CORRIGÉ du DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 3
PSI2 2025-2026

PROBLÈME: Quelques développements eulériens

PARTIE A. Étude de la somme d'une série de fonctions.

1. Un réel x non entier étant fixé, on a $\left|u_n(x)\right| = \dfrac{2\,|x|}{|x^2-n^2|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\,|x|}{n^2}$ (le dénominateur x^2-n^2 est, à partir d'un certain rang, négatif, et sa valeur absolue vaut alors n^2-x^2). Par comparaison à une série de Riemann, on déduit la convergence absolue, et donc la convergence, de la série de terme général $u_n(x)$.

2. Pour montrer la continuité de la fonction somme, la convergence simple ne suffira pas. Les fonctions u_n sont toutes définies et continues sur l'intervalle $I =]0,1[$. Si $S=[a,b]$ est un segment inclus dans I, i.e. $0<a<b<1$, alors

$$\forall x\in S\quad \forall n\in\mathbb{N}^*\qquad \left|u_n(x)\right| = \frac{2x}{n^2-x^2} \leq \frac{2b}{n^2-b^2} = \left|u_n(b)\right|$$

(on a majoré le numérateur et minoré le dénominateur, qui sont positifs) et on sait d'après **a.** que la série de terme général $\left|u_n(b)\right|$ converge, on en déduit la convergence normale de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ sur S, i.e. sur tout segment inclus dans I. On sait que cela entraîne la continuité sur I de la fonction somme s.

Remarque. On peut aussi noter que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ converge en fait normalement sur tout l'intervalle $]0,1[$. En effet, pour $n\geq 2$ et $x\in]0,1[$, on a $\left|u_n(x)\right| = \dfrac{2x}{n^2-x^2} \leq \dfrac{2}{n^2-1}$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{2}{n^2-1}$ converge. La fonction $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ est alors continue sur $]0,1[$, et on lui ajoute les fonctions u_0 et u_1, elles aussi continues sur $]0,1[$.

3. Par définition, $s(x)$ est la limite des sommes partielles $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$, or

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n}\frac{2x}{x^2-k^2} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x+k}+\frac{1}{x-k}\right) \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k} = \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{x+k}\ . \end{aligned}$$

4. Pour $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbf{Z}$, on a, pour tout n entier naturel non nul,

$$\begin{aligned} s_n(x+1) &= \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{(x+1)+k} = \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{x+(k+1)} = \sum_{k=-n+1}^{n+1}\frac{1}{x+k} \\ &= s_n(x) - \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n+1}\ . \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $s(x+1)=s(x)$.

5. Chaque fonction u_k est impaire sur $\mathbb{R}\setminus\mathbf{Z}$, donc $s = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ l'est aussi. Pour $x\in]0,1[$, on a alors

$$s(1-x) = -s(x-1) = -s(x)$$

grâce à l'imparité et à la 1-périodicité.

6. Pour $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
s_n\Big(\frac{x}{2}\Big) + s_n\Big(\frac{x+1}{2}\Big) &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{\frac{x}{2}+k} + \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{\frac{x+1}{2}+k} \\
&= 2\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+2k} + 2\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+2k+1} \\
&= 2\sum_{p=-2n}^{2n+1} \frac{1}{x+p}\ ,
\end{aligned}$$

en constatant que, si l'on pose $p = 2k$ puis $p = 2k+1$, l'indice p décrit tous les entiers relatifs de $-2n$ à $2n+1$. Finalement,

$$s_n\Big(\frac{x}{2}\Big) + s_n\Big(\frac{x+1}{2}\Big) = 2\, s_{2n}(x) + \frac{2}{x+2n+1}\ .$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $s\Big(\frac{x}{2}\Big) + s\Big(\frac{x+1}{2}\Big) = 2\, s(x)$, soit la relation **(P2)**.

PARTIE B. Une première identité eulérienne.

