

Éléments propres.

1. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, soit l'endomorphisme $\Phi : f \mapsto f''$. Déterminer ses éléments propres.

Soit λ un réel. On recherche les fonctions f vérifiant $f'' = \lambda f$, ce sont donc les solutions de l'équation différentielle $y'' - \lambda y = 0$ (équation linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre). On peut donc affirmer (*cours de première année*) que tout réel λ est valeur propre de Φ , et que les sous-espaces propres $E_\lambda(\Phi) = \text{Ker}(\Phi - \lambda \text{id}_E)$ sont tous de dimension deux. Plus précisément,

- pour $\lambda = 0$, le sous-espace propre $E_0(\Phi) = \text{Ker } \Phi$ est constitué des fonctions affines $x \mapsto Ax + B$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$;

- pour $\lambda > 0$, posons $\omega = \sqrt{\lambda}$, le sous-espace propre $E_\lambda(\Phi)$ est constitué des solutions de l'équation $y'' - \omega^2 y = 0$, ce sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto A \text{ch}(\omega x) + B \text{sh}(\omega x), \quad \text{ou encore} \quad x \mapsto a e^{\omega x} + b e^{-\omega x},$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ ou $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- pour $\lambda < 0$, posons $\omega = \sqrt{-\lambda}$, le sous-espace propre $E_\lambda(\Phi)$ est constitué des solutions de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$, ce sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x), \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

- Montrer que, si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est aussi valeur propre de $v \circ u$.
- Si E est de dimension finie, montrer que $\text{Sp}(v \circ u) = \text{Sp}(u \circ v)$.
- Si E est de dimension infinie, montrer que 0 peut être valeur propre de $u \circ v$ sans être valeur propre de $v \circ u$. On pourra, dans $E = \mathbb{K}[X]$, considérer l'opérateur de dérivation

$$D : P \mapsto P' \quad \text{et un "opérateur de primitivation"} \quad \Phi : P \mapsto \int_0^X P(t) dt.$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ une valeur propre **non nulle** de $u \circ v$, il existe alors un vecteur x **non nul** de E tel que $u \circ v(x) = \lambda x$. En appliquant v , on obtient $v \circ u \circ v(x) = \lambda v(x)$, soit $(v \circ u)(v(x)) = \lambda v(x)$. Or, le vecteur $v(x)$ est **non nul** : en effet, si on avait $v(x) = 0_E$, cela entraînerait $\lambda x = u(v(x)) = 0_E$ donc $x = 0_E$ puisque λ est non nul, et c'est absurde. Le scalaire λ est donc aussi valeur propre de $v \circ u$, le vecteur **non nul** $v(x)$ étant un vecteur propre associé.
- En dimension finie, on peut utiliser les déterminants. Rappelons que le spectre est alors l'ensemble des valeurs propres (*faux en dimension infinie*). Si λ est un scalaire non nul, il appartient à $\text{Sp}(u \circ v)$ si et seulement s'il appartient à $\text{Sp}(v \circ u)$ d'après la question **a**. Il reste à étudier le cas $\lambda = 0$, mais rappelons que 0 est valeur propre d'un endomorphisme si et seulement si cet endomorphisme est non injectif, c'est-à-dire (en dimension finie) de déterminant nul. Donc

$$0 \in \text{Sp}(u \circ v) \iff \det(u \circ v) = 0 \iff \det(u) \det(v) = 0 \iff \det(v \circ u) = 0 \iff 0 \in \text{Sp}(v \circ u).$$

- Considérons les endomorphismes D et Φ de $\mathbb{R}[X]$ aimablement prêtés par l'énoncé. Notons d'abord que, si P est un polynôme, $\Phi(P)$ est la "primitive formelle" de P qui

$$\text{s'annule en zéro, autrement dit si } P = \sum_{k=0}^d a_k X^k, \text{ alors } \Phi(P) = \sum_{k=0}^d a_k \frac{X^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{d+1} \frac{a_{k-1}}{k} X^k.$$

Il est immédiat de vérifier que, pour tout polynôme P , on a $D(\Phi(P)) = P$, donc $D \circ \Phi = \text{id}_E$ et l'endomorphisme $D \circ \Phi$ est injectif et n'admet donc pas 0 pour valeur propre.

