

RÉDUCTION des ENDOMORPHISMES

I. Éléments propres.

1. Notion de vecteur propre.

Définition 1. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On appelle **vecteur propre** de u tout vecteur x **non nul** de E tel que $u(x)$ soit colinéaire à x .

Ainsi, x est vecteur propre de u si et seulement si $x \neq 0_E$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. On peut préciser que ce scalaire λ est alors unique (le vecteur x étant non nul, si on a $\lambda x = \mu x$ alors $\lambda = \mu$), on l'appellera **valeur propre** de u associée au vecteur x , on y reviendra plus en détail dans le paragraphe suivant.

Exemple 1. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. Soit D l'**opérateur de dérivation**, i.e. l'application de E vers E qui, à toute fonction f associe sa dérivée $f' = D(f)$. Ainsi défini, D est un endomorphisme de E , et ses vecteurs propres sont les fonctions non nulles f de E telles que f' soit colinéaire à f , autrement dit "les fonctions exponentielles" ou, pour être plus précis, les fonctions de la forme $x \mapsto C e^{\lambda x}$ avec $C \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exemple 2. Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites complexes. Soit T l'**opérateur de translation**, i.e. l'application de E vers E qui, à toute suite $u = (u_n)$ associe sa "translatée" $v = T(u)$ définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1}$. Ainsi défini, T est un endomorphisme de E , et ses vecteurs propres sont les suites non nulles u de E pour lesquelles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \lambda u_n$, autrement dit "les suites géométriques" ou, pour être plus précis, les suites (u_n) de la forme $u_n = C r^n$ avec $C \in \mathbb{C}^*$ et $r \in \mathbb{C}$.

Exercice I.1.1. Soit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (-y, x) \end{cases}$. Montrer que cet endomorphisme

f de $\mathbb{R}^2$ n'admet pas de vecteur propre. Écrire la matrice canoniquement associée. Donner une interprétation géométrique de f . Si l'on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{C}^2$ défini par la même formule de calcul, admet-il des vecteurs propres ? $\square$

Exercice I.1.2. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E . On suppose que tout vecteur non nul de E est vecteur propre de u . Montrer que u est une homothétie, i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \text{id}_E$. $\square$

Proposition. Soit u un endomorphisme de E . Un vecteur x non nul de E est vecteur propre de u si et seulement si la droite vectorielle $D = \text{Vect}(x)$ est stable par u .

Preuve. • Si x est vecteur propre de u , alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Si $y \in D$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $y = \alpha x$. Par linéarité de u , on a alors $u(y) = u(\alpha x) = \alpha u(x) = \alpha \lambda x \in D$, donc D est stable par u .

• Si D est stable par u , comme $x \in D$, on doit avoir $u(x) \in D$, donc il existe λ scalaire tel que $u(x) = \lambda x$, et x est bien un vecteur propre de u .

Rechercher les vecteurs propres d'un endomorphisme, c'est donc rechercher les droites vectorielles de E stables par cet endomorphisme. La droite engendrée par le vecteur non nul x est parfois notée $\mathbb{K}x$ au lieu de $\text{Vect}(x)$.

Définition 1bis. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, on appelle **vecteur propre** de A toute matrice-colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, **non nulle**, telle que AX soit colinéaire à X .

Ainsi, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est vecteur propre de A si et seulement si $X \neq 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$. Ce scalaire λ est alors unique, on l'appellera **valeur propre** de A associée au vecteur X . En fait, en identifiant classiquement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^n$, les vecteurs propres de A sont les vecteurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A .

2. Notion de valeur propre.

Définition 2. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On appelle **valeur propre** de u tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel il existe un vecteur x de E **non nul** tel que $u(x) = \lambda x$.

Bien sûr, le vecteur x mentionné dans la définition est alors un **vecteur propre** de u “pour la valeur propre λ ”. Et tout vecteur de E , non nul et colinéaire à x , est aussi vecteur propre de u associé à cette valeur propre λ . On dit parfois que (λ, x) est un **couple propre** de l'endomorphisme u .

Caractérisation. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si et seulement si l'endomorphisme $u - \lambda \text{id}_E$ est non injectif.