7. En observant un cercle trigonométrique (ou bien, en utilisant les formules d'addition de la trigonométrie), on obtient

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)\ .$$

Bien sûr, $\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$ et $\sin(\pi-\theta) = \sin(\theta)$. Si $x \in]0,1[$, on a alors

$$g(1-x) = \pi\ \mathrm{cotan}(\pi - \pi x) = \pi\,\frac{\cos(\pi-\pi x)}{\sin(\pi - \pi x)} = -\pi\ \mathrm{cotan}(\pi x) = -g(x)\ ,$$

donc g vérifie **(P1)** sur $]0,1[$, puis

$$\begin{aligned}
g\Big(\frac{x}{2}\Big) + g\Big(\frac{x+1}{2}\Big) &= \pi\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}\right) = \pi\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right) \\
&= \pi\,\frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \pi\,\frac{\cos(\pi x)}{\frac{1}{2}\,\sin(\pi x)} = 2\pi\ \mathrm{cotan}(\pi x) = 2\,g(x)\ ,
\end{aligned}$$

donc g vérifie **(P2)**.

La relation **(P1)** se traduit graphiquement par le fait que la courbe représentative de g est symétrique par rapport au point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, il s'agit donc d'une symétrie centrale.

8. On a $\dfrac{1}{n^2-\frac{1}{4}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ d'où la convergence de la série et l'existence de $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}$. Pour le calcul, observons que

$$\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\ .$$

En calculant une somme partielle, on observe alors un télescopage:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)=2-\frac{1}{N+\frac{1}{2}}\quad\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\quad S=2\ .$$

Comme $s(x)-\dfrac{1}{x}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$, ces fonctions étant toutes négatives sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$, on a $\left|s(x)-\dfrac{1}{x}\right|=\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\right|=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left|u_n(x)\right|$ et, comme $\left|u_n(x)\right|=\dfrac{2x}{n^2-x^2}\leq\dfrac{2x}{n^2-\frac{1}{4}}$, on a alors

$$\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right]\qquad 0\leq\left|s(x)-\frac{1}{x}\right|\leq 2\,x\,S=4x\ .$$

Le majorant tend vers 0 lorsque $x\to 0^+$ donc, par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(s(x)-\frac{1}{x}\right)=0$.

Remarque. On pouvait aussi observer que $s\left(\dfrac{1}{2}\right)=2+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\frac{1}{4}-n^2}=2-S$. Or, de la propriété **(P1)**, il résulte que $s\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$, donc $S=2$.

9. Partant de $\cos(t)=1+o(t)$ et $\sin(t)=t+o(t^2)$ au voisinage de 0, on obtient

$$g(x)=\pi\,\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}=\pi\,\frac{1+o(x)}{\pi x+o(x^2)}=\frac{\pi}{\pi x}\,\big(1+o(x)\big)\,\big(1+o(x)\big)^{-1}=\frac{1}{x}\,\big(1+o(x)\big)=\frac{1}{x}+o(1)\ ,$$

ce qui montre que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(g(x)-\frac{1}{x}\right)=0$.

10. La fonction $h=s-g$ est déjà définie et continue sur $I=]0,1[$ ouvert, comme différence de deux fonctions continues sur cet intervalle.

Ensuite, pour $x\in I$, on a $h(x)=\left(s(x)-\dfrac{1}{x}\right)-\left(g(x)-\dfrac{1}{x}\right)$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}h(x)=0$ d'après les questions **8.** et **9.** ci-dessus. Enfin, les fonctions s et g vérifient sur I la propriété **(P1)**, il est clair alors que toute combinaison linéaire de s et g la vérifie aussi, et notamment la fonction h. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}h(x)=0$.

La fonction h étant continue sur $]0,1[$ et admettant des limites finies en 0 et en 1, elle est donc prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,1]$. On posera donc $h(0)=0$ et $h(1)=0$.

