CORRIGÉ du DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 2
PSI2 2025-2026

PROBLÈME 1

d'après une épreuve du Concours Mines-Ponts 2020, filière PC

1. La fonction $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$. On a $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ et, comme $1-x<1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable en 0, il en est donc de même de f. Enfin,

$$t^2\, f(t) = t^{x+1}\, e^{-t} \quad \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0 \qquad \text{par croissances comparées },$$

donc $f(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ lorsque $t \to +\infty$, ce qui entraîne son intégrabilité en $+\infty$. La fonction f est donc intégrable sur $]0,+\infty[$, d'où la convergence de l'intégrale $\Gamma(x)$, pour $x>0$.

Cette fonction “gamma”, dite aussi “intégrale eulérienne de seconde espèce” est très utilisée en mathématiques, et la question suivante montre qu'elle permet (à un décalage d'indice près) d'interpoler la suite factorielle puisque $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout n entier naturel non nul.

2. Pour $x>0$, on a

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \Big[-t^x\, e^{-t}\Big]_{t\to 0}^{t\to+\infty} + \int_0^{+\infty} x\, t^{x-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = x\,\Gamma(x)\ ,$$

cette intégration par parties étant justifiée par le fait que $\lim\limits_{t\to 0} t^x e^{-t} = \lim\limits_{t\to+\infty} t^x e^{-t} = 0$ et par la convergence, déjà démontrée, des intégrales $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$.

On a immédiatement $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \big[-e^{-t}\big]_0^{+\infty} = 1$. Par une récurrence immédiate à l'aide de la relation obtenue ci-dessus, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Il suffit de constater que

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2) - |ab| = \frac{1}{2}\,\big(|a|-|b|\big)^2 \geq 0\ .$$

4. Soient $f \in E_\alpha$ et $g \in E_\alpha$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\big|x^\alpha e^{-x}\, f(x)\, g(x)\big| \leq \frac{1}{2}\big(x^\alpha e^{-x}\, f(x)^2 + x^\alpha e^{-x}\, g(x)^2\big)$$

d'après **Q3.** Le majorant est, par hypothèse, une somme de deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, donc est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto x^\alpha e^{-x}\, f(x)\, g(x)$ est majorée en valeur absolue par une fonction intégrable, elle est donc intégrable sur $]0,+\infty[$.

5. Il est clair que $0 \in E_\alpha$. La stabilité par combinaisons linéaires résulte de la question **4.**: si $f \in E_\alpha$, $g \in E_\alpha$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad x^\alpha\, e^{-x}\,\big(\lambda f(x) + g(x)\big)^2 = \lambda^2\, x^\alpha\, e^{-x}\, f(x)^2 + 2\lambda\, x^\alpha\, e^{-x}\, f(x)\, g(x) + x^\alpha\, e^{-x}\, g(x)^2$$

et chacun des trois termes est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (le premier et le troisième par hypothèse puisque ce sont des fonctions positives donc la convergence de l'intégrale équivaut à l'intégrabilité, celui du milieu grâce à la question **4.** ci-dessus). La fonction somme de ces trois termes est alors intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque $L^1(\mathbb{R}_+^*)$ est un espace vectoriel, ce qui signifie que $\lambda f + g \in E_\alpha$. L'ensemble E_α est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

6. Comme E_α est stable par combinaisons linéaires, il suffit de montrer que toute fonction monomiale $f_k : x \mapsto x^k$, avec $k \in \mathbb{N}$, appartient à E_α. Or, ceci résulte de la question **1.** puisque, comme $\alpha + 2k + 1 > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\, f_k(x)^2\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{\alpha+2k}\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$ converge, et a pour valeur $\Gamma(\alpha+2k+1)$.