En effet, la définition 2 ci-dessus signifie que λ est valeur propre de u si et seulement si $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

Définition. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel **de dimension finie**, l'ensemble des valeurs propres de u est appelé **spectre** de u , et noté $\text{Sp}(u)$. Ainsi,

$$\text{Sp}(u) = \{ \lambda \in \mathbb{K} \mid \exists x \in E \setminus \{0_E\} \quad u(x) = \lambda x \}.$$

Remarque (hors programme, pour la culture). On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur spectrale** de u lorsque l'endomorphisme $u - \lambda \text{id}_E$ est non bijectif. Le **spectre** de u est défini comme étant l'ensemble des valeurs spectrales de u . En dimension finie, les notions de valeur spectrale et de valeur propre coïncident, ce qui autorise à appeler spectre l'ensemble des valeurs propres.

Exercice I.2.1. Soit $E = \mathbb{K}[X]$, soit Φ l'endomorphisme de E défini par $\Phi(P) = XP$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que Φ n'admet aucune valeur propre. Montrer que tout scalaire est valeur spectrale de Φ . $\square$

Définition 2bis. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, on appelle **valeur propre** de A tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel il existe une matrice-colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, **non nulle**, telle que $AX = \lambda X$.

Ainsi, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement s'il est valeur propre de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A .

Comme une matrice carrée représente toujours un endomorphisme d'un espace vectoriel **de dimension finie**, on pourra appeler **spectre** de A , et noter $\text{Sp}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de la matrice A .

Attention! Si A est une matrice carrée à coefficients réels, alors elle est aussi à coefficients complexes puisque les réels sont des complexes particuliers. Mais, suivant le choix du corps $\mathbb{K}$, elle ne représente pas (canoniquement) le même endomorphisme. On distinguera donc son **spectre réel**, noté $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$, et son **spectre complexe**, noté $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Exemple. Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, alors que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$.

Cas de la dimension finie. On peut utiliser le déterminant pour caractériser les automorphismes (ou les matrices carrées inversibles), on a donc les équivalences (ce sujet sera approfondi ultérieurement avec la notion de **polynôme caractéristique**):

- Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E **de dimension finie**, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors
 $\lambda \in \text{Sp}(u) \iff u - \lambda \text{id}_E \text{ non injectif} \iff u - \lambda \text{id}_E \notin \text{GL}(E) \iff \det(u - \lambda \text{id}_E) = 0$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors
 $\lambda \in \text{Sp}(A) \iff A - \lambda I_n \text{ non inversible} \iff A - \lambda I_n \notin \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A - \lambda I_n) = 0$.

On notera qu'une matrice carrée A est inversible si et seulement si $0 \notin \text{Sp}(A)$.

Un exemple utile. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $s \in \mathbb{K}$. On suppose que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = s$$

(sur chaque ligne de la matrice A , la somme des coefficients garde une valeur constante s).

Alors $s \in \text{Sp}(A)$, et un vecteur propre de A associé à la valeur propre s est $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
 Le lecteur vérifiera que $AV = sV$.

Proposition. Deux matrices semblables ont le même spectre. Une matrice carrée et sa transposée ont le même spectre.

Preuve. • Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables, soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Il existe alors un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AX = \lambda X$. Par ailleurs, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. En posant $Y = P^{-1}X$, on a $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, non nul, et

$$BY = P^{-1}APP^{-1}X = P^{-1}AX = P^{-1}(\lambda X) = \lambda P^{-1}X = \lambda Y,$$

donc $\lambda \in \text{Sp}(B)$, et Y est un vecteur propre associé. Ainsi, $\text{Sp}(A) \subset \text{Sp}(B)$. L'inclusion réciproque se traite de la même façon. Le spectre d'une matrice est donc invariant par similitude.

- Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$, alors $\det(A - \lambda I_n) = 0$, donc $\det(A^\top - \lambda I_n) = \det((A - \lambda I_n)^\top) = 0$, donc $\lambda \in \text{Sp}(A^\top)$. Réciproque immédiate. Finalement, $\text{Sp}(A^\top) = \text{Sp}(A)$.

3. Notion de sous-espace propre.

Définition 3. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u . On appelle **sous-espace propre** de u associé à la valeur propre λ l'ensemble des vecteurs x de E tel que $u(x) = \lambda x$. On le note $E_\lambda(u)$.

