

**CORRIGÉ du D.S. de MATHÉMATIQUES numéro 3**  
**PSI2 2025-2026**

---

**EXERCICE**

*d'après un exercice du Concours e3a 2012, filière PC*

1. Par récurrence: la fonction  $f_0 = f$  est continue, i.e. de classe  $\mathcal{C}^0$  sur  $\mathbb{R}$  et, si pour  $k$  entier naturel donné, on suppose  $f_k$  de classe  $\mathcal{C}^k$ , alors l'expression de  $f_{k+1}$  montre que  $f_{k+1}$  est la primitive de  $f_k$  qui s'annule en 0 ; comme les primitives d'une fonction  $\mathcal{C}^k$  sont de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ , la récurrence est achevée.
2. On vient de voir que  $f'_{k+1} = f_k$  pour tout  $k$  entier naturel. Ainsi  $f'_k = f_{k-1}$  pour  $k \geq 1$ , puis  $f''_k = f_{k-2}$  pour  $k \geq 2$  et (récurrence immédiate sur  $j$ ),  $f_k^{(j)} = f_{k-j}$  pour  $j$  et  $k$  entiers naturels tels que  $k \geq j$ .

La définition de  $f_{n+1}$  montre que  $f_{n+1}(0) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $f_n(0) = 0$  pour  $n \geq 1$  par décalage d'indice. Donc, si  $j$  et  $k$  sont deux entiers naturels tels que  $j < k$ , on a  $f_k^{(j)}(0) = f_{k-j}(0) = 0$  puisque  $k - j \geq 1$ .

3. La fonction  $f_k$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  avec  $f_k^{(k)} = f$ , et  $f_k^{(j)}(0) = f_{k-j}(0) = 0$  pour  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , on peut donc appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre  $k-1$  entre 0 et  $x$ .

Comme  $f$  est continue sur le segment  $I = [-a, a]$ , on dispose de  $M = \|f\|_{\infty, I} = \max_{x \in I} |f(x)|$ , on peut alors écrire, pour tout  $x \in I$ ,

$$|f_k(x)| = \left| f_k(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f_k^{(j)}(0)}{j!} (x-0)^j \right| \leq \frac{M |x-0|^k}{k!} = M \frac{|x|^k}{k!}.$$

4. Fixons  $x$  réel. La majoration obtenue ci-dessus (en choisissant un réel positif  $a$  tel que  $a \geq |x|$ ) montre que la série de terme général  $|f_k(x)|$  converge, par comparaison à une série exponentielle, réputée convergente. Il y a donc convergence simple (et absolue) de la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  sur  $\mathbb{R}$ .

5. Pour  $n \geq 1$ , les fonctions  $f_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  (question 1.), la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge

simplement sur  $\mathbb{R}$  (question 4.), il ne reste plus qu'à prouver la convergence uniforme sur tout segment de la série des fonctions dérivées  $\sum_{n \geq 1} f'_n$ . Mais, pour  $n \geq 1$ , on a  $f'_n = f_{n-1}$ ,

il s'agit donc de montrer la convergence uniforme sur tout segment de la série  $\sum_{n \geq 1} f_{n-1}$ ,

ou encore  $\sum_{n \geq 0} f_n$ . Et ceci résulte de la question 3. puisque, si on fixe  $a > 0$ , et si l'on pose

$M = \|f\|_{\infty, [-a, a]}$ , on a alors

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [-a, a] \quad |f_k(x)| \leq M \frac{|x|^k}{k!} \leq M \frac{a^k}{k!}.$$

Cette dernière majoration **uniforme** montre que, avec  $I = [-a, a]$ , on a  $\|f_k\|_{\infty, I} \leq M \frac{a^k}{k!}$ ,

et donc la série  $\sum_{k \geq 0} \|f_k\|_{\infty, I}$  converge (par comparaison encore avec une série exponentielle),

ce qui est la définition de la convergence normale de la série  $\sum_{k \geq 0} f_k$ . Puisque tout segment

de  $\mathbb{R}$  est inclus dans un segment de la forme  $[-a, a]$  avec  $a > 0$ , on a donc prouvé que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f'_n$  convergeait normalement (donc uniformément) sur tout segment

de  $\mathbb{R}$ . Le théorème de dérivation terme à terme s'applique donc, on peut conclure que la

fonction  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que

$$S' = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = f_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n = f + S.$$

6.  $S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) = 0$ , cf. question 2.