Par contre, pour tout polynôme P , on a $\Phi(D(P)) = P - P(0)$: si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, alors

$\Phi(D(P)) = \sum_{k=1}^d a_k X^k = P - a_0$; ainsi, $\text{Ker}(\Phi \circ D)$ est l'ensemble $\mathbb{K}_0[X] \simeq \mathbb{K}$ des polynômes constants et l'endomorphisme $\Phi \circ D$ n'est pas injectif donc admet 0 pour valeur propre.

3. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme f de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ défini par

$$f : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2X P'.$$

L'endomorphisme f diminue les degrés: on vérifie facilement que $\deg(f(P)) \leq \deg(P)$ pour tout polynôme P . Il en résulte que, pour tout n entier naturel, le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f , et que l'endomorphisme induit f_n est représenté, dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, par une matrice T_n triangulaire supérieure. Explicitons cette matrice T_n , pour cela calculons les images par f des polynômes X^k . On a immédiatement $f(1) = 0$, $f(X) = 2X$ et, pour $k \geq 2$, $f(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$. D'où

$$T_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 6 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}.$$

Comme T_n est triangulaire, on a

$$\text{Sp}(f_n) = \text{Sp}(T_n) = \{0, 2, 6, \dots, n(n+1)\} = \{k(k+1) ; 0 \leq k \leq n\}.$$

Enfin, un réel est valeur propre de f si et seulement s'il est valeur propre de f_n pour au moins un entier n (*vérification laissée à l'improbable lecteur*). En conclusion, les valeurs propres de f sont les $k(k+1)$ pour k entier naturel.

4. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = (X^2 - 1)P' - nXP$.

Notons d'abord que f est bien un endomorphisme de E : la linéarité est immédiate, et on constate ensuite que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le polynôme image $f(X^k)$ est de degré au plus n (il est de degré $k+1$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, et $f(X^n)$ est de degré n grâce à une annihilation des termes de degré $n+1$). Donc f va bien de E dans E .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λ est valeur propre de f si et seulement s'il existe un polynôme P non nul, de degré au plus n , tel que $f(P) = \lambda P$, donc si et seulement si l'équation différentielle

$(E_\lambda) : (x^2 - 1) y' - (nx + \lambda) y = 0$ admet une solution polynomiale non nulle de degré au plus n . Résolvons cette équation sur l'un des intervalles $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$ ou $]1, +\infty[$ sur lesquels il est possible de la mettre sous sa "forme normale" $y' = \frac{nx + \lambda}{x^2 - 1} y$. Après une décomposition en éléments simples, on a

$$(E_\lambda) \iff y' = \left(\frac{n + \lambda}{2} \frac{1}{x - 1} + \frac{n - \lambda}{2} \frac{1}{x + 1} \right) y,$$

ce qui se résout en

$$y = C |x - 1|^{\frac{n + \lambda}{2}} |x + 1|^{\frac{n - \lambda}{2}}.$$

Les fonctions obtenues sont polynomiales de degré au plus n (en fait, si elles sont polynomiales, elles sont de degré n exactement) sur les intervalles considérés si et seulement si les exposants $\frac{n + \lambda}{2}$ et $\frac{n - \lambda}{2}$ sont des entiers naturels de l'intervalle $\llbracket 0, n \rrbracket$. On en déduit que λ est nécessairement de la forme $2k - n$ avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Pour un tel λ , on s'aperçoit alors que le polynôme $P = (X - 1)^k (X + 1)^{n - k}$ est un vecteur propre associé. On a obtenu $n + 1$ valeurs propres distinctes, il ne peut y en avoir d'autres puisque $\dim(E) = n + 1$.

Bilan. $\text{Sp}(f) = \{2k - n ; 0 \leq k \leq n\}$ et $E_{2k - n}(f) = \text{Vect}((X - 1)^k (X + 1)^{n - k})$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles. *On peut alors affirmer que f est diagonalisable puisqu'on a construit une base de vecteurs propres, ou bien puisqu'il a $n + 1$ valeurs propres distinctes en dimension $n + 1$.*

5. Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ défini par $f(u) = v$ avec

$$v_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{u_{n-1} + u_n}{2}.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f .