11. La fonction $|h|$ étant continue sur le segment $[0,1]$, elle y admet un maximum. Comme différence de deux fonctions vérifiant la propriété **(P2)**, il est clair que h la vérifie aussi. De l'inégalité triangulaire, on déduit alors que

$$M = \left|h(x_0)\right| \le \frac{1}{2}\left|h\Big(\frac{x_0}{2}\Big) + h\Big(\frac{x_0+1}{2}\Big)\right| \le \frac{1}{2}\left(\left|h\Big(\frac{x_0}{2}\Big)\right| + \left|h\Big(\frac{x_0+1}{2}\Big)\right|\right) \le \frac{1}{2}(M+M) = M\ .$$

L'égalité entre les termes extrêmes entraîne l'égalité de tous les termes, en particulier $\left|h\Big(\frac{x_0}{2}\Big)\right| + \left|h\Big(\frac{x_0+1}{2}\Big)\right| = 2M$ et, comme chaque terme est majoré par M, on a nécessairement $\left|h\Big(\frac{x_0}{2}\Big)\right| = \left|h\Big(\frac{x_0+1}{2}\Big)\right| = M$. En réitérant ce raisonnement, on a pour tout n entier naturel, $\left|h\Big(\frac{x_0}{2^n}\Big)\right| = M$ et, en passant à la limite lorsque n tend vers l'infini, et en utilisant la continuité de la fonction h en 0, on a $M = \left|h(0)\right|$, soit $M = 0$.

12. La fonction h est donc nulle sur $[0,1]$, ce qui entraîne que $g(x) = s(x)$ pour tout $x \in]0,1[$, c'est-à-dire la relation demandée.

13. On peut en fait poser $g(x) = \pi\ \mathrm{cotan}(\pi x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}$, et on définit ainsi sur $\mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}$ une fonction g qui est 1-périodique. Les fonctions g et s sont toutes deux 1-périodiques (question **4.** pour s), et elles coïncident sur $]0,1[$, elles coïncident donc sur $\mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}$.

PARTIE C. Conséquences de cette première identité.

14. Un calcul élémentaire montre que la dérivée de $x \mapsto \pi\ \mathrm{cotan}(\pi x)$ est $x \mapsto -\dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$, et ceci sur $\mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}$, c'est-à-dire sur chaque intervalle $]k, k+1[$, avec k entier relatif. On va donc chercher à dériver la relation obtenue en **13.** Par commodité, plaçons-nous sur $]0,1[$ pour commencer.

Chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I =]0,1[$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I d'après **1.**, examinons maintenant la série des dérivées.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I$, on a

$$u_n'(x) = -\frac{2\,(x^2+n^2)}{(x^2-n^2)^2} = -\left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2}\right)\ .$$

Si $S = [a,b]$ est un segment inclus dans I (donc $0 < a < b < 1$), alors, pour $x \in S$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\textbf{(*) :} \qquad \left|u_n'(x)\right| = \frac{2(x^2+n^2)}{(n^2-x^2)^2} \le \frac{2(1+n^2)}{(n^2-b^2)^2}\ ,$$

qui est le terme général d'une série convergente (équivalent à $\dfrac{2}{n^2}$) **indépendante de** x, on en déduit la convergence normale sur S (donc la convergence uniforme sur tout segment inclus dans I) de la série $\sum u_n'$.

Le théorème de dérivation des séries de fonctions s'applique donc: la fonction $s = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (ce que l'on savait déjà puisqu'elle coïncide avec g qui est $\mathcal{C}^1$), et on a

$g' = s' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$ sur I, ce qui donne

$$\forall x \in I \qquad -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = -\frac{1}{x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2}\right).$$

En changeant les signes, on a la relation demandée, sur $I =]0,1[$. Enfin, chaque membre est fonction 1-périodique de x, donc la relation est vraie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}$.