7. Par dérivation d'un produit,

$$\frac{d}{dx}(S(x)e^{-x}) = S'(x)e^{-x} - S(x)e^{-x} = (S'(x) - S(x))e^{-x} = f(x)e^{-x}.$$

On en déduit que  $S(x)e^{-x} = \int_0^x f(t)e^{-t} dt + C$ , où  $C$  est une constante. En évaluant en 0, on obtient que  $C = 0$ . Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad S(x) = e^x \int_0^x f(t)e^{-t} dt.$$

8. Ici,  $S(x) = e^x \int_0^x t^2 e^{-t} dt$ . Par deux intégrations par parties que la lectrice ou le lecteur se fera un plaisir de détailler, on obtient  $S(x) = 2e^x - (x^2 + 2x + 2)$ .

9. Comme la fonction  $f_{n+1}$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ , on a

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f_{n+1}^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f_{n+1}^{(n+1)}(t) dt.$$

Mais, pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a  $f_{n+1}^{(k)}(0) = 0$  (question 2.), il ne reste donc que l'intégrale dans laquelle on observe que  $f_{n+1}^{(n+1)} = f_0 = f$ , et l'on obtient l'expression demandée.

10. Fixons  $x$  réel, on a alors  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) dt$ , on est donc tenté d'intervertir série et intégrale. Notons  $I$  le segment  $[0, x]$  (ou  $[x, 0]$  si  $x$  est négatif), et pour  $t \in I$  et  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $u_n(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)$ . On va prouver que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge normalement sur  $I$ , ce qui autorisera l'interversion. Posons  $M = \|f\|_{\infty, I}$ . On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I \quad |u_n(t)| = \frac{|x-t|^n}{n!} |f(t)| \leq M \frac{|x|^n}{n!}$$

donc  $\|u_n\|_{\infty, I} \leq M \frac{|x|^n}{n!}$ . Une de fois de plus, par comparaison à une série exponentielle, on a prouvé la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} \|u_n\|_{\infty, I}$ , i.e. la convergence normale de la série

de fonctions  $\sum u_n$  sur le segment  $I$ . Intervertissons donc la somme et l'intégrale:

$$S(x) = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) \right) dt = \int_0^x e^{x-t} f(t) dt = e^x \int_0^x f(t) e^{-t} dt .$$

**11.a.** La linéarité de  $\psi$  résulte de la linéarité de l'intégrale. Enfin, si  $f \in E$ , i.e. si  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , il résulte du théorème fondamental de l'analyse que  $\psi(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , donc a fortiori continue, sur  $\mathbb{R}$ , donc  $\psi(f) \in E$ . Ainsi,  $\psi$  est un endomorphisme de  $E$ .

**b.** Soit  $f \in E$  telle que  $\psi(f) = 0$ , on a alors  $\int_0^x f(t) e^{-t} dt = 0$  pour tout  $x$ , puis en dérivant par rapport à  $x$ , on déduit  $f(x) e^{-x} = 0$ , soit  $f(x) = 0$  pour tout  $x$ , donc  $f = 0$ . Ainsi,  $\text{Ker}(\psi) = \{0\}$ , et  $\psi$  est injectif.

En revanche,  $\psi$  n'est pas surjectif puisque, comme on l'a mentionné dans le **a.**, la fonction  $\psi(f)$  est toujours de classe  $\mathcal{C}^1$ . On a donc  $\text{Im}(\psi) \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  qui est un sous-espace strict de  $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , donc  $\text{Im}(\psi) \neq E$ .

**c.** Les questions précédentes montrent que, pour tout  $f \in E$ , la fonction  $S = \psi(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et s'annule en 0. Posons donc  $F = \left\{ g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid g(0) = 0 \right\}$ . Il est clair que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et que  $\text{Im}(\psi) \subset F$ .

Réciproquement, soit  $g \in F$ , alors  $g' \in E$  et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(g')(x) = \int_0^x g'(t) dt = g(x) - g(0) = g(x) ,$$

on a donc  $g = \psi(g')$  donc  $g \in \text{Im}(\psi)$ .

