

EXERCICE

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On définit par récurrence une suite de fonctions (f_n) de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$f_0 = f \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) \, dt .$$

1. Montrer que, pour tout k entier naturel, la fonction f_k est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.
2. Si j et k sont deux entiers naturels tels que $0 \leq j \leq k$, montrer que $f_k^{(j)} = f_{k-j}$.
Que vaut $f_k^{(j)}(0)$ si $j < k$?
3. On fixe $a > 0$. Montrer qu'il existe une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [-a, a] \quad |f_k(x)| \leq M \frac{|x|^k}{k!} .$$

On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

4. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, on notera S la fonction somme:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}(x) .$$

5. Montrer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et exprimer S' à l'aide de f et de S .
6. Que vaut $S(0)$?
7. Prouver la relation $\frac{d}{dx}(S(x)e^{-x}) = f(x)e^{-x}$. En déduire une expression de $S(x)$ faisant intervenir une intégrale.
8. Déterminer S lorsque f est la fonction $f : x \mapsto x^2$.
9. Soient $n \in \mathbb{N}$ et x réel. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) \, dt .$$

10. Retrouver alors l'expression de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}(x)$ obtenue à la question 7.
11. Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. À toute fonction f de E , on associe une fonction notée $\psi(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(f)(x) = e^x \int_0^x f(t) e^{-t} \, dt .$$

- a. Montrer que ψ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .
- b. Montrer que ψ est injectif, non surjectif.
- c. Déterminer précisément le sous-espace vectoriel $\text{Im}(\psi)$.

PROBLÈME

Dans tout ce problème, on fixe un entier naturel n avec $n \geq 2$. On identifie (comme d'habitude) les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, autrement dit, si $x_1, \dots, x_n$ sont n scalaires, les notations

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \text{ et } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ représentent le même objet.}$$

On note $\mathcal{B}_0 = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, ainsi pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, E_i est la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont le i -ième coefficient vaut 1, les autres étant nuls.

Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, la notation $E_{i,j}$ représente la matrice élémentaire, carrée d'ordre n , dont le coefficient d'indices (i, j) vaut 1, les autres étant nuls. On pourra utiliser sans démonstration les relations (la notation $A^\top$ représente la transposée d'une matrice A):

$$(*) : \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad E_i^\top E_j = \delta_{i,j} \quad ; \quad E_i E_j^\top = E_{i,j} ,$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker, qui vaut 1 si $i = j$, et 0 sinon.

PARTIE A. Quelques préliminaires.

1. Des relations $(*)$ ci-dessus, déduire la **règle des dominos**:

$$\forall (i, j, k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4 \quad E_{i,j} E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l} .$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit un couple d'indices $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Que représentent les produits matriciels $A E_j$ et $E_i^\top A$? Exprimer le coefficient $a_{i,j}$ d'indices (i, j) de la matrice A à l'aide de A et des matrices-colonnes E_i et E_j .

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n , soit u_A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note V_k le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ défini par

$$V_k = \text{Vect}(E_1, \dots, E_k) .$$

- a. Montrer que la matrice A est triangulaire supérieure si et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le sous-espace V_k est stable par u_A .
 - b. Énoncer de même une condition nécessaire et suffisante pour que A soit triangulaire inférieure, en termes de sous-espaces stables par u_A .
4. En utilisant éventuellement la question 3. ci-dessus (*mais d'autres méthodes sont aussi envisageables*), prouver les résultats suivants:
- a. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est encore une matrice triangulaire supérieure. Quels sont alors les coefficients diagonaux de la matrice produit ?
 - b. Si une matrice triangulaire supérieure est inversible, alors son inverse est encore triangulaire supérieure. Quels sont alors les coefficients diagonaux de la matrice inverse ?

PARTIE B. Opérations élémentaires de type transvection.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée d'ordre n , et si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on appelle k -ième **mineur principal** de la matrice M le déterminant, noté $\Delta_k(M)$, de la matrice carrée d'ordre k extraite de M en ne conservant que ses k premières lignes et k premières colonnes.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice quelconque, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire, soient i et j deux indices appartenant à l'intervalle entier $\llbracket 1, n \rrbracket$, avec $i > j$. On note A' la matrice obtenue à partir de A par l'opération élémentaire sur les lignes dont le codage est $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

a. Montrer qu'il existe une matrice $T_{i,j}(\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dépendant seulement des indices i et j et du scalaire λ , telle que $A' = T_{i,j}(\lambda) \cdot A$, et exprimer cette matrice $T_{i,j}(\lambda)$ à l'aide de la matrice-identité I_n , du scalaire λ et de la matrice élémentaire $E_{i,j}$.

b. Montrer que $\Delta_k(A') = \Delta_k(A)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Les matrices $T_{i,j}(\lambda)$ introduites ci-dessus, avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $1 \leq j < i \leq n$, seront appelées **matrices de transvection**.