Ainsi, $E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\} = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$.

Comme son nom l'indique, ce SEP (sous-espace propre) est un sous-espace vectoriel de E puisque c'est le noyau d'un endomorphisme.

Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est constitué des vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ , et du vecteur nul 0_E .

Remarque. La notation $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ sera étendue au cas où λ n'est pas valeur propre de u , mais dans ce cas ce sous-espace est réduit à $\{0_E\}$.

Proposition. Si λ est valeur propre de l'endomorphisme u , alors le sous-espace propre $F = E_\lambda(u)$ est stable par u , et l'endomorphisme induit u_F est une homothétie: $u_F = \lambda \text{id}_F$.

C'est immédiat!

Proposition. Si deux endomorphismes u et v de E commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Preuve. Soit λ une valeur propre de u , montrons que $F = E_\lambda(u)$ est stable par v . Soit $x \in F$, alors $u(x) = \lambda x$, puis $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$, on a donc bien $v(x) \in F$, ce qu'il fallait démontrer.

Définition 3bis. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, on appelle **sous-espaces propres** de A les sous-espaces propres de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés.

Ainsi, si $\lambda \in \text{Sp}(A)$, on a

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\} = \text{Ker}(A - \lambda I_n).$$

On qualifie d'**éléments propres** d'un endomorphisme (ou d'une matrice carrée) les valeurs propres et sous-espaces propres de cet endomorphisme (ou matrice). Lorsque l'on demande de déterminer les éléments propres d'un endomorphisme, on listera ses valeurs propres et, pour chaque valeur propre, on précisera le sous-espace propre associé. Pour cela, on pourra écrire l'**équation aux éléments propres** $u(x) = \lambda x$, ou son analogue matricielle $AX = \lambda X$, dont on recherchera les couples (λ, x) ou (λ, X) solutions, avec $x \neq 0_E$ ou $X \neq 0$.

Reprenons les exemples vus dans le paragraphe **I.1.**:

Exemple 1. Pour l'opérateur de dérivation D dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, tous les scalaires (complexes) sont valeurs propres et, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, le sous-espace propre associé est une droite vectorielle

$$E_\lambda(D) = \{f \in E \mid f' = \lambda f\} = \text{Vect}(x \mapsto e^{\lambda x}).$$

Exemple 2. Pour l'opérateur de translation T dans $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, tous les scalaires sont valeurs propres et, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, le sous-espace propre associé est une droite vectorielle

$$E_\lambda(T) = \{u = (u_n) \in E \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \lambda u_n\} = \text{Vect}((\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

4. Utilisation de polynômes annulateurs.

Notons d'abord le petit résultat suivant:

Lemme. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u , soit $x \in E$ un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ . Soit enfin $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Alors le vecteur x est aussi vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$. Autrement dit, si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Preuve. Posons $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$. On a par hypothèse $u(x) = \lambda x$. Par une récurrence immédiate, on montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \lambda^k x$. Il ne reste plus qu'à faire des combinaisons linéaires pour obtenir

$$P(u)(x) = \sum_{k=0}^d a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^d a_k \lambda^k x = \left(\sum_{k=0}^d a_k \lambda^k \right) x = P(\lambda)x,$$

d'où la conclusion.

On en déduit notamment que, si λ est valeur propre de l'endomorphisme u , alors le scalaire $P(\lambda)$ est valeur propre de l'endomorphisme $P(u)$. Bien sûr, on peut remplacer l'endomorphisme u par une matrice carrée A dans cette affirmation.

La connaissance d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme (ou d'une matrice carrée) donne des informations sur ses valeurs propres:

Proposition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u . Alors toute valeur propre de u est racine de P . On peut, dans cette affirmation, remplacer l'endomorphisme u par une matrice carrée A .

Preuve. Si λ est valeur propre de u , alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$, mais ici $P(u)$ est l'endomorphisme nul (dont la seule valeur propre est 0). Donc $P(\lambda) = 0$.