On conclut que  $\text{Im}(\psi) = F = \left\{ g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid g(0) = 0 \right\}$ .

## PROBLÈME

*d'après de vieux manuscrits*

### PARTIE A. Quelques préliminaires.

**1.** Par associativité du produit matriciel, et en utilisant le fait que  $E_j^\top E_k = \delta_{j,k}$  est un scalaire,

$$E_{i,j} E_{k,l} = (E_i E_j^\top)(E_k E_l^\top) = E_i (E_j^\top E_k) E_l^\top = E_i \delta_{j,k} E_l^\top = \delta_{j,k} E_i E_l^\top = \delta_{j,k} E_{i,l} .$$

**2.** On observe que  $AE_j = C_j(A) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  est la  $j$ -ième colonne de la matrice  $A$ , que  $E_i^\top A = L_i(A) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$  est sa  $i$ -ième ligne, et enfin que  $E_i^\top AE_j = a_{i,j}$  est son coefficient d'indices  $(i,j)$ .

**3.a.** Notons  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , on a alors **(R)**:  $u_A(E_j) = AE_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} E_i$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

La matrice  $A$  est triangulaire supérieure si et seulement si on a  $a_{i,j} = 0$  pour  $i > j$ .

• Si chaque sous-espace  $V_k$  est stable par  $u_A$ , comme  $E_j \in V_j$ , on a  $u_A(E_j) \in V_j = \text{Vect}(E_1, \dots, E_j)$ , donc les coefficients  $a_{i,j}$  de la décomposition **(R)** ci-dessus sont nuls dès que  $i > j$ , et ceci étant vrai pour tout  $j$ , on en déduit que la matrice  $A$  est triangulaire supérieure.

- Réciproquement, si  $A$  est triangulaire supérieure, alors  $a_{i,j}$  est nul dès que  $i > j$ , ainsi

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad u_A(E_j) = \sum_{i=1}^j a_{i,j} E_i \in \text{Vect}(E_1, \dots, E_j) = V_j.$$

Si  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , tout vecteur  $x$  de  $V_k$  est combinaison linéaire de  $E_1, \dots, E_k$ , donc s'écrit sous la forme  $x = \sum_{j=1}^k x_j E_j$ , et son image  $u_A(x) = \sum_{j=1}^k x_j u_A(E_j)$  est alors aussi combinaison linéaire de  $E_1, \dots, E_k$ , donc appartient à  $V_k$ . Chaque sous-espace  $V_k$  est donc stable par  $u_A$ .

- b. On montre de même que  $A$  est triangulaire inférieure si et seulement si, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , le sous-espace vectoriel  $W_k = \text{Vect}(E_{n-k+1}, \dots, E_n)$  est stable par  $u_A$ .
- 4.a. • Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  deux matrices triangulaires supérieures, soient  $u_A$  et  $u_B$  les endomorphismes de  $\mathbb{K}^n$  qui leur sont canoniquement associés. Alors, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , le sous-espace  $V_k$  est stable par  $u_A$  et aussi par  $u_B$ , il est donc évidemment stable par  $u_A \circ u_B$ . Comme l'endomorphisme  $u_A \circ u_B$  est canoniquement représenté par la matrice produit  $AB$  (autrement dit  $u_A \circ u_B = u_{AB}$ , on déduit de la question 3.a. que  $AB$  est aussi triangulaire supérieure.

- **Autre méthode.** Si  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$  sont triangulaires supérieures et si on pose  $C = (c_{i,j}) = AB$ , on a la relation  $c_{i,k} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,k}$  pour tout couple  $(i, k)$ . On note que, si  $i > k$ , tous les termes de cette somme sont nuls (car alors, pour tout  $j$ , on a  $i > j$  ou  $j > k$ : en effet, par contraposition, si on avait  $i \leq j$  et  $j \leq k$ , alors par transitivité on aurait  $i \leq k$ ), donc  $C = AB$  est aussi triangulaire supérieure.