6. Avec les notations de la question précédente, déterminer $(T_{i,j}(\lambda))^{-1}$.

7. Soit m un entier naturel non nul. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des scalaires, soient $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_m, j_m)$ des couples d'entiers tels que $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket \quad 1 \leq j_k < i_k \leq n$.

Montrer que la matrice L égale au produit $L = T_{i_m, j_m}(\lambda_m) \cdots T_{i_1, j_1}(\lambda_1)$ est triangulaire inférieure avec des coefficients diagonaux tous égaux à 1.

8. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer qu'il est possible de transformer A en

une matrice triangulaire supérieure par une succession de trois opérations élémentaires sur les lignes de la forme $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $i > j$. En déduire l'existence d'une matrice L qui est le produit de trois matrices de transvection, et d'une matrice U triangulaire supérieure, telles que $A = LU$. Expliciter ces matrices L et U .

PARTIE C. La décomposition LU.

Dans cette partie, on notera $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On notera aussi $\mathcal{L}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont triangulaires inférieures avec des coefficients diagonaux tous égaux à 1.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée d'ordre n , on appelle **décomposition LU** de la matrice A toute écriture de la matrice A sous forme de produit $A = LU$, avec $L \in \mathcal{L}$ et $U \in \mathcal{U}$.

Les lettres L et U signifient respectivement "lower" et "upper".

L'objectif de cette partie est d'obtenir des propriétés d'existence et d'unicité d'une telle décomposition, sous diverses hypothèses.

9. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. On suppose $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$ avec $(L_1, L_2) \in \mathcal{L}^2$ et $(U_1, U_2) \in \mathcal{U}^2$. Montrer que $L_1 = L_2$ et $U_1 = U_2$. On pourra utiliser la **PARTIE A**.

10. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que N admet une infinité de décompositions LU.

11. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'admet pas de décomposition LU. Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur une matrice carrée d'ordre deux pour qu'elle admette une décomposition LU.

- 12.** Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on suppose que tous les mineurs principaux de A sont non nuls.
- Montrer qu'il est possible de transformer A en une matrice triangulaire supérieure, uniquement par des opérations élémentaires sur les lignes, du type transvection $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $i > j$. On décrira un procédé algorithmique pour y parvenir.
 - En déduire que A admet une décomposition LU.
 - Cette décomposition LU est-elle unique ?
 - Donner, en fonction de la taille n de la matrice, une estimation de la complexité de l'algorithme décrit en **a**.

PARTIE D. Cas d'une matrice tridiagonale.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice tridiagonale, c'est-à-dire de la forme

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & (0) \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ (0) & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

- 13.** On pose $\delta_0 = 1$, puis $\delta_k = \Delta_k(A)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, c'est-à-dire le k -ième mineur principal de la matrice A . Calculer δ_1 , puis exprimer δ_k en fonction de δ_{k-1} et δ_{k-2} pour $2 \leq k \leq n$.
- 14.** On suppose que les mineurs principaux δ_k ($1 \leq k \leq n$) de la matrice A sont tous non nuls. Vérifier que la factorisation LU de la matrice A est donnée par $A = LU$, avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & (0) \\ & l_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & \ddots & 1 \\ & & & & l_n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_0} & c_1 & & & \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} & \frac{\delta_2}{\delta_1} & c_2 & & (0) \\ & \frac{\delta_3}{\delta_2} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & \ddots & c_{n-1} \\ & & & & \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{pmatrix}$$

avec $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket \quad l_i = a_i \frac{\delta_{i-2}}{\delta_{i-1}}$.

- 15.** Soit $Y \in \mathbb{K}^n$. On considère le système linéaire **(S)** d'écriture matricielle $AX = Y$ et d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$. De ce qui précède, déduire qu'il est possible d'écrire un algorithme de résolution de ce système **(S)** dont la complexité est $O(n)$.