrice A le scalaire

$$c_{i,j} = (-1)^{i+j} \ \det(A'_{i,j}) \ ,$$

où $A'_{i,j}$ est la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Remarque. On dit parfois que $A'_{i,j}$ est une "matrice extraite" de la matrice A, et que son déterminant $\det(A'_{i,j})$ est le "mineur" d'indices (i,j) de la matrice A.

On a alors les relations suivantes :

<u>Formule du développement par rapport à la i-ème ligne :</u> si on fixe un indice de ligne $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} c_{i,j} \ .$$

De la même façon:

<u>Formule du développement par rapport à la j-ème colonne :</u> si on fixe un indice de colonne $j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} c_{i,j} \ .$$

<u>Conseil pratique.</u> Avant de développer un déterminant par rapport à une ligne (ou colonne), on commencera par faire des opérations élémentaires pour annuler beaucoup de coefficients de cette ligne (ou colonne). Comme il est souhaitable de présenter un résultat final sous une forme factorisée, la situation idéale est de développer par rapport à une ligne (ou colonne) dont tous les coefficients sauf un sont nuls.

<u>Exemple 1.</u> Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n-1 & n \\ n & \dots & \dots & n & n \end{vmatrix}_{(n)}$ en commençant par les opérations $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$ pour j de 2 à n.

<u>Exemple 2.</u> On rappelle la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Calculer le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & & & & & n-1 \\ & 1 & & (0) & & n-2 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & (0) & & \ddots & & 2 \\ & & & & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n)} .$$

<u>Exemple 3.</u> La formule du développement par rapport à une ligne ou une colonne permet des calculs de déterminants par récurrence sur la taille du tableau. Calculer par exemple le déterminant "tridiagonal"

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & & (0) \\ 2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 \\ (0) & & 2 & 5 \end{vmatrix}_{(n)} .$$

Exercice III.2.1. Soient n^2 fonctions $a_{i,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$. Pour tout réel x, posons $f(x) = \det A(x) = \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & \cdots & a_{1,n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(x) & \cdots & a_{n,n}(x) \end{vmatrix}$.

a. On suppose que chaque fonction $a_{i,j}$ est polynomiale, montrer alors que la fonction f est polynomiale.

b. On suppose que chaque fonction $a_{i,j}$ est continue sur $\mathbb{R}$, montrer alors que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

IV. Compléments (programme PSI)

1. Cas des matrices triangulaires par blocs.

Proposition. Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$, les blocs A et D étant des matrices carrées, alors

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(D) .$$

Preuve. Supposons $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{q,p} & D \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On peut remarquer que $M = PQ$, avec

$$P = \begin{pmatrix} I_p & B \\ 0_{q,p} & D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} A & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & I_q \end{pmatrix} .$$

Donc $\det(M) = \det(P)\det(Q)$. Par ailleurs, en développant q fois par rapport à la dernière colonne, on voit que $\det(Q) = \det(A)$. Et en développant p fois par rapport à la première colonne, on voit que $\det(P) = \det(D)$. Cela donne le résultat annoncé.

Démonstration analogue si $M = \begin{pmatrix} A & 0_{p,q} \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

ATTENTION!! Ne pas chercher à inventer des formules générales pour exprimer le déterminant d'une matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec quatre blocs quelconques. Il y en a dans des cas particuliers, mais elles ne sont pas au programme! Cela peut toutefois faire l'objet d'exercices, et en voici un:

Exercice IV.1.1. Soient A, B, C, D quatre matrices carrées d'ordre n telles que $CD = DC$. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. On introduit $N = \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

a. On suppose que D est inversible. En effectuant le produit MN, montrer que

$$\det(M) = \det(AD - BC) .$$

b*. Montrer que l'application

$$\lambda \mapsto \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D - \lambda I_n \end{pmatrix} - \det\big(A(D - \lambda I_n) - BC\big)$$

est polynomiale. En déduire que le résultat du **a.** reste vrai si D n'est pas inversible (mais en supposant toujours que C et D commutent). $\square$

On peut généraliser la proposition ci-dessus. Si $M = \begin{pmatrix} D_1 & & (\times) \\ & \ddots & \\ (0) & & D_k \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure par blocs, alors $\det(M) = \prod_{i=1}^{k} \det(D_i)$. Ici, les k blocs diagonaux $D_1, \cdots, D_k$ sont des matrices carrées.