- **Encore une autre.** On peut noter que l'ensemble (noté  $\mathcal{U}$  dans la suite du problème) des matrices triangulaires supérieures est en fait le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont une base est constituée par les  $\frac{n(n+1)}{2}$  matrices élémentaires  $E_{i,j}$  avec  $i \leq j$ , et que si l'on multiplie entre elles deux matrices de cette base, on obtient soit une matrice appartenant encore à cette base, soit la matrice nulle (cf. question 1.). On en déduit facilement que le sous-espace  $\mathcal{U}$  est stable par le produit matriciel.

- Quelle que soit la méthode utilisée, en posant  $C = AB$  avec  $A$  et  $B$  triangulaires supérieures, on a, pour tout  $i$ ,  $c_{i,i} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i} = a_{i,i} b_{i,i}$ , les autres termes de ce produit étant nuls puisqu'on a, soit  $i > j$ , soit  $j > i$ . Les coefficients diagonaux de la matrice produit  $AB$  sont donc les produits deux à deux des coefficients diagonaux de  $A$  et de  $B$ .

- b. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , triangulaire supérieure et inversible, soit  $u_A$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé. Alors, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , le sous-espace  $V_k = \text{Vect}(E_1, \dots, E_k)$  est stable par  $u_A$ , on a donc  $u_A(V_k) \subset V_k$ . Mais,  $A$  étant supposée inversible, l'endomorphisme  $u_A$  associé est un automorphisme de  $\mathbb{K}^n$ , il conserve donc les dimensions. Ainsi  $u_A(V_k) = V_k$ , cela signifie que, si un vecteur  $x$  appartient à  $V_k$ , alors son (unique) antécédent par  $u_A$  est aussi dans  $V_k$ , autrement dit le sous-espace  $V_k$  est aussi stable par l'endomorphisme  $u_A^{-1}$ . Comme l'endomorphisme  $u_A^{-1}$  est canoniquement représenté par la matrice inverse  $A^{-1}$ , on conclut d'après la question 3.a. que  $A^{-1}$  est triangulaire supérieure.

Enfin, puisque  $AA^{-1} = I_n$ , il résulte du **a.** que les coefficients diagonaux de  $A^{-1}$  sont les inverses (dans le même ordre) des coefficients diagonaux de  $A$ .

## PARTIE B. Opérations élémentaires du type transvection.

**5.a. Analyse.** Si une telle matrice  $T_{i,j}(\lambda)$  existe (indépendamment de la matrice  $A$  choisie), en choisissant  $A = I_n$ , on voit que  $T_{i,j}(\lambda)$  est nécessairement la matrice obtenue à partir de la matrice-identité  $I_n$  par l'opération élémentaire  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ . Le lecteur est invité à la représenter et à se convaincre que  $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ .

**Synthèse.** Réciproquement, cette matrice convient. En effet, soit  $A = (a_{k,l})$  une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , posons  $A' = (a'_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n} = (I_n + \lambda E_{i,j})A$ . De la question **2.**, on déduit que, pour tout couple  $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on a

$$a'_{k,l} = a_{k,l} + \lambda (E_{i,j}A)_{k,l} = a_{k,l} + \lambda E_k^\top E_{i,j} A E_l = a_{k,l} + \lambda (E_k^\top E_i)(E_j^\top A E_l) = a_{k,l} + \lambda \delta_{k,i} a_{j,l}.$$

Sur toutes les lignes autres que la  $i$ -ième, les coefficients de  $A'$  sont les mêmes que ceux de  $A$ . Sur la  $i$ -ième, on a ajouté  $\lambda$  fois le coefficient correspondant de la  $j$ -ième ligne (puisque  $a'_{i,l} = a_{i,l} + \lambda a_{j,l}$ ), donc  $A'$  est bien la matrice qui se déduit de  $A$  par l'opération de transvection  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ .

**b.** Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , notons  $A_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$  la matrice carrée d'ordre  $k$  extraite de  $A$  en ne conservant que ses  $k$  premières lignes et  $k$  premières colonnes, ainsi  $\Delta_k(A) = \det(A_k)$ .

Si  $k < i$ , l'opération  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$  ne modifie pas la matrice extraite  $A_k$  donc  $A'_k = A_k$  puis l'égalité des déterminants. Si  $k \geq i$ , la matrice  $A'_k$  se déduit de la matrice  $A_k$  par la même opération de transvection  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$  dont on sait qu'elle ne modifie pas le déterminant. Si  $k \geq i$ , on le retrouve aussi en écrivant que  $A'_k = (I_k + \lambda (E_{i,j})_k) A_k$ , où  $(E_{i,j})_k$  est une matrice élémentaire, mais ici carrée d'ordre  $k$ , et en disant que le déterminant du produit vaut le produit des déterminants.

