

PROBLÈME

- On dira qu'une fonction f , définie sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$, vérifie la propriété **(P1)** si on a

$$\mathbf{(P1)} : \quad \forall x \in]0, 1[\quad f(1-x) = -f(x).$$

On dira qu'elle vérifie la propriété **(P2)** si on a

$$\mathbf{(P2)} : \quad \forall x \in]0, 1[\quad f(x) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right).$$

- Pour tout réel x non multiple de π , on définit la **cotangente** du réel x par la relation

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\pi \mathbb{Z}) \quad \cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

On définit la fonction g sur $]0, 1[$ par

$$\forall x \in]0, 1[\quad g(x) = \pi \cotan(\pi x).$$

- Par ailleurs, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose

$$u_0(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n(x) = \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

PARTIE A. Étude de la somme d'une série de fonctions.

- Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On notera $s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la fonction somme:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \quad s(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

- Montrer que la fonction s est continue sur $]0, 1[$.

- Montrer que, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a $s(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x)$, en posant

$$s_n(x) = \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x-(n-1)} + \cdots + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+n-1} + \frac{1}{x+n}$$

$$\text{ce que l'on pourra noter } s_n(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{x+k}.$$

- En déduire que la fonction $s : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ est 1-périodique.
- Étudier la parité de la fonction s . En déduire que s vérifie la propriété **(P1)** sur l'intervalle $]0, 1[$.
- Montrer que la fonction s vérifie aussi la propriété **(P2)** sur $]0, 1[$.

PARTIE B. Une première identité eulérienne.

- Simplifier les expressions $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ pour θ réel, puis montrer que la fonction g vérifie les propriétés **(P1)** et **(P2)** sur $]0, 1[$. Interpréter graphiquement la propriété **(P1)**.
- Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$, et calculer sa somme S . Montrer que, pour $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, on a $\left|s(x) - \frac{1}{x}\right| \leq 4x$. En déduire que l'expression $s(x) - \frac{1}{x}$ admet une limite finie lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, et préciser cette limite.

9. À l'aide de développements limités, montrer que la fonction $x \mapsto g(x) - \frac{1}{x}$ admet une limite finie en 0.
10. Déduire de ce qui précède que la fonction $h = s - g$ est prolongeable en une fonction continue (que l'on notera toujours h) sur le segment $[0, 1]$. Préciser alors la valeur de $h(0)$.
11. On note $M = \|h\|_{\infty, [0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |h(x)|$. Justifier l'existence de M . Soit x_0 un réel de $[0, 1]$ tel que $|h(x_0)| = M$. En utilisant la propriété **(P2)**, montrer que $\left|h\left(\frac{x_0}{2}\right)\right| = M$, puis que $M = |h(0)|$.
12. En déduire l'identité

$$\forall x \in]0, 1[\quad \pi \cotan(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} .$$

13. Montrer que cette dernière relation est vraie en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}$.

PARTIE C. Conséquences de cette identité.

14. Démontrer la relation

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Z} \quad \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2} \right) .$$

15. À l'aide d'une des questions précédentes, retrouver la valeur de la somme $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

PARTIE D. Formule d'Euler-Wallis.

16. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$. Montrer que les fonctions u_n , pour $n \in \mathbb{N}^*$, sont prolongeables en des fonctions continues sur $[0, x]$, et que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ est alors normalement convergente sur le segment $[0, x]$.
17. En déduire, à l'aide de la question 12., la relation

$$\forall x \in]0, 1[\quad \ln \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) .$$

On rappelle que, si $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels non nuls, on dit que “le **produit infini** $\prod_{n \geq 1} a_n$ est convergent” si la suite (P_n) définie par $P_n = \prod_{k=1}^n a_k$ admet une limite réelle **non nulle**. Dans ce cas, le réel $P = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$ est appelé **produit infini** des a_n et on note alors $P = \prod_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

18. Déduire de la question 17. une écriture de $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ sous forme de produit infini, valable pour tout $x \in]0, 1[$.

19. Donner la valeur du produit infini $P = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right)$.