2. Déterminant de Vandermonde.

Définition. Si $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ sont n scalaires, on définit le **déterminant de Vandermonde** par

$$V_n(a_0, \cdots, a_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}_{(n)} .$$

Proposition. On a $\boxed{V_n(a_0, \cdots, a_{n-1}) = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)}$.

En particulier, ce déterminant est non nul si et seulement si les scalaires a_i**,** $0 \leq i \leq n-1$**, sont deux à deux distincts.**

Remarque. Dans cette formule, le produit est pris sur tous les couples $(i, j) \in [\![0, n-1]\!]^2$ tels que $i < j$, il y en a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Preuve. Par récurrence sur n.

Initialisation: Pour $n = 2$, $V_2(a_0, a_1) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 - a_0$, c'est exact.

Hérédité: Soit $n \geq 2$, supposons la formule vraie au rang n. Soient $n+1$ scalaires $a_0, \cdots, a_n$. Deux cas se présentent:

- si les n premiers scalaires $a_0, \cdots, a_{n-1}$ ne sont pas tous distincts, alors le déterminant $V_{n+1}(a_0, \cdots, a_{n-1}, a_n)$ est nul car il a deux lignes égales, et le produit $\prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ étant aussi nul dans ce cas, l'égalité est prouvée.

- si les n premiers scalaires $a_0, \cdots, a_{n-1}$ sont tous distincts, introduisons la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto f(x) = V_{n+1}(a_0, \cdots, a_{n-1}, x) \end{cases} .$$

On a donc $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix}_{(n+1)}$.

Un développement par rapport à la dernière ligne montre que la fonction f est polynomiale de degré au plus n, plus précisément $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} x^k$ *où $c_{n,k}$ est le cofacteur d'indices (n,k) de ce déterminant (les lignes et colonnes étant numérotées de 0 à n), ces cofacteurs $c_{n,k}$ sont bien indépendants de la variable x. En fait, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a*

$$c_{n,n} = V_n(a_0, \cdots, a_{n-1}) = \prod_{0 \le i < j \le n-1} (a_j - a_i) \neq 0 \ ,$$

ce qui prouve que f est de degré n exactement, et donne son coefficient dominant.

D'autre part, on connaît n racines distinctes de ce polynôme f qui sont les a_i, $0 \le i \le n-1$ (en effet, le déterminant $f(a_i)$ est nul pour $i \in [\![0, n-1]\!]$ car il a deux lignes égales). On dispose donc de toutes les racines de ce polynôme f, ainsi que de son coefficient dominant, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{K} \qquad f(x) = \left[\prod_{0 \le i < j \le n-1} (a_j - a_i) \right] (x - a_0)(x - a_1) \cdots (x - a_{n-1}) \ .$$

En évaluant pour $x = a_n$, on obtient

$$V_{n+1}(a_0, \cdots, a_{n-1}, a_n) = f(a_n) = \left[\prod_{0 \le i < j \le n-1} (a_j - a_i) \right] (a_n - a_0) \cdots (a_n - a_{n-1}) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i) \ ,$$

ce qui achève la récurrence.

Exercice IV.2.1. Montrer que $V_n(1, 2, \cdots, n) = \prod_{k=1}^{n-1} k!$ $\square$

Exercice IV.2.2. Soient $n+1$ scalaires distincts a_0, $\cdots$, a_n. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = (X + a_k)^n$. Montrer que la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$. $\square$

Exercice IV.2.3. Soient n scalaires distincts r_1, $\cdots$, r_n. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, montrer que les suites géométriques $(r_1^k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\cdots$, $(r_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes. $\square$

3. Interpolation de Lagrange.

Dans tout ce paragraphe, on considère $n+1$ scalaires distincts, notés a_0, a_1, $\cdots$, a_n.

Si l'on fixe un indice $i \in [\![0, n]\!]$, alors il existe un unique polynôme L_i dans $\mathbb{K}_n[X]$ tel que

$$L_i(a_i) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall j \in [\![1, n]\!] \backslash \{i\} \quad L_i(a_j) = 0 \ .$$

Preuve. En effet, si un tel polynôme existe, alors il admet pour racines tous les a_j avec $j \neq i$, il est donc multiple du polynôme $\prod_{j \neq i} (X - a_j)$, *soit* $L_i = \left(\prod_{j \neq i} (X - a_j) \right) \cdot Q$, *avec $Q \in \mathbb{K}[X]$. Comme L_i est de degré au plus n, le polynôme Q est nécessairement constant,* *c'est un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on a donc* $L_i = \lambda \prod_{j \neq i}(X - a_j)$. *En évaluant pour* $X = a_i$, *on obtient* $\lambda = \prod_{j\neq i}\Big(\frac{1}{a_i - a_j}\Big)$. *Finalement,* $L_i = \prod_{j \neq i}\Big(\frac{X - a_j}{a_i - a_j}\Big)$.