7. On obtient facilement $\varphi_0^{(0)}(x) = \varphi_0(x) = x^\alpha\, e^{-x}$, puis $\psi_0(x) = 1$.

Ensuite, $\varphi_1(x) = x^{\alpha+1}\, e^{-x}$, puis $\varphi_1'(x) = \big((\alpha+1)x^\alpha - x^{\alpha+1}\big)\, e^{-x}$, et $\psi_1(x) = -x + \alpha + 1$.

Enfin, $\varphi_2(x) = x^{\alpha+2}\, e^{-x}$ puis, après calculs, $\psi_2(x) = x^2 - 2(\alpha+2)x + (\alpha+1)(\alpha+2)$.

8. Par la formule de Leibniz, on obtient

$$\begin{aligned}
\psi_n(x) &= x^{-\alpha}\, e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x^{n+\alpha}) \cdot \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(e^{-x}) \\
&= x^{-\alpha}\, e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \Big(\prod_{j=k+1}^{n} (\alpha+j) \Big) x^{\alpha+k} \cdot (-1)^k e^{-x} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \Big(\prod_{j=k+1}^{n} (\alpha+j) \Big)\, x^k\ .
\end{aligned}$$

On obtient une expression polynomiale de degré au plus n, le coefficient de x^n étant $(-1)^n$, *un produit de zéro facteur valant toujours 1 par convention.* Donc la fonction ψ_n est polynomiale de degré n exactement, et de coefficient dominant $(-1)^n$.

9. L'existence de l'intégrale définissant $(f|g)$ est garantie par la question **4.** Les caractères bilinéaire et symétrique de $(\cdot|\cdot)$ sont immédiats. Enfin, si $f \in E_\alpha$, par positivité de l'intégrale, on a $(f|f) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha\, e^{-x}\, f(x)^2\, \mathrm{d}x \geq 0$ puisque l'intégrande est une fonction positive. Et, si $(f|f)$ est nul, l'intégrande $x \mapsto x^\alpha\, e^{-x}\, f(x)^2$ étant **continu** et positif sur $\mathbb{R}_+^*$, il doit être nul sur $\mathbb{R}_+^*$ (*théorème de stricte positivité*), ce qui entraîne que la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_+$ par continuité en 0. On a donc bien un produit scalaire sur l'espace vectoriel E_α.

10. De nouveau par la formule de Leibniz, si $0 \leq k \leq n-1$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi_n^{(k)}(x) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\big(x^{n+\alpha}\big) \cdot \frac{\mathrm{d}^{k-j}}{\mathrm{d}x^{k-j}}\big(e^{-x}\big) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (n+\alpha)(n+\alpha-1)\cdots(n+\alpha-j+1)\, x^{n+\alpha-j}\, (-1)^{k-j}\, e^{-x}\ .
\end{aligned}$$

Dans cette somme, les exposants $n+\alpha-j$ sont tous strictement positifs puisque $j \leq n-1$, donc $n+\alpha-j \geq \alpha+1 > 0$, donc chaque terme de cette somme (finie) tend vers 0 en 0, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \varphi_n^{(k)}(x) = 0$.

Le calcul ci-dessus montre aussi que

$$e^{\frac{x}{2}}\, \varphi_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j}\, (n+\alpha)(n+\alpha-1)\cdots(n+\alpha-j+1)\, x^{n+\alpha-j}\, e^{-\frac{x}{2}}$$

et ceci tend vers 0 en $+\infty$ puisque chaque terme tend vers 0 par croissances comparées. On a donc $\varphi_n^{(k)}(x) = o\Big(e^{-\frac{x}{2}}\Big)$ lorsque x tend vers $+\infty$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

