COLLES de MATHÉMATIQUES **PSI2 2025-2026**

Semaine 7 : du 10/11 au 14/11

Séries de fonctions

Modes de convergence pour les séries de fonctions: convergence simple, convergence uniforme, convergence normale. La convergence normale entraîne la convergence uniforme.

Théorèmes sur la régularité de la somme d'une série de fonctions: continuité, intégration terme à terme sur un segment, dérivation terme à terme et extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Théorème de la double limite (interversion somme-limite) (*admis*).

Déterminants

Le programme précédent, plus:

- déterminants de matrices triangulaires par blocs
- polynômes d'interpolation de Lagrange

Réduction des endomorphismes (début)

Notions de valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre pour un endomorphisme ou une matrice carrée. Un vecteur non nul est vecteur propre de u si et seulement s'il engendre une droite vectorielle stable par u. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, un scalaire λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ est non injectif.

En dimension finie, notion de spectre. <u>Si E est **de dimension finie**</u>, alors

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff u - \lambda\,\mathrm{id}_E \notin \mathrm{GL}(E) \iff \det(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = 0\ .$$

Aucune connaissance spécifique sur le polynôme caractéristique pour le moment.

Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)\,x$. Lien entre polynômes annulateurs et valeurs propres.

Les sous-espaces propres sont en somme directe. Conséquences: en dimension finie n, $\mathrm{Card}\big(\mathrm{Sp}(u)\big) \leq n$ et $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\big(E_\lambda(u)\big) \leq n$. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- La convergence normale d'une série de fonctions entraîne la convergence uniforme.
- Exemple où il y a CVU, mais pas CVN.
- Description de l'algorithme de Gauss-Jordan pour inverser une matrice carrée supposée inversible. Estimation de la complexité.
- Calcul du déterminant de Vandermonde.
- Polynômes d'interpolation de Lagrange associés à une famille de $n+1$ scalaires distincts, ils forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe. Conséquences.
- Lien entre polynômes annulateurs et valeurs propres.