**6.** On a  $(I_n + \lambda E_{i,j})(I_n - \lambda E_{i,j}) = I_n + \lambda E_{i,j} - \lambda E_{i,j} - \lambda^2 (E_{i,j})^2 = I_n$  puisque  $(E_{i,j})^2 = 0_n$  vu que  $i > j$ . Ainsi,  $T_{i,j}(\lambda)$  est inversible (ce que l'on savait déjà) et  $(T_{i,j}(\lambda))^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$ .

**7.** Chaque matrice  $T_{i_k, j_k}(\lambda_k)$ , avec  $1 \leq k \leq m$ , est triangulaire inférieure de coefficients diagonaux égaux à 1. Par une récurrence immédiate sur  $m$ , on déduit de la question **4.a.** que le produit de  $m$  matrices de cette forme est encore triangulaire inférieure avec des coefficients diagonaux qui valent 1. Il est évident que, dans la question **4.**, on peut remplacer partout "triangulaire supérieure" par "triangulaire inférieure".

**8.** En effectuant successivement les opérations élémentaires  $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ , puis  $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ , et enfin  $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$ , on transforme la matrice  $A$  en une matrice triangulaire supérieure

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ D'après la question 5.a., on a donc obtenu } U \text{ en multipliant } A$$

à gauche par  $P = T_{2,1}(-2)$ , puis par  $Q = T_{3,1}(-2)$ , et enfin par  $R = T_{3,2}(-4)$ , ainsi  $U = RQP A$ . On en tire  $A = (RQP)^{-1} U = LU$ , avec

$$L = (RQP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}R^{-1} = T_{2,1}(2) \cdot T_{3,1}(2) \cdot T_{3,2}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

et cette matrice  $L$  est bien un produit de trois matrices de transvection. Notons que  $L$  est triangulaire inférieure avec des coefficients diagonaux égaux à 1 comme on pouvait s'y attendre d'après la question 7.

### PARTIE C. La décomposition LU.

9. Si  $A$  est inversible et  $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$ , alors les matrices  $L_1, L_2, U_1$  et  $U_2$  sont toutes inversibles. L'égalité  $L_1 U_1 = L_2 U_2$  peut alors s'écrire  $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1}$ . Mais la question 4. montre que les ensembles  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{U}$  sont tous deux stables par le produit matriciel. Elle montre aussi que toute matrice appartenant à  $\mathcal{L}$  est inversible avec un inverse appartenant à  $\mathcal{L}$ . Et elle montre enfin que, si une matrice de  $\mathcal{U}$  est inversible, alors son inverse est dans  $\mathcal{U}$ .

On déduit de tout cela que  $L_2^{-1} L_1 \in \mathcal{L}$  et que  $U_2 U_1^{-1} \in \mathcal{U}$ . L'égalité entre ces deux matrices montre alors que  $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} = I_n$  puisqu'il est immédiat que  $\mathcal{L} \cap \mathcal{U} = \{I_n\}$ . On a donc  $L_1 = L_2$  et  $U_1 = U_2$ .

On vient donc de montrer qu'une matrice inversible admet **au plus une** décomposition LU, c'est donc une propriété d'**unicité**.

10. Une recherche systématique des décompositions LU de la matrice  $N$ , sous la forme  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$  avec  $a, b, c, d$  réels, conduit aux conditions  $b = 0$ ,  $c = 1$ ,  $d = -a$  avec  $a$  quelconque. On a donc  $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ , où  $a$  est un réel quelconque, ce qui donne une infinité de décompositions LU différentes pour la matrice  $N$ . Ceci ne contredit pas la question précédente puisque  $N$  n'est pas inversible.

11. Si  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c \\ ab & ac+d \end{pmatrix}$ , alors  $b = 0$  et  $ab = 2$ , ce qui est contradictoire. La matrice  $A$  proposée n'admet donc pas de décomposition LU.