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, discutons l'équation $f(u) = \lambda u$ avec $u \in E$. Elle se traduit par

$$\begin{cases} u_0 = \lambda u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n-1} + u_n}{2} = \lambda u_n \end{cases}.$$

- si $\lambda = 1$, on peut choisir u_0 quelconque, la deuxième condition se traduit alors par $u_{n-1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Les solutions de l'équation $f(u) = u$ sont les suites constantes (qui forment un s.e.v. de dimension 1) ;

- si $\lambda \neq 1$, la première condition impose $u_0 = 0$, la deuxième donne $(2\lambda - 1)u_n = u_{n-1}$, d'où deux sous-cas:

▷ si $\lambda = \frac{1}{2}$, alors $u_{n-1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la seule solution est la suite nulle ;

▷ si $\lambda \neq \frac{1}{2}$, alors $u_n = \frac{u_{n-1}}{2\lambda - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et partant de $u_0 = 0$, on obtient aussi

que u est la suite nulle.

Finalement, la seule valeur propre de l'endomorphisme f est 1, et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle constituée des suites constantes.

6.a. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice canoniquement associée. Soit par ailleurs H un hyperplan de $\mathbb{K}^n$ d'équation cartésienne $v_1x_1 + \dots + v_nx_n = 0$, avec $v_1, \dots, v_n$ scalaires non tous nuls. Montrer que H est stable par u si et seulement le vecteur

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ est vecteur propre de la matrice } A^\top.$$

b. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par u .

a. Posons $W = A^\top V = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$. On notera qu'un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{K}^n$ appartient à

H si et seulement si on a $V^\top X = 0$.

- Supposons V vecteur propre de $A^\top$, alors il existe un scalaire λ tel que $A^\top V = \lambda V$, donc en transposant $V^\top A = \lambda V^\top$. Si X appartient à H , on a alors $V^\top X = 0$, d'où $V^\top (AX) = (V^\top A)X = \lambda V^\top X = 0$, ce qui signifie que le vecteur AX est aussi dans H . Ainsi, H est stable par la matrice A ou, ce qui revient au même, par l'endomorphisme u .

- Supposons H stable par u . Ainsi, pour tout vecteur X de H , on a $AX \in H$, c'est-à-dire

$V^\top AX = 0$, soit encore $W^\top X = 0$. Autrement dit, tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de H vérifie

l'équation cartésienne $w_1x_1 + \dots + w_nx_n = 0$. Deux cas se présentent alors:

- si $W = 0$, i.e. si tous les coefficients w_i sont nuls, alors $V \in \text{Ker}(A^\top)$, donc V est bien vecteur propre de $A^\top$ (pour la valeur propre 0) ;
- si les w_i ne sont pas tous nuls, l'hyperplan H' d'équation cartésienne $w_1x_1 + \dots + w_nx_n = 0$ est confondu avec H (on a vu ci-dessus que $H \subset H'$ et ils ont la même dimension car ce sont des hyperplans). Mais deux équations linéaires définissant le même hyperplan sont proportionnelles (*résultat du cours que l'on peut aussi énoncer sous la forme: deux formes linéaires non nulles ayant le même noyau sont proportionnelles*), il en résulte qu'il existe un scalaire λ (alors non nul) tel que $W = \lambda V$, i.e. $A^\top V = \lambda V$, ce qu'il fallait démontrer.

b. Il y a déjà deux s.e.v. triviaux qui sont stables par u , ce sont:

- le s.e.v. $\{0_E\}$, de dimension 0 ;
- l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier, de dimension 3.

Les droites vectorielles stables (dimension 1) sont celles dirigées par des vecteurs propres, recherchons donc ces derniers. Un petit calcul, laissé à l'estimable lecteur, montre que $\chi_A = (X - 2)(X^2 - 2X + 2)$, donc la seule valeur propre **réelle** de la matrice A (i.e. la seule valeur propre de l'endomorphisme u) est $\lambda = 2$. Le sous-espace propre est la droite

vectorielle D engendrée par le vecteur propre $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cette droite D est alors l'unique

droite vectorielle stable.

En utilisant la question **a.**, on voit que les plans stables sont obtenus en recherchant les vecteurs propres de la matrice $A^\top$. Cette matrice a les mêmes valeurs propres que A , à savoir seulement 2 comme valeur propre réelle, mais le sous-espace propre est la droite engendrée

par le vecteur $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le seul plan vectoriel stable par u est alors celui d'équation cartésienne $V^\top X = 0$, i.e. $y + z = 0$.

7. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **strictement stochastique**, i.e. telle que

$$\begin{aligned} \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad a_{i,j} &> 0 ; \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} &= 1 . \end{aligned}$$

a. Montrer que 1 est valeur propre de A .

b. Montrer que $\forall \lambda \in \text{Sp}(A) \quad |\lambda| \leq 1$.

c*. Montrer que, si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ est de module 1, alors $\lambda = 1$.

a. La relation $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ signifie que $AV = V$, avec $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc le nombre 1 est valeur propre de A , et V est un vecteur propre associé.

b. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$, soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associée, posons $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Alors $\|X\|_\infty > 0$ puisque X n'est pas le vecteur nul. Comme $AX = \lambda X$,

on a, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la relation $\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i$. Donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |\lambda| |x_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j} x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} \|X\|_\infty = \|X\|_\infty .$$

Cette majoration étant vraie pour tout indice i , elle "passe au sup", i.e. $|\lambda| \|X\|_\infty \leq \|X\|_\infty$. Comme $\|X\|_\infty > 0$, on déduit $|\lambda| \leq 1$.

c. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ de module 1, soit $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)^\top$ un vecteur propre associé. Soit $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$ un indice tel que $|x_s| = \|X\|_\infty$. On a, d'après **a.**, la relation

$$|x_s| = \left| \sum_{j=1}^n a_{s,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{s,j} |x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{s,j} \|X\|_\infty = \|X\|_\infty = |x_s| .$$

L'égalité entre les termes extrêmes entraîne l'égalité à chaque intermédiaire.

De $\sum_{j=1}^n a_{s,j} |x_j| = \sum_{j=1}^n a_{s,j} \|X\|_\infty$, que l'on peut écrire aussi $\sum_{j=1}^n a_{s,j} (\|X\|_\infty - |x_j|) = 0$, on déduit d'abord que chaque terme de cette dernière somme est nul (c'est une somme de

termes positifs qui est nulle) et, les coefficients de la matrice A étant tous non nuls, on déduit ensuite que $|x_j| = \|X\|_\infty = |x_s|$ pour tout j .

Ensuite, de $\left| \sum_{j=1}^n a_{s,j} x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{s,j} x_j|$, on déduit que les nombres complexes $a_{s,j} x_j$ sont positivement liés (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire), i.e. ils ont le même argument (ils sont tous non nuls) donc il existe un réel θ tel que $x_j = e^{i\theta} |x_j|$ pour tout j . Finalement, $x_j = e^{i\theta} \|X\|_\infty$ pour tout j , ce qui signifie que $X = e^{i\theta} \|X\|_\infty V$, où V est le vecteur-colonne introduit en **a**. Comme $AV = V$, on déduit que $AX = X$, puis que $\lambda = 1$.

Remarque. Cette démonstration prouve aussi que $E_1(A) = \text{Vect}(V)$.

8. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, soit $v \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec u . On pose $f = u + v$. Montrer que f et v ont les mêmes valeurs propres.

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de v , alors il existe $x \in E$, non nul, tel que $v(x) = \lambda x$. Comme u est nilpotent, l'ensemble $\{j \in \mathbb{N}^* \mid u^j(x) \neq 0_E\}$ est une partie non vide, elle admet alors un minimum k , on a alors $u^{k-1}(x) \neq 0_E$ et $u^k(x) = 0_E$.

Attention. Cet entier k n'est pas forcément l'**indice de nilpotence** de u défini par $p = \min\{j \in \mathbb{N}^* \mid u^j = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$. On a seulement $k \leq p$ en général.

En posant $y = u^{k-1}(x)$, on a alors $u(y) = 0_E$ et on dispose d'un vecteur y **non nul** tel que

$$f(y) = v(y) = v(u^{k-1}(x)) = u^{k-1}(v(x)) = u^{k-1}(\lambda x) = \lambda u^{k-1}(x) = \lambda y$$

(en effet, si v commute avec u , il commute aussi avec u^{k-1} , c'est une récurrence immédiate). Donc λ est aussi valeur propre de f .

• Comme $v = (-u) + f$ avec $-u$ nilpotent, les endomorphismes $-u$ et f commutent puisque $(-u) \circ f = -u \circ (u + v) = -u^2 - u \circ v = -u^2 - v \circ u = f \circ (-u)$, on peut dire que f et v jouent des rôles symétriques, il est donc inutile de rédiger une réciproque: toute valeur propre de f est donc aussi valeur propre de v .