11. Si $n \geq 1$, une première intégration par parties donne

$$\begin{aligned}(\psi_m|\psi_n) &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\, \psi_m(x)\, \psi_n(x)\, \mathrm{d}x \;=\; \int_0^{+\infty} \psi_m(x)\, \varphi_n^{(n)}(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \Big[\psi_m(x)\, \varphi_n^{(n-1)}(x)\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \psi_m'(x)\, \varphi_n^{(n-1)}(x)\, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Les questions **8.** et **10.**, puisque ψ_m est polynomiale, garantissent que le terme entre crochets a une limite nulle en 0 et en $+\infty$ (par croissances comparées en $+\infty$). Cela justifie l'intégration par parties et donne l'égalité $(\psi_m|\psi_n) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_m'(x)\, \varphi_n^{(n-1)}(x)\, \mathrm{d}x$.
En itérant k fois, on obtient, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, l'égalité

$$(\psi_m|\psi_n) = (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x)\, \varphi_n^{(n-k)}(x)\, \mathrm{d}x\ ,$$

après avoir constaté que les termes entre crochets sont toujours nuls (conséquence toujours de la question **10.** et du fait que ψ_m est polynomiale). Après n itérations donc,

$$(\psi_m|\psi_n) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\, \varphi_n(x)\, \mathrm{d}x\ .$$

Si $n > m$, comme ψ_m est polynomiale de degré m, on a $\psi_m^{(n)} = 0$ donc $(\psi_m|\psi_n) = 0$. Par symétrie du produit scalaire, on obtient le même résultat si $n < m$. Ainsi, $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **famille orthogonale** dans l'espace préhilbertien E_α, i.e. $(\psi_m|\psi_n) = 0$ si $m \neq n$.

12. De la question précédente, on déduit que $\|\psi_n\|_\alpha^2 = (\psi_n|\psi_n) = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_n^{(n)}(x)\, \varphi_n(x)\, \mathrm{d}x$.
Or, ψ_n est une fonction polynomiale de terme dominant $(-1)^n x^n$ d'après la question **8.** Sa dérivée n-ème $\psi_n^{(n)}$ est donc la fonction constante de valeur $(-1)^n n!$ Il reste alors

$$\|\psi_n\|_\alpha^2 = n! \int_0^{+\infty} \varphi_n(x)\, \mathrm{d}x = n! \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha}\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = n!\, \Gamma(n+\alpha+1)\ .$$

PROBLÈME 2: Matrices magiques

d'après de vieux manuscrits

1. On a la relation de dépendance linéaire évidente $c_1 + \cdots + c_n = l_1 + \cdots + l_n$, donc la famille est liée.

2. $F_0 = \Big(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} l_i\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} c_j\Big)$, donc F_0 est une intersection d'hyperplans (noyaux de formes linéaires non nulles) de E, c'est donc un sous-espace vectoriel de E.

Remarque : si on note r le rang de la famille de formes linéaires considérée à la question **1.**, on a alors $\dim F_0 = n^2 - r$. En effet, F_0 est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n^2 inconnues (les coefficients d'une matrice M) et de rang r (ces n^2 inconnues sont liées par r relations linéaires indépendantes). De la question **1.**, on déduit que $r \leq 2n - 1$, donc $\dim F_0 \geq n^2 - (2n-1) = (n-1)^2$.

3. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ donnée, la matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{aligned}
m_{i,j} &= a_{i,j} \quad \text{pour } (i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2 \ ; \\
m_{i,n} &= -\sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j} \quad \text{pour } i \in [\![1, n-1]\!] \ ; \\
m_{n,j} &= -\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,j} \quad \text{pour } j \in [\![1, n-1]\!] \ ; \\
m_{n,n} &= \sum_{(i,j) \in [\![1,n-1]\!]^2} a_{i,j}
\end{aligned}$$

est clairement la seule matrice appartenant à F_0 et satisfaisant les conditions demandées.

