

DEVOIR MAISON de MATHÉMATIQUES numéro 2
COMMENTAIRES
PSI2 2025-2026

PROBLÈME 1

1. Quelques erreurs sur les équivalents, j'ai parfois lu que $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t}$, ce qui est faux!!

Interrogez-vous sur la signification de "équivalent"!

Sur de nombreuses copies, l'étude en la borne 0 a été omise! La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ n'est pourtant pas définie en 0, et n'est pas toujours prolongeable par continuité en ce point.

3. Beaucoup de bonnes réponses, c'est une question de cours. Mauvaise gestion des valeurs absolues toutefois dans certaines copies.
4. Conséquence immédiate de **Q3**. Encore faut-il savoir le rédiger correctement! Il n'est pas admissible par exemple d'écrire:

$$\left\langle \left| \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) dx \right| \leq \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} |f(x) g(x)| dx \leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} (f(x)^2 + g(x)^2) dx \right\rangle ,$$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) dx$ est convergente. »!

En effet, ce n'est pas en majorant une intégrale (**dont on ne connaît pas encore l'existence!!!**)... que l'on va prouver son existence! Ce qu'il faut majorer, c'est l'intégrande (en valeur absolue), et ensuite prendre sa plus belle plume pour écrire une phrase du style: "toute fonction majorée en valeur absolue par une fonction intégrable est elle-même intégrable", et enfin rappeler que convergence absolue entraîne convergence.

Même remarque pour prouver la convergence d'une série: ce n'est certainement pas en majorant la somme (**dont on ne connaît pas encore l'existence!!!**) que l'on va rédiger une preuve acceptable, mais plutôt en majorant le terme général (en valeur absolue) si l'on veut montrer son absolue convergence, puis sa convergence.

5. Remarque voisine de celle ci-dessus: ajouter des intégrales généralisées avant d'avoir prouvé leur convergence n'a pas beaucoup de sens. Inspirez-vous de la rédaction du corrigé!
6. Question presque immédiate si on structure un peu la réflexion, et si l'on se souvient de **Q1**., cf. corrigé. Quelques rédactions maladroites voulant à tout prix expliciter le développement du carré d'un polynôme, ce qui n'apporte rien.
8. Quelques tentatives de récurrences, ce qui est très maladroit, et aboutit rarement correctement. La formule de Leibniz donne une solution rapide.
- Je rappelle que **la notion de factorielle n'a de sens que pour des entiers naturels**, et que parler de "fonction polynomiale de degré α " lorsque α n'est pas un entier naturel n'a pas de sens non plus.
9. Le caractère "défini" de ce produit scalaire découle du "théorème de stricte positivité" vu en cours, et dont une hypothèse essentielle est la **continuité** des fonctions considérées. Cette hypothèse de continuité doit impérativement être mentionnée.
10. Leibniz de nouveau, si l'on veut être efficace!
11. Question un peu plus technique, mais classique: une intégration par parties itérée, où l'on "maîtrise" le terme entre crochets en utilisant les estimations fournies par la question 10. juste avant... et en le disant clairement!

PROBLÈME 2

Problème en général assez bien traité, en tout cas par celles et ceux qui vont jusqu'au bout.

3. Pour affirmer que φ est un isomorphisme, ne pas oublier de mentionner la linéarité de φ .

Enfin, pour affirmer que, si une application linéaire $\varphi : E \rightarrow F$ est injective, alors elle est bijective, il faut déjà savoir que les espaces vectoriels E et F de départ et d'arrivée sont de même dimension finie. Comme le but de la question était justement de montrer que F_0 et $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ ont la même dimension, on ne pouvait procéder ainsi.

Si $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ sont des formes linéaires sur un espace vectoriel E , beaucoup d'entre vous introduisent l'application linéaire $\Phi : E \rightarrow \mathbb{K}^k$ définie par $\forall x \in E \quad \Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x))$, c'est une très bonne idée effectivement mais il n'est pas si évident que cela que l'on ait $\text{rg}(\Phi) = \text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, d'où mon commentaire "admettons!" sur certaines copies. En voici une preuve ci-dessous.

UNE DÉMONSTRATION

Proposition: Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ des formes linéaires sur un espace vectoriel E de dimension n , soit l'application linéaire $\Phi : E \rightarrow \mathbb{K}^k$ définie par $\forall x \in E \quad \Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x))$, on a alors $\text{rg}(\Phi) = \text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$.

Preuve: Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , soit $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale, je rappelle qu'elle est constituée des formes linéaires coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$, i.e. pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, e_i^* est la forme linéaire sur E telle que, pour tout $x \in E$, $e_i^*(x)$ est la i -ième coordonnée du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$, on a ainsi $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et on en déduit facilement que $\mathcal{B}^*$ est bien une base de l'espace dual $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. On notera aussi $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{K}^k$.

Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\Phi) = \begin{pmatrix} \varphi_1(e_1) & \cdots & \varphi_1(e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(e_1) & \cdots & \varphi_k(e_n) \end{pmatrix} = M \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$. Donc $\text{rg}(\Phi) = \text{rg}(M)$.

Par ailleurs, si ψ est une quelconque forme linéaire sur E , ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}^*$ sont les scalaires $\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)$, autrement dit $\psi = \sum_{i=1}^n \psi(e_i) e_i^*$. Le lecteur sceptique vérifiera par exemple que les formes linéaires ψ et $\mu = \sum_{i=1}^n \psi(e_i) e_i^*$ coïncident sur chaque vecteur e_j de la base E .

La matrice, relativement à la base $\mathcal{B}^*$, de la famille de formes linéaires $\mathcal{F} = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ est donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(e_1) & \cdots & \varphi_k(e_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(e_n) & \cdots & \varphi_k(e_n) \end{pmatrix} = M^\top \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K}).$$

Ainsi, une matrice et sa transposée ayant le même rang,

$$\text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_k) = \text{rg}(\mathcal{F}) = \text{rg}(M^\top) = \text{rg}(M) = \text{rg}(\Phi).$$

Commentaire. C'est sur cette proposition (malheureusement pas clairement mentionnée dans les programmes) que l'on s'appuie par exemple pour affirmer que le rang d'un système linéaire (i.e. le rang de la matrice du système) est "le nombre d'équations indépendantes", et pour en déduire la formule fondamentale concernant les systèmes linéaires homogènes: **la dimension de l'espace vectoriel des solutions est égale au nombre d'inconnues, moins le nombre d'équations indépendantes.**