

Éléments propres.

1. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, soit l'endomorphisme $\Phi : f \mapsto f''$. Déterminer ses éléments propres.

2. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

a. Montrer que, si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est aussi valeur propre de $v \circ u$.

b. Si E est de dimension finie, montrer que $\text{Sp}(v \circ u) = \text{Sp}(u \circ v)$.

c. Si E est de dimension infinie, montrer que 0 peut être valeur propre de $u \circ v$ sans être valeur propre de $v \circ u$. On pourra, dans $E = \mathbb{K}[X]$, considérer l'opérateur de dérivation

$$D : P \mapsto P' \text{ et un "opérateur de primitivation" } \Phi : P \mapsto \int_0^X P(t) dt.$$

3. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme f de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ défini par

$$f : P \mapsto (X^2 - 1) P'' + 2X P'.$$

4. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = (X^2 - 1)P' - nXP$.

5. Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ défini par $f(u) = v$ avec

$$v_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{u_{n-1} + u_n}{2}.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f .

6.a. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice canoniquement associée. Soit par ailleurs H un hyperplan de $\mathbb{K}^n$ d'équation cartésienne $v_1x_1 + \dots + v_nx_n = 0$, avec $v_1, \dots, v_n$ scalaires non tous nuls. Montrer que H est stable par u si et seulement le vecteur

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ est vecteur propre de la matrice } A^\top.$$

b. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par u .

7. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **strictement stochastique**, i.e. telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad a_{i,j} > 0 ;$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

a. Montrer que 1 est valeur propre de A .

b. Montrer que $\forall \lambda \in \text{Sp}(A) \quad |\lambda| \leq 1$.

c. Montrer que, si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ est de module 1, alors $\lambda = 1$.

8. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, soit $v \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec u .

On pose $f = u + v$. Montrer que f et v ont les mêmes valeurs propres.

Polynôme caractéristique.

9. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 3 & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ admet une unique valeur propre réelle strictement positive.

10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible, soit $B = A^{-1}$. Quelle relation y a-t-il entre les polynômes caractéristiques χ_A et χ_B ?

11. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 2. Exprimer son polynôme caractéristique χ_f à l'aide de $\text{tr}(f)$ et $\text{tr}(f^2)$.

12. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}$, $M'' = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & \lambda I_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. En effectuant les produits matriciels MM' et $M''M$, montrer que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique: $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Diagonalisation (pratique).

13. Sans écrire aucun calcul, déterminer les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & -12 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

14. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

15. Rechercher toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M = J$, avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
On pourra exploiter le fait qu'une telle matrice M commute nécessairement avec J .

16. Soient $n+1$ nombres complexes distincts $x_0, \dots, x_n$, soit le polynôme $B = \prod_{k=0}^n (X - x_k)$. Soit d'autre part $A \in \mathbb{C}_n[X]$ un polynôme. On considère l'application φ qui, à tout polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$, associe le reste de la division euclidienne du polynôme AP par B .

- a. Montrer que φ peut être considéré comme un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.
b. On note $(L_0, \dots, L_n)$ la base de Lagrange associée aux points d'interpolation $x_0, \dots, x_n$. Calculer $\varphi(L_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En déduire que l'endomorphisme φ est diagonalisable.

17. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, soient a et b deux réels distincts. Pour $P \in E$, on pose

$$\varphi(P) = (X - a)(X - b)P' - nXP.$$

Montrer que φ est un endomorphisme de E , et qu'il est diagonalisable.

18. Soit $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit P_n son polynôme caractéristique.

a. Calculer P_1 et P_2 . Pour $n \geq 3$, exprimer P_n en fonction de P_{n-1} et P_{n-2} .

b. Soit $x \in]-2, 2[$. Montrer que

$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}, \quad \text{avec} \quad \alpha = \arccos\left(\frac{x}{2}\right).$$

c. En déduire que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

19. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Combien y a-t-il de matrices M telles que $M^2 = A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
Et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

20. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que A est diagonalisable.

b. Montrer qu'il existe une infinité de matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$.

c. Soit $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. Montrer que R est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

21. Soit a un réel, soit la matrice $L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \vdots & (0) & & \\ 1 & & & \\ a & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. À quelle condition sur le réel a la matrice L est-elle diagonalisable ?

b. Calculer les puissances de L .

Diagonalisation (théorie).

22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad f(M) = AM.$$

Montrer que $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$, et déterminer les sous-espaces propres de f en fonction de ceux de A . Montrer que f est diagonalisable si et seulement si A l'est.

23. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ est également diagonalisable. On utilisera la diagonalisation de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

24. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec B diagonalisable. Montrer que

$$AB^3 = B^3A \implies AB = BA.$$

- 25.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.
- Démontrer la relation $A^2 = \text{tr}(A) \cdot A$.
 - En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
 - Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathbb{K}^n = \text{Ker}(A) \oplus \text{Im}(A)$.
- 26.** Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Soit u un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes.
- Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Montrer que l'endomorphisme $f = P(u)$ est diagonalisable. A-t-il n valeurs propres distinctes?
 - Soit v un endomorphisme de E qui commute avec u . Montrer que tout vecteur propre de u est aussi vecteur propre de v . La réciproque est-elle vraie (tout vecteur propre de v est-il vecteur propre de u) ? Montrer que u et v sont codiagonalisables (i.e. diagonalisables dans une même base).
- 27.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Montrer que $\det(A) > 0$.
- 28.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^\top = I_n$.
- Montrer que M est inversible si et seulement si $1 \notin \text{Sp}(M)$.
 - Montrer que M est diagonalisable.
- 29.** Soit E un espace vectoriel de dimension n , soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Étudier les éléments propres et la diagonalisabilité de l'endomorphisme $\varphi : u \mapsto p \circ u - u \circ p$ de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.
- 30.** Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E . On note p le projecteur sur F parallèlement à G , et s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G . Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose $\varphi(f) = p \circ f \circ s$.
- Montrer que φ est un endomorphisme diagonalisable de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$. *On recherchera un polynôme annulateur.*
 - Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme φ .
- 31.** Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que f et g commutent si et seulement s'ils sont simultanément diagonalisables (i.e. s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres communs à f et g).
- 32.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\text{rg}(A) = 2$, $\text{tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0$. Montrer que la matrice A est diagonalisable.
- 33.** Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , soit u un endomorphisme de E , supposé diagonalisable. À quelle condition existe-t-il un vecteur x de E tel que la famille $\mathcal{F} = (x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E ? *On écrira le déterminant de la famille $\mathcal{F}$ relativement à une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de u .*

34*. Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension n . On note $\mathcal{C}_f$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f .

- a. Montrer que $\mathcal{C}_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
- b. Montrer qu'un endomorphisme g appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si chaque sous-espace propre de f est stable par g .
- c. En déduire que

$$\dim(\mathcal{C}_f) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} m_\lambda^2,$$

où m_λ est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ .

- d. On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Montrer que $(\text{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}_f$.

35. Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $n \geq 2$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\varphi(P)(X) = (X - a) (P'(X) - P'(a)) - 2 (P(X) - P(a)).$$

- a. Montrer que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.
- b. Déterminer ses valeurs propres. Est-il diagonalisable ? *On pourra utiliser le fait que la famille $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.*

36. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

- a. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A) B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

- b. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit diagonalisable.

37. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

- a. Montrer que tout endomorphisme v de E vérifiant $v^2 = u$ est diagonalisable.
- b*. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme v de E tel que $v^2 = u$ et $\text{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Trigonalisation.

38. Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

39. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que $\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$. Déterminer $\chi_{P(A)}$.

40*. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$.

- a. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.
- b. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

41*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence

$$A \text{ est nilpotente} \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{tr}(A^k) = 0.$$

Théorème de Cayley-Hamilton.

- 42.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on suppose que les matrices M et $2M$ sont semblables. Montrer que M est nilpotente. *On montrera que $\text{Sp}(M) = \{0\}$.*
- 43*.** Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe une droite ou un plan de E stable par f . Est-ce encore vrai en dimension infinie ?
- 44.** Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $AM = MB$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune (*on pourra montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)M = MP(B)$*). Étudier la réciproque.
- 45.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.
- a. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
 - b. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?
 - c. Soit $B = A + \lambda I_3$ avec λ réel non nul. Montrer que B est inversible et que l'on peut écrire $B^{-1} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$, où α, β, γ sont des réels (dépendant de λ).
- 46.** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice non scalaire, admettant une unique valeur propre a . Montrer que A est semblable à $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercices avec Python.

- 47.** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 0 \\ 54 & 8 & -36 \\ 3 & -3 & -10 \end{pmatrix}$. Soit le vecteur $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- a. Pour tout entier naturel n , on note X_n le n -ième itéré de X_0 par A (ou par l'endomorphisme canoniquement associé), c'est-à-dire $X_n = A^n X_0$. Faire afficher les X_n pour n de 0 à 15 (*valeurs approchées*). Que remarque-t-on ?
 - b. Pour travailler avec des valeurs numériques "raisonnables", on norme les X_n à chaque étape, autrement dit on construit une suite de vecteurs (Y_n) , avec $Y_0 = \frac{X_0}{\|X_0\|}$, puis $Y_{n+1} = \frac{AY_n}{\|AY_n\|}$. Pour n de 1 à 15, afficher le vecteur Y_n ainsi que le produit scalaire $(AY_n|Y_n)$. Conclusion ?
 - c. Tester avec d'autres vecteurs "initiaux" X_0 construits aléatoirement.
 - d. En prenant $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, qu'obtient-on avec 20 itérations ? avec 40 itérations ?
 - e. Utiliser les fonctions du module `numpy.linalg` pour diagonaliser la matrice A .
 - f. Comment interpréter les résultats des calculs précédents ?

Les notations $(\cdot|\cdot)$ et $\|\cdot\|$ représentent respectivement le produit scalaire canonique et la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$.