

Fonctions convexes (révisions)

cf. programme précédent

Suites et séries de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions.

Convergence uniforme et continuité. Interspersion limite-intégrale **sur un segment**. Théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, extension aux fonctions $\mathcal{C}^k$.

Modes de convergence pour les séries de fonctions: convergence simple, convergence uniforme, convergence normale. La convergence normale entraîne la convergence uniforme.

Théorèmes sur la régularité de la somme d'une série de fonctions: continuité, intégration terme à terme sur un segment, dérivation terme à terme et extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.
Théorème de la double limite (interspersion somme-limite) (*admis*).

Déterminants

Rappels sur les opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice, interprétation en termes de produit matriciel, conservation du rang. Algorithme du pivot de Gauss, algorithme de Gauss-Jordan pour inverser une matrice carrée (inversible!). Complexité de l'algorithme.

Rappel: le groupe symétrique n'est pas au programme de la filière.

Déterminant d'une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n relativement à une base, caractérisation des bases.

Déterminant d'un endomorphisme, propriétés, caractérisation des automorphismes.

Déterminant d'une matrice carrée. Propriétés fondamentales: $\det(AB) = \det(A) \det(B)$, caractérisation des matrices inversibles, $\det(A^{-1})$, deux matrices semblables ont le même déterminant.

Déterminants et opérations élémentaires sur les lignes et colonnes, déterminant d'une matrice triangulaire. Une matrice et sa transposée ont le même déterminant.

Cofacteurs, développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Déterminant de Vandermonde.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- L'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est semi-convergente.
- L'ensemble $L_c^2(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, produit scalaire.
- Fonctions convexes: montrer la croissance de $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, interprétation graphique.
- Fonctions convexes dérivables: sachant f' croissante, étudier la position de l'arc par rapport à une tangente.
- La convergence normale d'une série de fonctions entraîne la convergence uniforme.
- Exemple où il y a CVU, mais pas CVN.
- Description de l'algorithme de Gauss-Jordan pour inverser une matrice carrée supposée inversible. Estimation de la complexité.
- Calcul du déterminant de Vandermonde.