L'ensemble des valeurs propres de u est donc inclus dans l'ensemble des zéros du polynôme annulateur P , que nous noterons $\mathcal{Z}(P)$. Si l'espace vectoriel E est de dimension finie (ou si on travaille sur une matrice carrée), on peut utiliser le terme de spectre pour désigner l'ensemble des valeurs propres, on écrira donc:

$$\boxed{\text{Si } P \text{ est un polynôme annulateur de } u, \text{ alors } \text{Sp}(u) \subset \mathcal{Z}(P).}$$

Attention! Cette inclusion peut être stricte. On le comprend bien si l'on se souvient que tout multiple d'un polynôme annulateur est encore un polynôme annulateur. Par exemple, avec $A = I_n$ pour laquelle $\text{Sp}(A) = \{1\}$, le polynôme $X - 1$ est annulateur, mais le polynôme $P = (X - 1)(X - 2)$ est aussi annulateur avec $\mathcal{Z}(P) = \{1, 2\} \neq \text{Sp}(A)$.

Exemples à connaître.

(1): Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un **projecteur**, alors $p^2 - p = 0$, donc p admet pour polynôme annulateur $P = X^2 - X = X(X - 1)$, **les seules valeurs propres possibles de p sont alors 0 et 1**. On peut préciser que les valeurs propres de p sont exactement 0 et 1, sauf dans deux cas particuliers: $p = 0$ dont la seule valeur propre est 0, et $p = \text{id}_E$ dont la seule valeur propre est 1.

(2): Si $s \in \mathcal{L}(E)$ est une **symétrie**, alors $s^2 - \text{id}_E = 0$, donc s admet pour polynôme annulateur $P = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$, **les seules valeurs propres possibles de s sont alors -1 et 1**. On peut préciser que les valeurs propres de s sont exactement -1 et 1, sauf dans deux cas particuliers: $s = \text{id}_E$ dont la seule valeur propre est 1, et $s = -\text{id}_E$ dont la seule valeur propre est -1.

(3): Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est **nilpotent**, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$, donc f admet pour polynôme annulateur $P = X^k$, **la seule valeur propre possible de f est alors 0**. De plus, 0 est effectivement valeur propre de f car, si ce n'était pas le cas, l'endomorphisme f serait injectif, donc f^k le serait aussi (une composée d'applications injectives est injective), ce qui est absurde puisque f^k est l'endomorphisme nul.

Exercice I.4.1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, autrement dit

$a_{1,n} = a_{2,1} = a_{3,2} = \cdots = a_{n,n-1} = 1$ et tous les autres coefficients sont nuls. Calculer A^n . En déduire que $\text{Sp}(A) \subset \mathcal{U}_n$ où $\mathcal{U}_n$ est l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

Montrer ensuite que $\text{Sp}(A) = \mathcal{U}_n$ et expliciter les sous-espaces propres de A (considérée comme matrice complexe).

5. Propriétés des sous-espaces propres.

Théorème. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont des valeurs propres de u deux à deux distinctes, alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$, avec $1 \leq i \leq m$, sont en somme directe.

On retiendra éventuellement cet énoncé raccourci:

Les sous-espaces propres sont en somme directe.

Preuve. Supposons que le vecteur nul admette une décomposition **(1)**: $0_E = x_1 + \dots + x_m$ avec $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Pour tout i , on a alors $u(x_i) = \lambda_i x_i$ et, si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme, alors $P(u)(x_i) = P(\lambda_i)x_i$ d'après le paragraphe précédent ("lemme"). En appliquant l'endomorphisme $P(u)$ à **(1)**, on obtient alors la relation **(2)**: $0_E = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i)x_i$.

Fixons maintenant un indice $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, soit le polynôme de Lagrange $L_j = \prod_{i \neq j} \left(\frac{X - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} \right)$.

Ce polynôme est tel que $L_j(\lambda_j) = 1$, et $L_j(\lambda_i) = 0$ pour tout $i \neq j$. En choisissant $P = L_j$ dans la relation **(2)**, on obtient $0_E = \sum_{i=1}^m L_j(\lambda_i)x_i = x_j$. Les composantes x_j de la décomposition **(1)** sont donc toutes nulles, ce qu'il fallait démontrer.

Deux petits rappels sur la notion de somme directe de m sous-espaces, c'est une notion sur laquelle plusieurs confusions sont fréquentes:

Remarque. Je rappelle que dire que m sous-espaces F_i , $1 \leq i \leq m$, sont en somme directe, ne signifie pas que la somme de ces m sous-espaces est l'espace E tout entier, c'est une confusion fréquente!