Réciproquement, ce polynôme L_i convient.

<u>Définition.</u> Les polynômes L_i, $0 \leq i \leq n$ sont appelés **polynômes interpolateurs de Lagrange** en les points $a_0, \cdots, a_n$.

Notons que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker).

<u>Proposition.</u> La famille $\mathcal{L} = (L_0, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Preuve. Comme $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) = n+1 = \dim\big(\mathbb{K}_n[X]\big)$, *il suffit de montrer la liberté de la famille. Soient donc $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ des scalaires tels que* $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0$. *Fixons un indice $j \in [\![1,n]\!]$. En évaluant cette identité polynomiale pour $X = a_j$, on obtient $\lambda_j = 0$, ce qui achève la preuve.*

<u>Proposition.</u> Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors l'expression de P dans la base de Lagrange $\mathcal{L}$ ci-dessus est

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)\, L_i \ ,$$

autrement dit les coordonnées du polynôme P dans cette base sont les valeurs que prend le polynôme P en les points d'interpolation.

Preuve. Notons $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ les coordonnées de P dans la base $\mathcal{L}$, i.e. $P = \sum_{i=0}^{n}\lambda_i L_i$. *En évaluant en l'un des points a_j avec $j \in [\![1,n]\!]$ fixé, on obtient immédiatement $\lambda_j = P(a_j)$.*

<u>Remarque.</u> **Un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ est entièrement déterminé par ses valeurs en $n+1$ points distincts.** Autrement dit, si on se donne $n+1$ scalaires **distincts** $a_0, \cdots, a_n$ et $n+1$ scalaires quelconques $b_0, \cdots, b_n$, alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

En effet, l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \to \ \mathbb{K}^{n+1} \\ \quad P & \mapsto \ \big(P(a_0), \cdots, P(a_n)\big) \end{cases}$ *est clairement linéaire. Elle est injective car, si $\varphi(P) = (0, \cdots, 0)$, alors P est multiple du polynôme* $\prod_{i=0}^{n}(X - a_i)$ *et, comme* $\deg(P) \leq n$, *cela entraîne que $P = 0$. Comme les espaces vectoriels $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ sont de même dimension finie, cela entraîne que φ est bijective, ce qu'il fallait démontrer.*

Le polynôme P solution du problème s'exprime dans la base de Lagrange:

$$P = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i = \sum_{i=0}^{n} b_i \ \prod_{j \neq i}\Big(\frac{X - a_j}{a_i - a_j}\Big) \ .$$

Propriété. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$.

Preuve. Le polynôme constant $U = 1$ admet pour décomposition dans la base de Lagrange: $U = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} U(a_i)L_i$, soit $U = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i$.

Lien avec les matrices de Vandermonde. Comme dans la remarque ci-dessus, on se donne $n+1$ scalaires **distincts** $a_0, \cdots, a_n$ et $n+1$ scalaires quelconques $b_0, \cdots, b_n$, et on recherche **le** polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. Notons $\alpha_0, \cdots, \alpha_n$ les coefficients de ce polynôme P, ainsi $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \alpha_j X^j$. En écrivant les conditions $P(a_i) = b_i$ pour tout i, on obtient un système linéaire de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues:

$$\forall i \in [\![0, n]\!] \qquad \sum_{j=0}^{n} a_i^j \alpha_j = b_i \ ,$$

que l'on peut mettre sous la forme matricielle $VX = B$, avec $B = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{K})$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{K})$, et on constate que la matrice de ce système est une matrice de Vandermonde $V = V_{n+1}(a_0, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$.

Les scalaires a_i étant distincts, on sait que cette matrice est inversible (son déterminant, “de Vandermonde”, est non nul), on a donc un système de Cramer, et le problème a une solution unique (*ce que l'on avait déjà obtenu par des considérations plus théoriques*).