

DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 3
COMMENTAIRES
PSI2 2025-2026

EXERCICE

Quelques commentaires généraux: j'en ai un peu assez de lire que " $f(x)$ est continue", de voir des $\|f(x)\|_\infty$ etc. Je rappelle que, si x est un réel appartenant à l'ensemble de définition d'une fonction f , alors $f(x)$ est aussi un réel. Cela a-t-il un sens de dire qu'un réel est continu ? de la parler de la norme infinie d'un réel ? Bien sûr que non. Donc prenez la peine d'écrire les choses correctement: " f est continu", parler de $\|f\|_\infty$.

De même la notation $\left(\int_0^x f(t) dt\right)'$ est à proscrire absolument, il est possible par exemple de la remplacer par la notation $\frac{d}{dx} \left(\int_0^x f(t) dt\right)$, qui est correcte et surtout sans ambiguïté.

1. Il est inutile d'introduire une primitive F_k de f_k , il suffit de dire que f_{k+1} **en est une**. Bref, dans cette question et la suivante, il y a quelques lourdeurs de rédaction. Et puis il faudrait apprendre à traiter rapidement ces questions faciles de début de problème sans remplir des pages pour si peu!
4. Le meilleur argument pour expliquer que la série $\sum \frac{|x|^k}{k!}$ converge est de dire que vous reconnaissez une série exponentielle, ou éventuellement d'appliquer la règle de d'Alembert. Dire que le terme général est un $o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ me semble ici très artificiel... et puis est-ce si évident à démontrer ?
Sur plusieurs copies, il est question de fonctions intégrables, ce qui est totalement hors sujet!!!
5. J'ai lu sur certaines copies (pas trop nombreuses heureusement) qu'une somme de fonctions de classe C^1 est encore C^1 . Quand il s'agit d'une somme finie, oui bien sûr! Mais quand il s'agit d'une **somme infinie**, eh bien c'est le moment de montrer que vous avez appris vos théorèmes, et que vous connaissez bien la convergence normale et la convergence uniforme!
10. Encore un théorème à appliquer ici pour intervertir somme (infinie) et intégrale sur un segment, mais attention! la série de fonctions qu'il faut considérer n'est pas la série $\sum f_n$.
- 11.a. Certain(e)s oublient de mentionner la linéarité de ψ , c'est ballot!
- 11.b. Très peu de réponses correctes pour l'injectivité (le théorème de stricte positivité n'a rien à faire ici, aucune des fonctions considérées n'étant a priori positive!), aucune bonne réponse pour la non-surjectivité.

PROBLÈME

2. Attention aux “erreurs de typage”, c’est-à-dire aux erreurs sur les formats des matrices: le coefficient $a_{i,j}$, qui est un scalaire, c’est-à-dire une matrice de format 1×1 , est parfois proposé comme égal à $AE_iE_j^T \dots$ qui est une matrice de format $n \times n$. **Pensez à vérifier que vous écrivez des égalités entre des objets de même nature!**
- 3.a. Ici aussi, **une réflexion préliminaire sur la nature des objets manipulés** éviterait des aberrations, comme des égalités entre $u_A(V_k)$ (qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$) et un vecteur. J’ai vu peu de réponses véritablement satisfaisantes: certains développent des calculs très maladroits et lourds, d’autres se contentent grosso modo de dire “on voit bien que...”
- 5.b. Si le déterminant d’une matrice carrée vérifie la formule $\det(MN) = \det(M) \det(N)$, en revanche il est faux de dire que $\Delta_k(MN) = \Delta_k(M) \Delta_k(N)$. En effet, le k -ième mineur principal de M , noté $\Delta_k(M)$, est le déterminant de la matrice carrée d’ordre k extraite de M en conservant uniquement les k premières lignes et les k premières colonnes, notons $\text{Ext}_k(M)$ cette matrice extraite. Le problème est que l’on n’a pas, en général, l’égalité $\text{Ext}_k(MN) = \text{Ext}_k(M) \text{Ext}_k(N)$, il suffit de faire le calcul sur une matrice 2×2 avec $k = 1$ pour s’en convaincre.
8. La bonne matrice triangulaire supérieure est souvent obtenue, l’interprétation en termes de produits par des matrices de transvection est rarement traitée correctement (les produits matriciels ne sont pas toujours effectués dans le bon ordre). Ce n’est pas une question difficile, il suffit de prendre le temps de traiter les choses en profondeur, cela peut rapporter des points!
9. Question d’unicité, très peu abordée.
10. et 11. L’énoncé a parfois été lu un peu vite. Certains n’ont pas vu que, dans une “décomposition LU”, les coefficients diagonaux de la matrice L doivent valoir 1.
- 12.a. Cela ressemble à l’algorithme de Gauss-Jordan vu en cours pour transformer une matrice inversible en I_n puis calculer son inverse, mais ce n’est pas tout à fait le même puisqu’ici on s’autorise uniquement les opérations élémentaires de type transvection $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, qui plus est avec $i > j$. Il faut donc adapter, et non seulement réciter par cœur le cours.
13. Tiens! Une question facile (ou, en tous cas, classique)! Cela fait toujours quelques points pour ceux qui ont eu la curiosité de tourner la dernière page...