Remarque. Comme en **Q2.**, on peut observer qu'il y a en fait convergence normale sur l'intervalle $I =]0,1[$ tout entier de la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n'$: en effet, pour $n \geq 2$, on a $\|u_n'\|_{\infty,I} = \frac{2(n^2+1)}{(n^2-1)^2}$, qui est sommable. On peut donc appliquer le théorème de dérivation à la série $\sum_{n\geq 2} u_n$, puis ajouter les fonctions u_0 et u_1 qui sont évidemment de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

15. Voici une solution parmi d'autres! Pour $x \in]0,1[$, on a donc

$$\textbf{(*):} \qquad \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} - \frac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2}\right).$$

Faisons tendre x vers zéro. Le premier membre $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} - \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2 x^2 - \sin^2(\pi x)}{x^2 \sin^2(\pi x)} = \frac{N(x)}{D(x)}$ tend vers $\frac{\pi^2}{3}$. En effet, le dénominateur $D(x)$ est équivalent à $\pi^2 x^4$, et pour le numérateur on fait un développement limité:

$$\begin{aligned} N(x) &= \pi^2 x^2 - \left(\pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = \pi^2 x^2 \left(1 - \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{6} + o(x^2)\right)^2\right) \\ &= \pi^2 x^2 \left(1 - \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{3} + o(x^2)\right)\right) = \frac{\pi^4 x^4}{3} + o(x^4), \end{aligned}$$

donc $N(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi^4 x^4}{3}$. Enfin, la convergence normale sur $]0,1[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n'$, mentionnée dans la ***Remarque*** ci-dessus, permet d'intervertir somme et limite en 0 dans le second membre de **(*)** qui tend donc vers $2\,\zeta(2)$ quand x tend vers 0. On déduit que $2\,\zeta(2) = \frac{\pi^2}{3}$, soit $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE D. Formule d'Euler-Wallis.

16. Clairement, $\lim_{x\to 0} u_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Une remarque très formelle: les fonctions u_n introduites dans le préambule ont été déclarées comme définies sur $\mathbb{R}\setminus\mathbf{Z}$, donc non définies a priori en 0, c'est donc bien d'un prolongement qu'il s'agit. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on posera maintenant $u_n(0) = 0$, ainsi les fonctions u_n pourront être considérées comme définies et continues sur $[0,1[$.

Soit $x \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,x]$, on a

$$\left|u_n(t)\right| = -u_n(t) = \frac{2t}{n^2-t^2} \leq \frac{2x}{n^2-x^2} = \left|u_n(x)\right|$$

(majoration analogue à la question **2.**). La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2x}{n^2-x^2}$ étant convergente, cela prouve la convergence normale de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ sur le segment $[0,x]$.

17. Soit $x \in]0,1[$. Puisque les fonctions u_n, pour $n \geq 1$, sont continues sur le segment $[0,x]$ et que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur ce segment, il est licite d'intervertir série et intégrale. De **12.**, on déduit que, pour tout $t \in]0,x]$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) = \pi\ \mathrm{cotan}(\pi t) - \frac{1}{t}$ (que l'on peut prolonger par continuité en 0 avec la valeur 0). On obtient ainsi, pour $x \in]0,1[$,

$$\int_0^x \left(\pi\ \mathrm{cotan}(\pi t) - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t = \int_0^x \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\Big)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x u_n(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{2t}{t^2-n^2}\, \mathrm{d}t\ ,$$

soit

$$\Big[\ln\big(\sin(\pi t)\big) - \ln(t)\Big]_0^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[\ln\left|t^2-n^2\right|\Big]_0^x\ ,$$

soit encore

$$\ln\Big(\frac{\sin(\pi x)}{x}\Big) - \ln(\pi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\ln(n^2-x^2) - \ln(n^2)\Big)\ ,$$

soit enfin

$$\ln\Big(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big)\ .$$

18. En posant $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\Big(1-\frac{x^2}{k^2}\Big)$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln\Big(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\Big)$. Par continuité de l'exponentielle, on déduit que, si l'on pose $\displaystyle P_n = \prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{x^2}{k^2}\Big)$, alors $\displaystyle\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \lim_{n\to+\infty} P_n$, ce que l'on peut écrire $\displaystyle\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big)$.

19. Pour $x = \dfrac{1}{2}$, on trouve donc

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{1}{4n^2}\Big) = \frac{\sin\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big)}{\dfrac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\ .$$