L'application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ qui, à toute matrice M de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe la matrice extraite de M obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, est évidemment linéaire, sa restriction $\varphi = \Phi\Big|_{F_0}$ au sous-espace vectoriel F_0 de E est donc aussi linéaire. La propriété d'existence et d'unicité d'une matrice M de F_0 dont les éléments $m_{i,j}$ avec $(i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2$ sont imposés (*propriété démontrée ci-dessus*) exprime exactement le caractère bijectif de l'application φ qui est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On en déduit que $\dim F_0 = \dim \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}) = (n-1)^2$, puis que le rang de la famille de formes linéaires $\mathcal{F} = (l_1, \cdots, l_n, c_1, \cdots, c_n)$ est $r = n^2 - \dim F_0 = 2n - 1$ (*cf.* remarque à la fin de la question **2.**).

4. Notons $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à la permuation circulaire des vecteurs de base $e_1 \mapsto e_2 \mapsto \cdots \mapsto e_{n-1} \mapsto e_n \mapsto e_1$. Alors la matrice

$$M = I_n - P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

appartient à F_0 et $d(M) = \operatorname{tr}(M) = n \neq 0$.

Si la forme linéaire $d = \operatorname{tr}$ appartenait à $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$, alors toute matrice appartenant à $F_0 = \Big(\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} l_i\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} c_j\Big)$ appartiendrait aussi à $\operatorname{Ker} d$, mais que nenni, ceci n'est point ($M = I_n - P$ ci-dessus est un contre-exemple), donc $d \notin \operatorname{Vect}(\mathcal{F})$.

5. La famille de formes linéaires $\mathcal{G} = (l_1, \cdots, l_n, c_1, \cdots, c_n, d)$ est donc de rang $(2n-1) + 1 = 2n$.
Le sous-espace G_0, intersection de leurs noyaux, est donc de dimension $n^2 - 2n$.

6. Pour $n \geq 4$, la matrice $M = \begin{pmatrix} & & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \\ & (0) & & \\ & & & \end{pmatrix}$ appartient à G_0 et $\delta(M) = -2 \neq 0$. Pour $n = 3$, on bricole une matrice du genre $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ qui semble répondre à la question.

7. Les exemples construits à la question **6.** montrent que $\delta \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$ (notation introduite question **5.**). La famille de formes linéaires $\mathcal{H} = (l_1, \cdots, l_n, c_1, \cdots, c_n, d, \delta)$ est donc de rang $2n+1$. L'espace vectoriel H_0, intersection des noyaux, est donc de dimension $n^2 - 2n - 1$.

8. L'ensemble H est clairement un sous-espace vectoriel de E (non vide et stable par combinaisons linéaires). On a bien sûr $H_0 \subset H$ et $\mathrm{Vect}(J_n) \subset H$ puisque $J_n \in H$. Il est immédiat que $H_0 \cap \mathrm{Vect}(J_n) = \{0\}$ puisque $J_n \notin H_0$. Enfin, si $M \in H$ est une matrice magique, en posant $s = l_1(M) = \cdots = l_n(M) = c_1(M) = \cdots = c_n(M) = d(M) = \delta(M)$, on vérifie facilement que $M_0 = M - \dfrac{s}{n} J_n$ appartient à H_0, ce qui fournit la décomposition $M = \left(M - \dfrac{s}{n} J_n\right) + \dfrac{s}{n} J_n$ et achève de démontrer que $H = H_0 + \mathrm{Vect}(J_n)$. En conséquence,

$$\dim H = \dim H_0 + 1 = n^2 - 2n = n(n-2) .$$

9. Pour $n = 3$, on a $\dim H = 3$ et une base de H est par exemple constituée des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

les matrices A et B constituant alors une base de H_0. Les matrices de H sont donc de la forme

$$M = xA + yB + zJ_3 = \begin{pmatrix} y+z & x-y+z & -x+z \\ -x-y+z & z & x+y+z \\ x+z & -x+y+z & -y+z \end{pmatrix} .$$

On résout $\{y+z = 3 \ ; \ x-y+z = 4 \ ; \ -x+z = 5\}$, ce qui donne $\{x = -1 \ ; \ y = -1 \ ; \ z = 4\}$ et la matrice recherchée est $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.