Soit  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ . La recherche systématique des décompositions LU de la

matrice  $A$ , avec les mêmes notations que ci-dessus, conduit au système (S): 
$$\begin{cases} b = \alpha \\ c = \beta \\ ab = \gamma \\ ac + d = \delta \end{cases}.$$

- si  $\alpha = 0$  et  $\gamma \neq 0$ , alors ce système n'a pas de solution ;

- si  $\alpha$  et  $\gamma$  sont nuls, on peut prendre  $a$  quelconque, alors  $b = \alpha$ ,  $c = \beta$  et  $d = \delta - a\beta$ , la matrice  $A$  a alors une infinité de décompositions LU, comme dans la question 10.

- si  $\alpha \neq 0$ , le système (S) admet pour unique solution  $b = \alpha$ ,  $c = \beta$ ,  $a = \frac{\gamma}{\alpha}$ ,  $d = \delta - \frac{\gamma\beta}{\alpha}$ , et la matrice  $A$  admet une unique décomposition LU.

Une matrice carrée d'ordre deux  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  admet donc (au moins) une décomposition LU si et seulement si  $((\alpha \neq 0) \text{ ou } (\alpha = 0 \text{ et } \gamma = 0))$ .

- 12.a. D'abord,  $\Delta_1(A) = a_{1,1}$  est non nul, on peut donc annuler tous les coefficients de la première colonne (sauf le premier) par les opérations de transvection  $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$ , où  $2 \leq i \leq n$ . Ceci amorce une récurrence sur les numéros de colonnes.

Soit  $j \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ , supposons que, par des opérations de transvection, on ait réussi à annuler les coefficients en-dessous de la diagonale sur les  $j-1$  premières colonnes de  $A$ . La matrice obtenue est de la forme

$$\begin{pmatrix} a'_{1,1} & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & (\times) \\ \vdots & \ddots & a'_{j-1,j-1} & & & \\ \vdots & & 0 & a'_{j,j} & & \\ \vdots & & \vdots & (\times) & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & (\times) & & a'_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Le  $j$ -ième mineur principal, **qui n'a pas été modifié par les opérations précédentes** d'après la question 5.b., est non nul par hypothèse, et il vaut d'autre part  $a'_{1,1} \cdots a'_{j,j}$  puisque c'est le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure. On en déduit notamment que le coefficient diagonal  $a'_{j,j}$  est non nul, ce qui permet d'annuler les coefficients en-dessous de la

diagonale sur la  $j$ -ième colonne par les transvections  $L_i \leftarrow L_i - \frac{a'_{i,j}}{a'_{j,j}} L_j$ , où  $j+1 \leq i \leq n$ . Cela prouve l'hérédité. Après  $n-1$  itérations, on a obtenu une matrice triangulaire supérieure.

- b. Soit  $U$  la matrice triangulaire supérieure obtenue à partir de  $A$  par les opérations de transvection décrites en a. D'après 5.a., chaque opération élémentaire sur les lignes équivaut à multiplier à gauche par une matrice de transvection, on a donc  $U = T_k \cdots T_1 A$ , si  $k$  est le nombre d'opérations sur les lignes effectuées. Donc  $A = LU$ , en posant  $L = (T_k \cdots T_1)^{-1} = T_1^{-1} \cdots T_k^{-1}$ . Chacune des matrices  $T_i$ , avec  $1 \leq i \leq k$ , appartient à  $\mathcal{L}$ , donc  $L \in \mathcal{L}$ , cf. explications en question 7. Ainsi,  $A$  admet au moins une décomposition LU.
- c. Le  $n$ -ième mineur principal de la matrice  $A$  (c'est-à-dire le déterminant de la matrice  $A$  elle-même) est par hypothèse non nul, donc  $A$  est inversible. Elle admet donc au plus une décomposition LU d'après la question 9.
- d. Le nombre de transvections nécessaires pour transformer  $A$  en  $U$  est  $(n-1) + (n-2) + \cdots + 1$ , soit  $\frac{n(n-1)}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{2}$ . Mais chaque opération élémentaire sur les lignes modifie  $n$  coefficients scalaires, le nombre d'opérations arithmétiques (addition, multiplication, division) sur des scalaires est donc de l'ordre de  $n^3$ . La complexité du calcul est  $O(n^3)$ .