Le théorème ci-dessus a plusieurs conséquences importantes.

Conséquence 1. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admet au plus n valeurs propres.

Preuve. Si $\dim(E) = n$, et si $u \in \mathcal{L}(E)$ admet $n+1$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$, alors chaque sous-espace propre $E_{\lambda_i}(u)$ est de dimension au moins 1 (sinon, λ_i ne serait pas valeur propre de u), et les sous-espaces $E_{\lambda_i}(u)$, avec $1 \leq i \leq n+1$, sont en somme

directe. Alors $S = \bigoplus_{i=1}^{n+1} E_{\lambda_i}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E et, la somme étant directe,

$$\dim(S) = \sum_{i=1}^{n+1} \dim(E_{\lambda_i}(u)) \geq \sum_{i=1}^{n+1} 1 = n+1 > n = \dim(E),$$

ce qui est absurde.

Si E est de dimension finie, on a donc

$$\text{Card}(\text{Sp}(u)) \leq \dim(E).$$

Bien sûr, une traduction matricielle est:

$$\boxed{\text{Si } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{ alors } \text{Card}(\text{Sp}(A)) \leq n.}$$

Conséquence 2. Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n , alors la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut au plus n .

Preuve. On sait maintenant que le spectre de u est un ensemble fini, on peut donc indexer par cet ensemble. Soit $S = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. On a $\dim(S) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u))$ car on sait que la somme est directe. Mais S est un sous-espace de E , donc $\dim(S) \leq n$. On obtient bien l'inégalité voulue, à savoir

$$\boxed{\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) \leq \dim(E).}$$

Et voici la traduction matricielle:

$$\boxed{\text{Si } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{ alors } \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) \leq n.}$$

Voici une autre formulation du théorème donné au début de ce paragraphe:

Proposition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient $x_1, \dots, x_m$ des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. Alors la famille $(x_1, \dots, x_m)$ est libre.

Preuve. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres associées aux vecteurs $x_1, \dots, x_m$ respectivement. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ des scalaires. Supposons que $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0_E$, on dispose alors d'une décomposition du vecteur nul suivant la somme directe $\bigoplus_{i=1}^m E_{\lambda_i}(u)$, chaque composante doit donc être nulle, i.e. $\alpha_i x_i = 0_E$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Mais, pour tout i , $x_i \neq 0_E$ puisque c'est un vecteur propre. Donc $\alpha_i = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice I.5.1. On travaille dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a. Pour tout k entier naturel, soit la fonction $c_k : x \mapsto \cos(kx)$. Montrer que, pour tout n entier naturel, la famille $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ est libre.

b. Pour tout k entier naturel non nul, soit la fonction $s_k : x \mapsto \sin(kx)$. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, la famille $(c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \dots, c_n, s_n)$ est libre. $\square$

II. Le polynôme caractéristique.

1. Définition et premières propriétés.

Commençons par traiter le cas d'une matrice carrée.

Théorème. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n . Alors l'application

$$\chi_A : \begin{cases} \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto \det(xI_n - A) \end{cases}$$

est polynomiale, unitaire de degré n , et le coefficient de x^{n-1} est $-\text{tr}(A)$.

La démonstration se fait par récurrence sur n , mais nécessite un lemme un peu technique.

Lemme. Soient n^2 fonctions polynomiales notées $a_{i,j} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ avec $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Soit l'application $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{K} \quad f(x) = \det(A(x)) = \det(a_{i,j}(x)) = \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & \cdots & a_{1,n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(x) & \cdots & a_{n,n}(x) \end{vmatrix}.$$

Alors cette application f est polynomiale, de degré au plus égal à $\sum_{j=1}^n \left(\max_{1 \leq i \leq n} \deg(a_{i,j}) \right)$.

Preuve du lemme. Par récurrence sur n aussi. Introduisons d'abord les notations. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on note $A(x)$ la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont les $a_{i,j}(x)$. Si on fixe un couple $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on notera $A'_{i,j}(x)$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue à partir de $A(x)$ en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne. Enfin, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $D_j = \max_{1 \leq i \leq n} \deg(a_{i,j})$, c'est le maximum des degrés des fonctions polynomiales situées sur la j -ième colonne de A .

- Initialisation pour $n = 1$, c'est évident car alors $A(x) = (a_{1,1}(x))$, et $f(x) = a_{1,1}(x)$ est polynomiale de degré $D_1 = \deg(a_{1,1})$.
- Hérédité. Soit $n \geq 2$, supposons le lemme vrai au rang $n-1$, soit $A(x)$ d'ordre n . On développe le déterminant $f(x)$ par rapport à la dernière colonne:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} a_{i,n}(x) \det(A'_{i,n}(x)).$$

L'hypothèse de récurrence affirme que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application $x \mapsto \det(A'_{i,n}(x))$ est polynomiale de degré au plus $\sum_{j=1}^{n-1} D_j$. Comme chaque fonction $a_{i,n}$ est polynomiale de degré au plus D_n , par opérations sur les polynômes, on déduit que f est polynomiale de degré au plus $\sum_{j=1}^{n-1} D_j + D_n = \sum_{j=1}^n D_j$, ce qui achève la récurrence.

Preuve du théorème. De nouveau par récurrence sur n donc.

- Pour $n = 1$, on a $A = (a) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}$, et $\chi_A(x) = \det(xI_1 - A) = x - a = x - \text{tr}(A)$.
- Hérédité: supposons la propriété vraie au rang $n-1$ avec $n \geq 2$ donné, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x - a_{1,1} & \cdots & -a_{1,n-1} & -a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1,1} & \cdots & x - a_{n-1,n-1} & -a_{n-1,n} \\ -a_{n,1} & \cdots & -a_{n,n-1} & x - a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Développons par rapport à la dernière colonne: en posant $B'_{i,j}(x)$ la matrice obtenue à partir de $B(x) = xI_n - A$ en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne, on obtient

$$(*) \quad \chi_A(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n+1} a_{i,n} \det(B'_{i,n}(x)) + (x - a_{n,n}) \det(B'_{n,n}(x)).$$

Pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, la matrice $B'_{i,n}(x)$ a tous ses coefficients constants (i.e. de degré 0) sur la i -ième colonne, ceux des autres colonnes étant polynomiaux de degré au plus 1, on déduit alors du lemme que l'application $x \mapsto \det(B'_{i,n}(x))$ est polynomiale de degré au plus

$n-2$. L'application $R : x \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n+1} a_{i,n} \det(B'_{i,n}(x))$ est donc polynomiale de degré au plus $n-2$.

D'autre part, $B'_{n,n}(x) = xI_{n-1} - A'_{n,n}$ (notation introduite dans la preuve du lemme), donc $\det(B'_{n,n}(x)) = \chi_{A'_{n,n}}(x)$. De l'hypothèse de récurrence, on déduit alors que

$$\det(B'_{n,n}(x)) = x^{n-1} - \operatorname{tr}(A'_{n,n}) x^{n-2} + S(x),$$

où l'application S est polynomiale de degré au plus $n-3$. En reprenant (*), on a

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= (x - a_{n,n}) \left(x^{n-1} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,n} \right) x^{n-2} + S(x) \right) + R(x) \\ &= x^n - \operatorname{tr}(A) x^{n-1} + T(x), \end{aligned}$$

où T est polynomiale de degré au plus $n-2$. C'est ce que l'on souhaitait obtenir au rang n pour achever la récurrence.

Conformément au programme, le corps $\mathbb{K}$ est, soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$, c'est donc un ensemble infini, ce qui permet de confondre polynôme et application polynomiale associée.

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n . Le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ associé à la fonction polynomiale $x \mapsto \det(xI_n - A)$ est appelé **polynôme caractéristique** de la matrice A , et noté χ_A .

Il est donc caractérisé par sa relation de définition:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{K} \quad \chi_A(x) = \det(xI_n - A)}.$$

Son coefficient constant est $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$. En réunissant les informations dont nous disposons, nous pouvons écrire une forme développée du polynôme caractéristique de la matrice A :

$$\boxed{\chi_A = X^n - \operatorname{tr}(A) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)}.$$

Bien sûr, tout n'est pas explicité. Les termes "intermédiaires" (remplacés par des points de suspension) font intervenir des coefficients dont l'interprétation est moins évidente et que nous n'étudierons pas.