#### PARTIE D. Cas d'une matrice tridiagonale.

13. On a  $\delta_1 = b_1$  puis, pour  $k \geq 2$ , un développement par rapport à la dernière ligne suivi d'un développement par rapport à la dernière colonne (ou l'inverse) donnent la relation

$$\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket \quad \delta_k = b_k \delta_{k-1} - a_k c_{k-1} \delta_{k-2}.$$

14. On a bien  $L \in \mathcal{L}$  et  $U \in \mathcal{U}$ . Effectuons le produit  $LU$  ligne par ligne. C'est une question très technique et les calculs n'ont pas tous été détaillés afin de ne pas heurter les plus sensibles de nos lectrices et lecteurs. Sur la première ligne, on trouve bien

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_0} & c_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

soit la première ligne de la matrice  $A$ . Soit maintenant  $i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ . Le calcul de la  $i$ -ième ligne du produit  $LU$  ne fait intervenir que la  $i$ -ième ligne de  $L$ , dont les seuls coefficients non nuls sont en  $(i-1)$ -ième et en  $i$ -ième positions. Seules interviendront donc dans ce calcul les lignes numéros  $i-1$  et  $i$  de la matrice  $U$ , qui chacune comportent deux coefficients non nuls. On trouve alors comme  $i$ -ième ligne de la matrice-produit:

$$\left( 0 \quad \cdots \quad 0 \quad l_i \frac{\delta_{i-1}}{\delta_{i-2}} \quad l_i c_{i-1} + \frac{\delta_i}{\delta_{i-1}} \quad c_i \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \right),$$

les trois coefficients non nuls mentionnés étant respectivement en positions  $i-1$ ,  $i$  et  $i+1$ , soit  $(0 \quad \cdots \quad 0 \quad a_i \quad b_i \quad c_i \quad 0 \quad \cdots \quad 0)$ , si l'on tient compte de la définition de  $l_i$  et de la relation  $a_i c_{i-1} \delta_{i-2} + \delta_i = b_i \delta_{i-1}$  qui résulte de la question précédente. On a donc retrouvé la  $i$ -ième ligne de la matrice  $A$ . Enfin, le calcul est le même sur la  $n$ -ième et dernière ligne, à la seule différence près qu'il n'y a pas de coefficient  $c_n$  à droite de la diagonale.

On a donc vérifié la relation  $A = LU$ , ce qui achève cette question ainsi que celles et ceux qui avaient survécu jusqu'ici.

- 15.** On a  $(S) \iff (LU)X = Y \iff L(UX) = Y$ . On commence par résoudre le système  $(S1)$ :  $LZ = Y$ , où l'inconnue est  $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^n$ , et  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  est donné. Mais ce système est triangulaire et se résout en cascade:

$$(S1) \iff \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ l_2 & 1 & & & & \\ & l_3 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & l_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} z_1 & = y_1 \\ l_2 z_1 + z_2 & = y_2 \\ \dots & = \dots \\ l_n z_{n-1} + z_n & = y_n \end{cases}.$$

En partant de la première équation et par substitutions successives, on voit que le nombre d'opérations arithmétiques élémentaires (ici, multiplications et soustractions) est  $2(n-1)$ , donc un  $O(n)$ . On a ainsi obtenu  $Z = L^{-1}Y$ .

On résout ensuite le système  $(S2)$ :  $UX = Z$ , d'inconnue  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ . Ce système est aussi triangulaire avec au plus deux coefficients non nuls sur chaque ligne, il se résout donc aussi en cascade, mais en partant de la dernière équation puis par substitutions successives. Le nombre d'opérations arithmétiques élémentaires (ici, soustractions et divisions) est encore  $2(n-1)$ , donc encore un  $O(n)$ . On obtient ainsi, en temps linéaire, le vecteur  $X = U^{-1}Z = U^{-1}L^{-1}Y = (LU)^{-1}Y = A^{-1}Y$ , i.e. l'unique solution du système de Cramer  $(S)$ :  $AX = Y$ .

On notera par ailleurs que, la matrice tridiagonale  $A$  étant donnée, le calcul des matrices  $L$  et  $U$  de sa décomposition LU se fait aussi en un temps  $O(n)$ .