Exemple fondamental. Pour $n = 2$, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors

$$\chi_A(x) = \det(xI_2 - A) = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + (ad-bc),$$

donc

$$\boxed{\text{si } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), \text{ alors } \chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)}.$$

Exemple fondamental aussi. Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure ou inférieure, alors

$$\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - a_{i,i}).$$

Cela résulte tout simplement du fait que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Proposition. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Preuve. Si A et B , dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, sont semblables, on a $B = P^{-1}AP$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, donc pour tout scalaire x , on a $xI_n - B = P^{-1}(xI_n - A)P$, i.e. les matrices $xI_n - A$ et $xI_n - B$ sont elles aussi semblables, donc elles ont le même déterminant. Le polynôme caractéristique est donc invariant par similitude.

Proposition. Une matrice carrée et sa transposée ont le même polynôme caractéristique.

Preuve. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $x \in \mathbb{K}$. Alors

$$\chi_{A^\top}(x) = \det(xI_n - A^\top) = \det((xI_n - A)^\top) = \det(xI_n - A) = \chi_A(x),$$

puisque une matrice et sa transposée ont le même déterminant.

Nous pouvons maintenant définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie.

Définition. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension n . Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Alors le polynôme caractéristique de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$, on l'appelle **polynôme caractéristique** de l'endomorphisme u , et on le note χ_u .

En effet, si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E , alors les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ sont semblables donc elles ont le même polynôme caractéristique.

On a, bien sûr,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{K} \quad \chi_u(x) = \det(x \text{id}_E - u)}.$$

Si $\dim(E) = n$, le polynôme caractéristique χ_u est unitaire de degré n , et plus précisément,

$$\boxed{\chi_u = X^n - \text{tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)}.$$

2. Lien avec les valeurs propres.

Proposition. Les valeurs propres d'une matrice carrée (ou d'un endomorphisme en dimension finie) sont exactement les racines de son polynôme caractéristique.

En effet, $\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \lambda I_n - A \notin \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(\lambda I_n - A) = 0 \iff \chi_A(\lambda) = 0$.

On a donc $\boxed{\text{Sp}(A) = \mathcal{Z}(\chi_A)}$ ou $\boxed{\text{Sp}(u) = \mathcal{Z}(\chi_u)}$.

De ce résultat, on tire quelques conséquences importantes:

Conséquence 1. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

En effet, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire, alors $\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - a_{i,i})$.

Conséquence 2. Une matrice carrée d'ordre n (ou un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n) a au plus n valeurs propres.:

$\text{Card}(\text{Sp}(A)) \leq n$ si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ou bien $\text{Card}(\text{Sp}(u)) \leq \dim(E)$ si $u \in \mathcal{L}(E)$.

On a déjà obtenu ce résultat dans le paragraphe I.5., on le retrouve ici en disant qu'un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Conséquence 3. Une matrice carrée a au moins une valeur propre complexe, un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie a au moins une valeur propre.

C'est une conséquence du théorème de d'Alembert-Gauss qui affirme que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.

Attention! Un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension infinie peut n'avoir aucune valeur propre, c'est le cas par exemple de l'endomorphisme Φ de $\mathbb{C}[X]$ défini par $\Phi(P) = XP$.

Conséquence 4. Une matrice carrée réelle d'ordre impair a au moins une valeur propre réelle, un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension impaire a au moins une valeur propre.

C'est une conséquence du fait que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle. On peut retrouver ce résultat du cours de 1ère année, soit en passant par la factorisation du polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, soit en appliquant une généralisation du théorème des valeurs intermédiaires à la fonction polynomiale associée sur $\mathbb{R}$ (elle est continue, et elle tend vers $-\infty$ en $-\infty$, et vers $+\infty$ en $+\infty$).

3. Notion de multiplicité d'une valeur propre.

Définition. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ou d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie. On appelle **multiplicité** de cette valeur propre sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique χ_A ou χ_u .

On note souvent m_λ cette multiplicité. On a donc

$$(X - \lambda)^{m_\lambda} | \chi_A, \quad \text{et} \quad (X - \lambda)^{m_\lambda + 1} \nmid \chi_A,$$

ou encore $\chi_A = (X - \lambda)^{m_\lambda} Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(\lambda) \neq 0$.

Proposition. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, soit F un s.e.v. de E stable par u , notons u_F l'endomorphisme induit. Alors $\chi_{u_F} | \chi_u$: le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit divise le polynôme caractéristique de u .

Preuve. Notons n et p les dimensions de E et F respectivement, soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F . On sait que la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$ est

triangulaire supérieure par blocs, de la forme $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$. Alors, pour $x \in \mathbb{K}$, $xI_n - M = \begin{pmatrix} xI_p - A & -B \\ 0 & xI_{n-p} - D \end{pmatrix}$, et un calcul de déterminants par blocs donne

$$\chi_M(x) = \det(xI_n - M) = \det(xI_p - A) \det(xI_{n-p} - D) = \chi_A(x) \chi_D(x).$$

On a donc l'identité $\chi_M = \chi_A \chi_D$ dans $\mathbb{K}[X]$ et, comme $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u_F)$ avec $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_p)$, on a $\chi_M = \chi_u$ et $\chi_A = \chi_{u_F}$. On a bien prouvé que le polynôme caractéristique de u_F divise celui de u .

Proposition. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie, soit m_λ sa multiplicité. On a alors l'encadrement

$$1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda.$$

Même chose en remplaçant u par une matrice carrée A .

Preuve. Posons $F = E_\lambda(u)$, et $d = \dim(F)$.

L'inégalité de gauche ($d \geq 1$) exprime simplement le fait que λ est valeur propre de u .

On sait que F est stable par u et que l'endomorphisme induit est une homothétie: $u_F = \lambda \text{id}_F$. L'endomorphisme u_F est donc représenté (dans n'importe quelle base de F) par la matrice λI_d , et son polynôme caractéristique est $\chi_{u_F} = (X - \lambda)^d$. La proposition précédente nous dit que $(X - \lambda)^d | \chi_u$, ce qui signifie précisément que la multiplicité de la valeur propre λ est au moins égale à d , on a donc prouvé l'inégalité de droite.

Conséquence. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre simple de u , i.e. si $m_\lambda = 1$, alors le sous-espace propre associé est une droite.

Exercice II.3.1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a bien sûr $\text{Sp}(A) = \{1\}$.

Déterminer la multiplicité m_1 et la dimension du sous-espace propre $E_1(A)$.

4. Expression du déterminant et de la trace.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors le déterminant de A est égal au produit de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités, et la trace de A est égale à la somme de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités, ce qui s'écrit

$$\det(A) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda^{m_\lambda} \quad \text{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda \lambda.$$

Remarque 1. Ceci s'applique bien sûr aussi à un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Cette dernière condition est toujours satisfaite si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

Remarque 2. J'ai fait le choix, dans l'énoncé de la proposition d'indexer par le spectre de A qui est un ensemble fini. On peut aussi indexer les valeurs propres, et il y a alors deux choix d'écritures possibles:

- "avec répétition": si χ_A est scindé, il y a n valeurs propres en tenant compte des multiplicités, que l'on peut noter $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (ainsi une valeur propre double apparaît deux fois dans cette énumération, etc.), les formules s'écrivent alors

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{et} \quad \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i .$$

- "sans répétition": il y a k valeurs propres **distinctes** que l'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, et chaque valeur propre λ_i a une multiplicité m_i . Si χ_A est scindé, on a alors $\sum_{i=1}^k m_i = n$. Les formules deviennent

$$\det(A) = \prod_{i=1}^k \lambda_i^{m_i} \quad \text{et} \quad \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^k m_i \lambda_i .$$

Preuve de la proposition. Indexons les valeurs propres "avec répétition", i.e. notons-les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (alors non nécessairement distinctes), nous disposons alors de deux écritures du polynôme caractéristique de A :

- développée **(1):** $\chi_A = X^n - \text{tr}(A) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A) ;$

- factorisée **(2):** $\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n).$

En redéveloppant l'écriture factorisée **(2)**, on voit que le coefficient de X^{n-1} est $-\sum_{i=1}^n \lambda_i$, et que le coefficient constant $\chi_A(0)$ vaut $(-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

En identifiant avec l'écriture développée, on conclut.